

博士論文

ウンルー効果の量子情報科学への応用
に関する理論的研究

令和3年3月

広島大学大学院総合科学研究科

廣石 雅紀

博士論文

ウンルー効果の量子情報科学への応用
に関する理論的研究

令和3年3月
広島大学大学院総合科学研究科
総合科学専攻
廣石 雅紀

目次

第1章 序論	1
1.1 背景	1
1.2 パラメトリック増幅について	2
1.2.1 古典力学におけるパラメトリック増幅	2
1.2.2 古典力学でパラメトリック増幅を生じさせるための条件	6
1.2.3 光学におけるパラメトリック増幅	6
1.2.4 真空揺らぎのパラメトリック増幅	8
1.3 量子エンタングルメントの量子相関	9
1.4 ウンルー効果のパラメトリック下方変換との共通点	10
1.5 ウンルー効果と他の量子エンタングルメント生成機構との関係	11
1.6 本論文の目的	13
1.7 本論文の構成	13
第2章 慣性系からみたフォック状態の定義	14
2.1 クライン・ゴルドン方程式	14
2.2 場のモード展開	16
2.3 クライン・ゴルドン内積の定義	17
2.4 場の量子化とフォック空間の定義	17
2.5 クライン・ゴルドン方程式を導く作用積分	19
2.6 まとめ	20
第3章 一様加速系からみたフォック状態の定義	22
3.1 一様加速運動をするロブの世界線	22
3.2 一様加速運動をするロブの固有座標系	26
3.3 右リンドラー座標系の導入	27
3.4 左リンドラー座標系の導入	29
3.5 リンドラー座標系における場のモード展開	31
3.6 右リンドラー座標系に対応するフォック空間の定義	33
3.7 左リンドラー座標系に対応するフォック空間の定義	33
3.8 まとめ	34
第4章 ウンルー効果のメカニズム	36
4.1 ウンルーモード関数の導入	36

4.2	ボゴリューボフ変換の簡潔化	38
4.3	ウンルー真空とミンコフスキー真空との関係	41
4.4	ウンルー効果をもたらす量子エンタングルメント	43
4.5	まとめ	44
第5章	ウンルー効果をもたらすユニタリー演算子 \hat{G} の役割	45
5.1	光学系のモデル	45
5.1.1	スクイージングの作用	46
5.1.2	ビームスプリッタの作用	47
5.1.3	ビームスプリッタによるスクイズド真空状態の重ね合わせ	48
5.1.4	2モードスクイズド状態を形成するユニタリー変換の性質	48
5.2	ウンルー効果をもたらすユニタリー演算子 \hat{G} の解釈	50
5.3	ウンルー効果を表すエンタングル状態 $ EPR\rangle$ の取り出し	51
5.4	まとめ	52
第6章	閉じた時間的曲線を利用した量子エンタングルメントの形成	54
6.1	CTCに関する背景	54
6.2	場の CTC のモデル	55
6.2.1	事後選択された量子テレポーテーション	55
6.2.2	CTC を用いたエンタングル状態 $ \Phi(a ^2)\rangle_{A,B}$ の形成	57
6.2.3	量子テレポーテーションの CTC についての考察	59
6.3	場の CTC を用いたエンタングル状態の形成	61
6.3.1	場の CTC の形成方法	61
6.3.2	CTC がフォック状態よりなる場合	66
6.3.3	アリスが逆変換の操作を行わない場合	73
6.3.4	CTC がコヒーレント状態よりなる場合	75
6.3.5	CTC がスクイズド状態よりなる場合	76
6.4	まとめ	78
第7章	ウンルー効果を利用した量子テレポーテーション	80
7.1	量子テレポーテーションの手順	80
7.2	量子複製不可能定理に関する考察	82
7.3	まとめ	82
第8章	結論	83
8.1	提案事項のまとめ	83
8.2	本研究の着眼点及び貢献的意義	84
8.3	発見事項のまとめ	84
8.4	今後の課題	85
付録 A	正準交換関係からの不確定性関係の導出	86

付録 B	ウンルー効果をもたらすユニタリー演算子 \hat{G} の作用の確認	88
B.1	リンドラーラダー演算子の時間発展の確認	88
B.2	リンドラー真空の時間発展の確認	89
付録 C	熱状態からのプランクの放射式の導出	91
C.1	ボース・アインシュタイン分布関数の導出	91
C.2	エネルギー固有状態の数密度の導出	93
C.3	プランクの放射式の導出	94
C.4	まとめ	94
C.5	付言：ロブの固有加速度 a の具体値の見積もり	94
付録 D	フォック空間 \mathcal{F}_I と \mathcal{F}_II とのユニタリー非同値性について	95
D.1	ミンコフスキー真空の展開	95
D.2	演算子 \hat{V} の性質	97
D.3	まとめ	97
付録 E	電磁場の量子化	98
E.1	一般化座標・一般化運動量演算子を用いた光の表現	98
E.2	生成・消滅演算子を用いた光の表現	100
E.3	演算子 $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ の物理的意味	101
E.4	まとめ	101
付録 F	量子力学における時間反転	102
F.1	古典力学の場合	102
F.2	量子力学の場合	103
F.2.1	時間反転状態	103
F.2.2	遷移確率の不変性	104
F.2.3	複素共役の意義	104
F.2.4	量子テレポーテーションの転送状態 $ \psi\rangle$ の時間反転	105
謝辞		106
参考文献		107

