論 文 審 査 の 要 旨

博士の専攻分野の名称	博　士（　理学　）	氏名	米田　好佑
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1・2 項該当		

論文題目

Singularities of the dual curve of a certain plane curve in positive characteristic

（正標数におけるある平面曲線の双対曲線の特異点）

論文審査担当者

主　　査	教　授	島田　伊知朗
審査委員	教　授	井上　昭彦
審査委員	教　授	木村　俊一
審査委員	准教授	高橋　宣能

〔論文審査の要旨〕

複素数体上定義された射影平面曲線の双対曲線は 19 世紀の代数幾何学において非常に詳しく調べられた研究対象である．次数 d の複素射影平面曲線 C でその定義方程式の係数が一般的なものを考える．このときガウス写像は C から C の双対曲線への双有理写像となる．C の双対曲線は d (d-1) 次の射影平面曲線となり，その特異点は通常二重点と通常尖点のみからなる．古典的なプリュッカーの公式は C の双対曲線の通常二重点の個数（つまり C の二重接線の本数）および通常尖点の個数（つまり C の変曲点の個数）を与えるものである．

一方，正標数においては，ガウス写像が非分離射となることがあるためにこれらの美しい結果は成立しない．この正標数特有の現象（かつては「正標数の病理学」とよばれた現象）は多くの幾何学者の興味をひいてきた．とりわけ近年に至って，

(a) 有限体上定義された代数曲線を用いて効率の良い誤り訂正符号を構成する，
(b) 代数曲線のヤコビアン多様体上の離散対数問題を用いて，量子計算機に対しても安全な暗号システムを構成する，

などの，正標数の代数幾何学の計算機科学における工学的応用が見出されたために，これらの代数曲線の研究は非常に活発に行われるようになった．

本論文は，ガウス写像が非分離射となる射影平面曲線のあるクラスに着目し，その双対曲線を詳しく調べたものである．以下 p を素数とし，標数が p の代数閉体上で議論を進める．q を p のべきとする．本論文において研究される射影平面曲線は，[X_0: X_1: X_2] を射影平面の同次座標系とした時に，

X_i ・X_j^q ・X_k ^q^{2}

なる形のモノミアルの線形和として得られる q^2+q+1 次の同次多項式 F の零点として得られる曲線である.「定義方程式 F がこの形のモノミアルの線形和として書ける」という性質は，同次座標系の選び方によらない性質（すなわち幾何学的な性質）であることが示される．さらに定義方程式 F の係数が一般的であればこの曲線は非特異になる.

まず最初に，定義方程式 F の係数は一般的であると仮定する．曲線 C のガウス写像は次数 q の非分離射となっており，ガウス写像によって C の多くの性質が失われてしまう．したがってその双対曲線を調べるにあたっては，古典的な方法を用いることができない．本論文の著者は，巧妙な議論によりこの困難を乗り越え，以下の定理を示すことに成功した.

(i)　C の双対曲線の次数は $(q^2+q+1)(q+1)$ である.
(ii)　C の双対曲線の特異点は通常二重点のみからなる.
(iii)　C の双対曲線の通常二重点の個数（つまり C の二重接線の本数）は

$$q(q^2+q+1)(q^3+3q^2+3q-1)/2$$

に等しい.

C のすべての接線は接点において少なくとも q 次の重複度で接しているために, 古典的な意味での変曲点は意味をもたなくなる．著者は q+1 次以上の重複度で接する接線をもつ点を変曲点として定式化し，次のことを示した.

(iv) C の変曲点の個数は $(q^3+2q^2-q+1)(q^2+q+1)$ に等しい.

以上が，本論文の第一の主定理である.

続いて著者は，定義方程式の係数を特殊化し，C が q^2+q+1 次のフェルマー曲線の場合にその双対曲線を調べた．この場合には，双対曲線が Ballico-Hefez 曲線を用いて簡単に記述できることを発見し，さらにこの記述を用いて，双対曲線の特異点の形状を調べ，以下の結果を得た.

q^2+q+1 次のフェルマー曲線の双対曲線の特異点は $(q^2+q+1)^2(q^2-q)/2$ 個の通常二重点と $3(q^2+q+1)$ 個の Milnor 数 $q^2(q+1)$ の特異点からなる.

以上が，本論文の第二の主定理である.

本論文は，正標数特有の非常に興味深い性質を示す射影平面曲線のある族を見出してその性質を調べたものである．この族は容易に高い次元に一般化される．したがって本論文は正標数の代数幾何学における大きな研究テーマの出発点となることが期待される.

以上，審査の結果，本論文の著者は博士（理学）の学位を授与される十分な資格があるものと認める.

公表論文

Singularities of the dual curve of a certain plane curve in positive characteristic

（正標数におけるある平面曲線の双対曲線の特異点)

Kodai Mathematical Journal, 44 (2021) 出版予定