学位論文要旨

Singularities of the dual curve of a certain plane curve in positive characteristic
(正標数におけるある平面曲線の双対曲線の特異点)

氏名　米田好佑

標数 0 の場合

標数 0 における次数 d の一般的な非特異平面曲線 $\tilde{C}$ の双対曲線 $\tilde{C}^\vee$ について, 以下のようなことが知られている.

- ガウス写像 $\tilde{C} \to \tilde{C}^\vee$ は双有理.
- $\tilde{C}^\vee$ の次数は $d(d-1)$.
- $\tilde{C}$ の 2 重接線は $\tilde{C}^\vee$ の ordinary node に対応していて, その数は $\frac{1}{2}d(d-2)(d-3)(d+3)$.
- $\tilde{C}$ の変曲点は $\tilde{C}^\vee$ の cusp に対応していて, その数は $3d(d-2)$.

しかしながら正標数においては, ガウス写像は双有理であるとは限らない.

正標数の場合

q を素数 p の冪とし, $\Bbbk$ を標数 p の代数閉体とする. また, $[x_0 : x_1 : x_2]$ を $\mathbb{P}^2$ の中の同次座標系とする. このとき, 次の同次多項式 F によって定義された平面曲線 C を考える:

$$F = \sum_{i,j,k} a_{ijk} x_i x_j^q x_k^{q^2} \quad (a_{ijk} \in \Bbbk). \tag{1}$$

定義方程式が (1) の形をしているという性質は $\mathbb{P}^2$ の同次座標系の選び方に依らない.

ガウス写像

$$\Gamma : C \to C^\vee; [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto \left[\frac{\partial F}{\partial x_0} : \frac{\partial F}{\partial x_1} : \frac{\partial F}{\partial x_2}\right]$$

は

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{j,k} a_{ijk} x_j^q x_k^{q^2} = \left(\sum_{j,k} \alpha_{ijk} x_j x_k^q\right)^q$$

より, 非分離次数 q の非分離拡大である. ただし, $\alpha_{ijk} = a_{ijk}^{1/q}$.

$\mathscr{C}$ を同次多項式 (1) によつて定義された平面曲線全体の集合とする.

(1) によって定義された曲線 C と C の接線の接点における重複度は q 以上である. ここで, (1) によって定義された曲線 C の 2 重接線と変曲点を以下のように定義する.

定義. m を 2 以上の整数とする. m 重接線を重複度 q である異なる m 個の接点を持つ接線であると定義する. また, 変曲点を接線が重複度 $q+1$ で C と接する点であると定義する. 特に, $m = 2$ のとき, m 重接線を 2 重接線という.

このとき, C の 2 重接線は $C^\vee$ の ordinary node に対応するが, 標数 0 と異なり C の変曲点は $C^\vee$ の滑らかな点に対応する.

主定理は以下のとおりである.

定理 1. C は $\mathscr{C}$ の中で一般的であるとする．このとき,

(i) $C^\vee$ の次数は $(q^2+q+1)(q+1)$,

(ii) $C^\vee$ は特異点として ordinary node しか持たない,

(iii) $C^\vee$ の ordinary node の数, すなわち C の 2 重接線の数は

$$\frac{q(q^2+q+1)(q^3+3q^2+3q-1)}{2},$$

(iv) C の変曲点の数は

$$(q^3+2q^2-q+1)(q^2+q+1).$$

定理の前半は dimension counting により示すことができる．$C^\vee$ の ordinary node の数は C の種数と $C^\vee$ の種数を比べることにより計算することができ, C の変曲点の数は曲線の correspondence を導入することにより計算することができる.

特別な場合として q^2+q+1 次のフェルマー曲線 C_0 の双対曲線 $C_0^\vee$ について考える．双対曲線 $C_0^\vee$ は Ballico-Hefez 曲線と関係づけられる．Ballico-Hefez 曲線は以下のように定義される.

定義. $\gamma_{q+1}:\mathbb{P}^2\to\mathbb{P}^2$ を

$$\gamma_{q+1}([x_0:x_1:x_2])=\left[x_0^{q+1}:x_1^{q+1}:x_2^{q+1}\right]$$

により定義された射とする。Ballico-Hefez 曲線は γ_{q+1} による直線 $x_0+x_1+x_2=0$ の像である.

Ballico-Hefez 曲線の特異点については Fukasawa–Homma–Kim (2012) により調べられており, Ballico-Hefez 曲線の定義方程式は Hoang–Shimada (2015) により調べられている．それらの結果と正標数におけるミルナー数の計算により双対曲線 $C_0^\vee$ の特異点の種類と数を調べることができ, 以下の定理が示される.

定理 2. B を Ballico-Hefez 曲線, $\gamma_{q^2+q+1}:\mathbb{P}^2\to\mathbb{P}^2$ を

$$\gamma_{q^2+q+1}([x_0:x_1:x_2])=\left[x_0^{q^2+q+1}:x_1^{q^2+q+1}:x_2^{q^2+q+1}\right]$$

によって定義された射とする．$C_0\in\mathscr{C}$ が次数 q^2+q+1 次のフェルマー曲線であるとき, 以下の 2 つが成り立つ.

(i) $C_0^\vee=\gamma_{q^2+q+1}^{-1}(B)$,

(ii) $C_0^\vee$ の特異点は $(q^2+q+1)^2(q^2-q)/2$ 個の ordinary node とミルナー数が $q^2(q+1)$ である $3(q^2+q+1)$ 個の特異点からなる.