第1章 序論

1.1 背景

今日、あらゆる技術分野で情報科学が駆使されている。情報科学は、1940年代に最初のコンピュータが登場して以来、今日に至るまで劇的に進化を遂げ、今後も進展しつづけると思われる。しかし、情報科学がいかに進展しようとも、情報が物理的な媒体によって保持されることを要し、その媒体への働きかけによって情報処理が遂行されるという事実は不変である [1]。そして、その媒体のふるまいは必ず物理法則に支配される。従って、情報科学の根幹は、物理学によって支えられていると言える。

近年では、情報を保持する媒体に光子、電子等の量子系を用い、かつ量子力学特有の物理法則である重ね合わせの原理 (superposition principle) を積極的に活用する情報処理、即ち量子情報処理の実用化が進められている。量子情報処理では、重ね合わせの原理に基づいて、個々の量子系に状態の重ね合わせを形成し、個々の量子系の複数の状態で並列に計算するといったことを行う。これにより、古典物理学の範疇では実現できない情報処理が達成される。なお、こういった量子効果を活用する量子情報処理を扱う情報科学を特に量子情報科学と呼んでいる。

一方、現状の量子情報処理では、相対論的な効果については積極的に取り入れているとは言いがたい。しかし、上述のように、情報を保持する媒体は物理法則に支配される。このため、媒体の運動に起因する相対論的な影響が無視できない場合がある。具体的には、媒体が加速運動する場合、その媒体は相対論的な影響としてウンルー効果 (Unruh effect) を受ける。ウンルー効果とは、加速運動を行う舞台としての場が、黒体放射と同じ統計分布に従って、エネルギー量子としての粒子を放射するというものである [2]。この放射をウンルー放射 (Unruh Radiation) という。

ウンルー放射は、情報を保持する媒体における、上述した状態の重ね合わせを破壊するデコヒーレンス (decoherence) の原因となる [3] [4] [5] [6] [7]。従って、量子系を用いる意義が損なわれるため、常識的な処方によれば、ウンルー効果は、量子情報処理を遂行するうえでは回避すべきものとして扱われる。

ところが、ウンルー放射の発生プロセスは、量子情報処理を実現するために不可欠な操作の1つであるパラメトリック増幅 (parametric amplifier) と物理的に等価である [8]。パラメトリック増幅とは、具体的には、量子エンタングルメント (quantum entanglement) を形成するための操作であり、量子エンタングルメントは、古典的な情報処理に対する優位性を量子情報処理にもたらす根源である。

そうすると、そのように重要な操作であるパラメトリック増幅とウンルー効果とが物理的に等価であるならば、ウンルー効果は、量子情報処理に有効活用できる可能性を秘めていると考えられる。この推察に端を発して、本研究では、ウンルー効果を量子情報科学に応用する手法を模索した。以下、上述した背景を具体的に説明する。

1.2 パラメトリック増幅について

上述のように、ウンルー効果がパラメトリック増幅と物理的に等価であるということが、ウンルー効果の活用法を見い出そうとする本研究の動機である。

そこで、ウンルー効果とパラメトリック増幅とがどのように共通するかを具体的に示すために、パラメトリック増幅がどのようなものかについてまず説明する。なお、パラメトリック増幅による量子エンタングルメントの形成には、量子効果が寄与している。そこで、どのような点で量子効果が寄与しているかを明らかにするための比較例として、古典力学におけるパラメトリック増幅を最初に説明する。

1.2.1 古典力学におけるパラメトリック増幅

パラメトリック増幅とは、振動系において振動を決定付けるパラメータを周期的に変化させることにより、振動を増幅させる操作のことである。以下、パラメトリック増幅の典型例として、ぶらんこについて述べる。

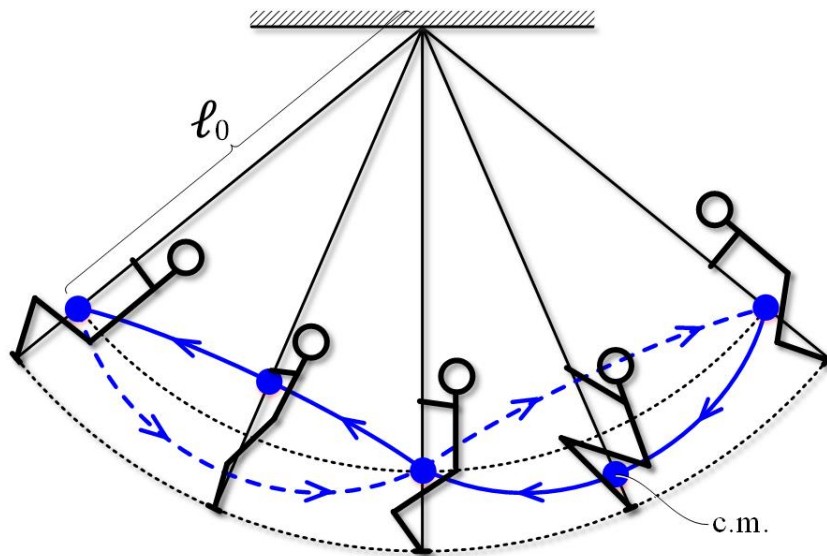


図 1.1: ぶらんこをこぐ際の人の動きを示す概念図。青い丸は、重心 c.m. の位置を示す。青い実線及び破線は、重心の軌跡を示す。

図 1.1 に示すように、ぶらんこをこぐことで、ぶらんこの振幅が増大することがよく知られている。ぶらんこをこぐとは、具体的には、ぶらんこに載った人が腰を上下に移動させることである。これにより、図 1.1 中、青い丸で示すように、人の重心 c.m. が上下に移動する。このことは、ぶらんこという振動系のパラメータである、鎖の長さを周期的に変化させることと等価である。つまり、ぶらんこをこぐことは、パラメータとしての鎖の長さを周期的に変化させることにより振幅を増大させるパラメトリック増幅である。

ぶらんこをこぐ動作と、いわゆる強制振動との違いの 1 つは、振幅を増幅させるために与える力の方向にある。即ち、強制振動の外力は、振動の方向に作用するのに対し、ぶらんこに載った人が腰を移動させるのに要する力の方向は、常に、ぶらんこの振動の方向に対して直角である。また、人は、ぶらんこという振動系の一部を構成しているのであり、人が腰を移動させるのに要する力は、外力というよりも、むしろ内力というべきである。これらの点で、パラメトリック増幅は、いわゆる強制振動とは一応区別される [9]。

ぶらんこをこぐことで振幅が増大する理由は、人が腰を移動させるのに要するエネルギーが、ぶらんこの振動エネルギーに変換されているためである。以下、ぶらんこをこぐことで振幅が増大することを数学的に確認する。

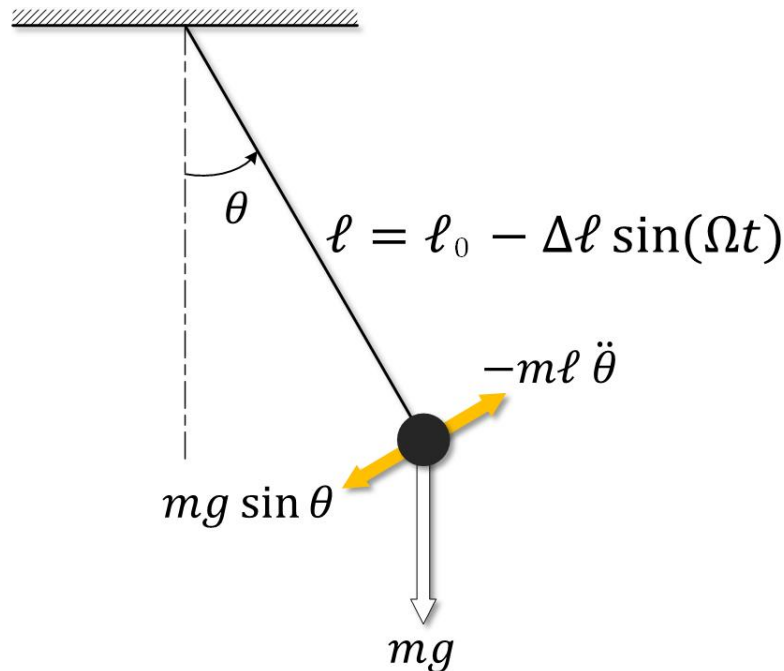


図 1.2: ぶらんこの物理モデルとしての単振り子。

図 1.2 は、ぶらんこの物理モデルとしての単振り子を示す。単振り子は、長さ l の糸と、その糸の下端につながれた質量 m の質点とで構成される。質点の位置が、図 1.1 に示した重心 c.m. の位置に相当する。この単振り子の運動方程式は次のように書ける。

$$ml\ddot{\theta} + mg \sin \theta = 0 \tag{1.2.1}$$

ここで θ は、鉛直に延びる仮想直線に対する質点の振れ角であり、 g は、重力加速度である。式 (1.2.1) において、左辺第 1 項は、ダランベール (D' Alembert) の原理でいう慣性力を表し、左辺第 2 項は、重力による復元力を表す。

振れ角 θ が微小で、 $\sin \theta \simeq \theta$ とみなせる場合、上式は次のように書ける：

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0 \quad (1.2.2)$$

次に、ぶらんこをこぐ動作を取り入れる。ぶらんこをこぐ動作は、糸の長さ ℓ を周期的に変化させることで表す。その変化の角周波数を Ω とすると、糸の長さ ℓ は次のように書ける。

$$\ell = \ell_0 - \Delta\ell \sin(\Omega t) \quad (1.2.3)$$

式 (1.2.3) は、糸の基準長さが ℓ_0 で、長さの変化幅が $\Delta\ell$ であることを示す。図 1.1 には、ぶらんこの鎖の基準長さに相当する部分に符号 ℓ_0 を付した。

式 (1.2.3) を式 (1.2.2) に代入することで、ぶらんこの運動方程式が得られる。そのために、まず式 (1.2.3) を用いて、式 (1.2.2) に含まれる g/ℓ を計算する。簡単のため、 $\Delta\ell$ が ℓ_0 に対して微小であると仮定し、 $(\Delta\ell/\ell_0)^2 \simeq 0$ とすると、次式を得る：

$$\begin{aligned} \frac{g}{\ell} &= \frac{g}{\ell_0 - \Delta\ell \sin(\Omega t)} \\ &= \frac{g [\ell_0 + \Delta\ell \sin(\Omega t)]}{[\ell_0 - \Delta\ell \sin(\Omega t)] [\ell_0 + \Delta\ell \sin(\Omega t)]} \\ &= \frac{g\ell_0 \left[1 + \frac{\Delta\ell}{\ell_0} \sin(\Omega t) \right]}{\ell_0^2 \left[1 - \left(\frac{\Delta\ell}{\ell_0} \right)^2 \sin^2(\Omega t) \right]} \\ &\simeq \frac{g}{\ell_0} \left[1 + \frac{\Delta\ell}{\ell_0} \sin(\Omega t) \right] \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

上式 (1.2.4) において g/ℓ_0 という物理量は、糸の長さの変化幅 $\Delta\ell$ がゼロで、糸が基準長さ ℓ_0 に固定されている場合の単振り子の固有角振動数 (以下、これを変数 ω_n で表すことにする。) の 2 乗に相当する。ぶらんこは、こぎ始めた当初、近似的に ω_n に等しい角振動数で揺れているものとする。また、図 1.1 に示したように、ぶらんこをこぐ際、人は、ぶらんこの揺れの周期の半分の周期で腰を上下に動かす。つまり、腰を上下に動かす角振動数に相当する Ω は、ぶらんこの角振動数 ω_n の 2 倍である。そこで、次の関係、

$$\omega_n := \sqrt{\frac{g}{\ell_0}} \quad (1.2.5)$$

$$\Omega = 2\omega_n \quad (1.2.6)$$

と、式(1.2.4)とを、式(1.2.2)に代入する。すると、次式を得る：

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = F \quad (1.2.7)$$

但し、 F は次式で定義される：

$$F = -\omega_n^2 \frac{\Delta \ell}{\ell_0} \sin(2\omega_n t) \theta$$

式(1.2.7)は、右辺 F をゼロとおけば自由振動の運動方程式となるので、右辺 F は、ぶらんこに対し、鎖と直角な向きに働くみかけの外力であると形式的にみることができる。このみかけの外力 F がぶらんこに対して成す仕事が、振動のエネルギーを増大させる。

このことを具体的に確認するために、まず、ぶらんこの振れ角 $\theta(t)$ が満たす方程式を定める必要がある。上述のように、簡単のため、ぶらんこは ω_n に等しい角振動数で揺れていると近似する。具体的には、こぎ始めた当初のぶらんこの振れ角 $\theta(t)$ は、次のように書けると仮定する：

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_n t) \quad (1.2.8)$$

但し、 θ_0 は次式で定義される：

$$\theta_0 = \theta(t=0) \quad (1.2.9)$$

つまり、 θ_0 は、ぶらんこの振れ角 $\theta(t)$ の初期条件である。 $\theta_0 \neq 0$ である点に注意する。

上式(1.2.8)のように振れ角 $\theta(t)$ が表されるとき、式(1.2.7)に示したみかけの外力 F が微小時間 dt の間にぶらんこ（質点）に対して成す仕事 dW は、次のように計算される [10]：

$$\begin{aligned} dW &= F \cdot \ell d\theta \\ &= F \cdot \ell \frac{d\theta}{dt} dt \\ &= \ell \left[-\omega_n^2 \frac{\Delta \ell}{\ell_0} \sin(2\omega_n t) \right] \left[\theta_0 \cos(\omega_n t) \right] \left[-\omega_n \theta_0 \sin(\omega_n t) \right] dt \\ &= \frac{\ell \Delta \ell}{2 \ell_0} \omega_n^3 \theta_0^2 \sin^2(2\omega_n t) dt \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

上式(1.2.10)で、 ℓ 、 $\Delta \ell$ 、 ℓ_0 、 ω_n 、及び θ_0 は、いずれも正の値をとるから、常に、

$$dW \geq 0 \quad (1.2.11)$$

である。従って、振動のエネルギーはたえず増大する。このことは、ぶらんこの振れが次第に大きくなることを意味する。これがパラメトリック増幅の効果である。以上、古典力学において質点の揺れをパラメトリック増幅する具体例を述べた。

1.2.2 古典力学でパラメトリック増幅を生じさせるための条件

前節で、式(1.2.7)の右辺 F を外力と形式的にみることが出来る旨述べた。しかし、パラメトリック増幅は、強制振動とは異なり、増幅の対象となる振動のエネルギーが元々ゼロである場合には、生じさせることができない。具体的には、式(1.2.10)で、初期条件が $\theta_0 = 0$ であるならば、 $dW = 0$ となる。このことは、ぶらんこが当初 $\theta_0 = 0$ に静止していた場合には、如何に人が激しくぶらんこをこぐ動作を行っても、ぶらんこは $\theta_0 = 0$ に静止したままであることを意味する。つまり、パラメトリック増幅が不可能である。

より一般的に言えば、ぶらんこの振れ角 θ を一般化座標 q と捉え、ぶらんこの角運動量を一般化運動量 p と捉え、ぶらんこの力学的エネルギーが最も低い最低エネルギー状態である $p = 0$ かつ $q = 0$ の状態においては、パラメトリック増幅が不可能である。

また、マクロな古典力学系であるぶらんこにおいては、実際に、 $q = 0$ かつ $p = 0$ の状態が存在し得る。以上のように、パラメトリック増幅を生じさせるためには、初期条件として系が何らかのエネルギーを有していなければならない。

1.2.3 光学におけるパラメトリック増幅

次に、以上述べたパラメトリック増幅の条件に対して量子効果がどのように寄与するかを述べるために、量子効果が発現しうるパラメトリック増幅の具体例として、光パラメトリック増幅 (OPA: optical parametric amplification) について説明する。

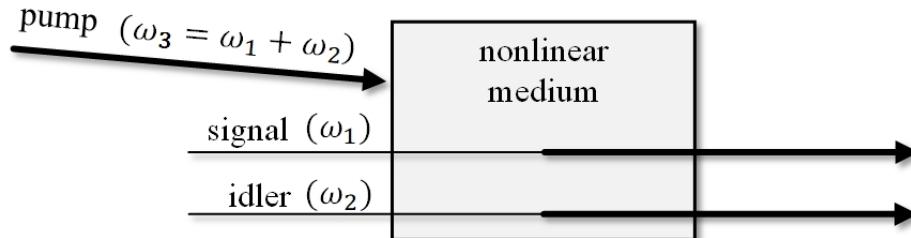


図 1.3: 光パラメトリック増幅の概念図。

図 1.3 に、光パラメトリック増幅の概念図を示す。角周波数 ω_1 のシグナル光、角周波数 ω_2 のアイドラー光、及び角周波数 ω_3 のポンプ光が、それぞれ非線形光学媒質 (nonlinear medium) に入射する。そして、非線形光学媒質の内部において、ポンプ光によりシグナル光及びアイドラー光が増幅される。

但し、 $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ の関係が満たされる。 $\omega_1 = \omega_2$ である場合を特に縮退-光パラメトリック増幅といい、 $\omega_1 \neq \omega_2$ である場合を特に非縮退-光パラメトリック増幅という。以下、非縮退-光パラメトリック増幅のメカニズムを述べる。

非線形光学媒質に光が入射すると、その光の電場が、非線形光学媒質中の電子を変位させる。これにより、非線形光学媒質における光が入射した部分に分極が生じる。分極とは、電気双極子モーメントの単位体積あたりの密度を表す。

光の電場は振動しているため分極も振動し、振動する分極が新しい光を発生させる。そして、その新しい光が再び非線形光学媒質に分極を生じさせる。このような近接作用の連鎖により、光が非線形光学媒質を伝播する。

分極の振幅が大きい程、その分極によって生成される上記新しい光の振幅が大きい。非線形光学媒質中でシグナル光及びアイドラー光が増幅される理由は、シグナル光及びアイドラー光が形成する分極の振幅を、ポンプ光が増大させるためである。

具体的には、非線形光学媒質に形成される分極 $P(z, t)$ は、シグナル光の電場を $A_1(z)$ 、アイドラー光の電場を $A_2(z)$ 、ポンプ光の電場を $A_3(z)$ としたとき、次のように書ける [11][12]:

$$\begin{aligned}
 P(z, t) = & \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_3 \omega_2}{n_3 n_2}} \varepsilon_0 \chi^{(2)} A_3(z) A_2^*(z) e^{-i\{\omega_1 t - (k_3 - k_2)z\}} + \text{c.c.} \right] \\
 & + \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_3 \omega_1}{n_3 n_1}} \varepsilon_0 \chi^{(2)} A_3(z) A_1^*(z) e^{-i\{\omega_2 t - (k_3 - k_1)z\}} + \text{c.c.} \right] \\
 & + \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_1 \omega_2}{n_1 n_2}} \varepsilon_0 \chi^{(2)} A_1(z) A_2(z) e^{-i\{\omega_3 t - (k_1 + k_2)z\}} + \text{c.c.} \right] \quad (1.2.12)
 \end{aligned}$$

但し、 z は光が伝播する方向つまり非線形光学媒質の長さ方向の位置を表し、 k_1, k_2, k_3 はそれぞれシグナル光の波数、アイドラー光の波数、ポンプ光の波数を表し、 $n_i (i = 1, 2, 3)$ は角周波数 ω_i における非線形光学媒質の屈折率を表し、 ε_0 は真空の誘電率を表し、 $\chi^{(2)}$ は非線形光学媒質の 2 次の非線形感受率 (nonlinear susceptibility) を表す。

分極 $P(z, t)$ を構成する第 1 項から第 3 項の各々の角周波数成分は、その角周波数成分もつ角周波数と同じ角周波数の光に寄与する。つまり、上式 (1.2.12) の第 1 項は新たなシグナル光 $A_1(z)$ の生成に寄与し、第 2 項は新たなアイドラー光 $A_2(z)$ の生成に寄与する。

また、既述のように、分極 $P(z, t)$ の角周波数成分の振幅が大きい程、その角周波数成分によって生成される光の振幅が大きい。従って、上式 (1.2.12) の第 1 項と第 2 項にポンプ光の振幅 $A_3(z)$ が掛け算されていることは、ポンプ光によって、シグナル光及びアイドラー光が増幅されることを意味する。即ち、ポンプ光は、分極を強めることにより“ぶらんこをこぐ”役割を果たす。

以上のように、ポンプ光によって分極が強められる結果、非線形光学媒質から出射するシグナル光及びアイドラー光の振幅はそれぞれ次のように書ける [11][12].

$$\begin{aligned}
 A_1(z) &= A_1(0) \cosh gz + A_2^*(0) \sinh gz \\
 A_2^*(z) &= A_1(0) \sinh gz + A_2^*(0) \cosh gz \quad (1.2.13)
 \end{aligned}$$

但し、 $z = 0$ は非線形光学媒質の入光側の端面の位置を表す。即ち、 $A_1(0), A_2(0)$ は、それぞれシグナル光、アイドラー光の、非線形光学媒質への入力の高さを表す。また、 g は、ポンプ光の振幅 $|A_3(z)|$ に比例する実数であり、利得パラメータと呼ばれる。

なお、上式 (1.2.13) の左辺に示す $A_1(z)$ 及び $A_2(z)$ は、いずれも gz に関して単調増加関数である。従って、 gz は増幅の程度を表すパラメータである。このことは、ポンプ光の強度が強いほど、また非線形光学媒質が長尺であるほど、非線形光学媒質から出射するシグナル光及びアイドラー光の強度が大きいことを意味する。

1.2.4 真空揺らぎのパラメトリック増幅

光パラメトリック増幅を生じさせる条件について検討する．古典力学系においては，一般化座標が $q = 0$ であり，かつ一般化運動量が $p = 0$ の最低エネルギー状態は，パラメトリック増幅することが不可能であった．

光パラメトリック増幅においては，初期条件としてのシグナル光及びアイドラー光のエネルギーが最も低い最低エネルギー状態とは，シグナル光及びアイドラー光を非線形光学媒質に積極的に入射させないケースに相当する．シグナル光とアイドラー光との各々の \cos 成分の振幅を一般化座標 q とみなし， \sin 成分の振幅を一般化運動量 p とみなすと，最低エネルギー状態とは， $q = 0$ かつ $p = 0$ の状態を指すようにみえる．そして，仮に， $q = 0$ かつ $p = 0$ より，式 (1.2.13) において $A_1(0) = 0$ かつ $A_2(0) = 0$ が成立するならば，非線形光学媒質からはポンプ光のみが出射し，シグナル光及びアイドラー光の出射は無いと言える．この点の真偽について，以下に述べる．

マクロな質点の振る舞いは古典力学で記述されるが，光の振る舞いは，厳密には量子論で記述される．そこで，光パラメトリック増幅のケースを量子論で扱うために，古典力学にはない，量子論の根本的な要請について説明する．

即ち，量子論は，一般化座標 q と一般化運動量 p を，

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad (1.2.14)$$

なる正準交換関係 (canonical commutation relation) を満たすエルミート演算子に置き換えることを要請する．そして，この正準交換関係 (1.2.14) より，一般化座標の不確定さ δq と，一般化運動量の不確定さ δp との間に，

$$\delta q \delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1.2.15)$$

なる不確定性関係 (uncertainty relation) が成立することが導出される (付録 A 参照)．ここで，一般化座標の不確定さ δq とは，具体的には，一般化座標 q の測定値の標準偏差， $\delta q := \sqrt{\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2}$ を指す．一般化運動量の不確定さ δp についても同様である．

不確定性関係 (1.2.15) によれば，一般化座標 q と一般化運動量 p の両方の値が定まっている状態というのは原理的にあり得ない．光について言えば，たとえ光がエネルギーの最も低い最低エネルギー状態にあっても，その光の \cos 成分の振幅である一般化座標 q と \sin 成分の振幅である一般化運動量 p とが共にゼロに確定するということが，原理的にあり得ない．

最低エネルギー状態でも一般化座標 q と一般化運動量 p とが定まった値をもたないので，光の場合は，直観的にはあたかもゆらゆらと微小に振動しているようなものである¹．このことを指してゼロ点振動 (zero point oscillation) 又は真空揺らぎ (vacuum fluctuations) という．また，光の場合は，基底状態においても，ゼロ点エネルギー (zero point) と呼ばれるエネルギーを有することが示される．

¹但し，式 (1.2.15) は，あくまでも測定した場合に測定結果がばらつくと述べているにすぎない．測定前に，質点に対応するものの実在を想定し，それが振動したり揺らいだりしていると理解することは，コペンハーゲン解釈とは相容れないと考える．

なお、実際に真空揺らぎの存在を裏付ける自然現象の最たる例として、原子の自然放出 (spontaneous emission) が知られている。自然放出とは、励起状態にある原子が、自己への入射光の有無とは無関係に、光子を放出する現象である。この現象は、原子が場の真空揺らぎと相互作用したことにより誘導放出を起こしたと解釈することで初めて説明される。

以上のように、光の場は、最低エネルギー状態でもゼロ点振動及びゼロ点エネルギーを有する。このため、光の場は、基底状態からでもパラメトリック増幅が可能である。

具体的には、上の議論に戻ると、量子論によれば、式 (1.2.13) で $A_1(0) = 0$ かつ $A_2(0) = 0$ ということがそもそもあり得ない。非線形光学媒質に対してシグナル光及びアイドラー光を積極的に入力しなくても、非線形光学媒質には、真空状態のシグナル光及びアイドラー光が入力されていると考えなければならない。そして、その場合でも、真空状態のゼロ点振動が増幅された結果として、シグナル光とアイドラー光が出力される。なお、このようにして、積極的な入力なしで、シグナル光及びアイドラー光の出力を得る非縮退-光パラメトリック過程を、特に、パラメトリック下方変換 (parametric down conversion) という。

パラメトリック下方変換によって得られるシグナル光 A とアイドラー光 B との量子状態は、下式で表される。なお、下式では、ぶらんこをこぐ役割を果たすポンプ光の存在は度外視している。

$$|\text{EPR}\rangle_{AB} = \frac{1}{\cosh(r)} \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^n(r) |n\rangle_A \otimes |n\rangle_B \quad (1.2.16)$$

但し、式 (1.2.13) に示した gz を r と置いた。この増幅の程度を表すパラメータ r は、スクイーミングパラメータ (squeezing parameter) と呼ばれている。

上式 (1.2.16) は、シグナル光 A とアイドラー光 B とが量子力学的にもつれ合っていることを表し、そのもつれ合いのことを量子エンタングルメントと呼ぶ。また、上式 (1.2.16) のように表される量子状態をエンタングル状態 (entangled state) という。

既述のように、この量子エンタングルメントこそが、古典的な情報処理に対する優位性を量子情報処理にもたらす根源である。これは量子エンタングルメントが、量子相関と呼ばれる性質をもつことによる。そこで、以下、量子相関について具体的に説明する。

1.3 量子エンタングルメントの量子相関

上式 (1.2.16) は、無限準位系のエンタングル状態を表す。以下では、簡単のために、有限の d 準位系のエンタングル状態について述べる。また、スクイーミングパラメータ r が無限大である理想的な極限について述べる。そのような極限におけるエンタングル状態は、特に最大エンタングル状態と呼ばれる。それぞれ d 準位系よりなる 2 つの量子系 A と B との最大エンタングル状態 $|\Psi\rangle_{AB}$ は、次のように書ける：

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=0}^{d-1} |n\rangle_A \otimes |n\rangle_B \quad (1.3.1)$$

式(1.3.1)によれば, 次のことが分かる. 一方の量子系 A に対し, 基底の集合 $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots\}$ のうちのどれであるかを定める量子測定を行い, 測定結果 $|m\rangle_A$ を得たとする. すると, $|\Psi\rangle_{AB}$ が $|m\rangle_A \otimes |m\rangle_B$ に収縮する. この“収縮”とは, 式(1.3.1)の右辺が示す d 項の線形和 — この線形和を重ね合わせという — が, $n = m$ の特定の 1 つの項に確定することを指す.

従って, その場合, 他方の量子系 B の状態も, 量子測定で確認するまでもなく, $|m\rangle_B$ に確定する. 以上のように特定の 1 つの基底に関する相関を古典相関という.

さらに, 上述した特定の測定基底を所望の別の基底へと変換する任意の実直交行列を \hat{R} としたとき, 式(1.3.1)は次のように変形できる:

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{d}} \left(\hat{R} \hat{R}^T \otimes \hat{I} \right) \sum_{n=0}^{d-1} |n\rangle_A \otimes |n\rangle_B \\
 &= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i,j,n=0}^{d-1} \hat{R} \left(|i\rangle_A \langle j| \hat{R} |i\rangle_A \langle j| \right) |n\rangle_A \otimes |n\rangle_B \\
 &= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i,n=0}^{d-1} \hat{R} \left(|i\rangle_A \langle n| \hat{R} |i\rangle \right) \otimes |n\rangle_B \\
 &= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i,n=0}^{d-1} \hat{R} |i\rangle_A \otimes |n\rangle_B \langle n| \hat{R} |i\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} \hat{R} |i\rangle_A \otimes \hat{R} |i\rangle_B \tag{1.3.2}
 \end{aligned}$$

式(1.3.2)は, 任意の \hat{R} に対して成立する. 即ち, 量子系 A に対する測定基底としてどのような集合 $\{\hat{R}|0\rangle, \hat{R}|1\rangle, \hat{R}|2\rangle, \dots\}$ を選ぼうとも, 一方の量子系 A の状態が $\hat{R}|m\rangle_A$ に収縮すれば, 他方の量子系 B の状態も, 量子測定で確認するまでもなく, $\hat{R}|m\rangle_B$ に収縮する. このように任意の測定基底に関する相関を量子相関という [13].

この量子相関こそが, 古典力学にはない, 量子エンタングルメントの特質である. 量子相関は, 量子系 A と B とがたとえどれだけ離れていても失われない. このような量子相関をもつため, 量子エンタングルメントは, 量子情報処理における最も重要な資源として用いられる. 具体的には, 量子相関を巧みに利用することで, 任意の量子状態を遠隔地へ転送する量子テレポーテーション [14] [15] をはじめとした種々の量子情報処理が実現される.

1.4 ウンルー効果のパラメトリック下方変換との共通点

現状の量子情報処理では, 情報を保持する媒体に光子を用いる場合には, 上述した量子相関をもつ量子エンタングルメントを得るためにパラメトリック下方変換が行われる. パラメトリック下方変換とは, 既述のとおり, 真空 $|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B$ の揺らぎを増幅することにより, エンタングル状態 $|\Psi\rangle_{AB}$ のシグナル光 A とアイドラー光 B とを得る操作である.

一般に, エンタングル状態にある 2 つの量子系の各々は熱状態にあることが数学的に示さ

れる。従って、シグナル光 A とアイドラー光 B との各々は、パラメトリック下方変換によって真空から熱状態 (thermal state)² に増幅されたと言える。なお、パラメトリック下方変換では、真空から熱状態への増幅に必要なエネルギーの源は、ポンプ光にある。

本研究の対象とするウンルー効果は、以上説明したパラメトリック下方変換と物理的に等価である。以下、両者の共通点を整理する。

ウンルー効果とは、慣性系に静座している観測者 (以下、アリスという。) にとって真空にみえる場が、アリスに対して一様加速運動している観測者 (以下、ロブという。) にとっては、熱状態の場として観測されるというものである³。即ち、アリスにとっての真空がロブにとっての熱状態に増幅されるという意味で、ウンルー効果は、パラメトリック下方変換と等価である。なお、ウンルー効果では、真空から熱状態への増幅に必要なエネルギーの源は、ロブの一様加速運動にある。

また、パラメトリック下方変換でシグナル光 A とアイドラー光 B との間に量子エンタングルメントが形成されたのと同様、ウンルー効果は、着目している場が別の場との間に量子エンタングルメントを形成したことの帰結であるとみることができる [16]。

図 1.4 に示す時空図を参照し、具体的に説明する。ロブは、事象の地平面 (event horizon) で画定された場 “RIGHT” において一様加速運動をする。その結果、ロブは、場 “RIGHT” で熱状態を観測する。そして、ロブにとって場 “RIGHT” が熱状態となった理由は、場 “RIGHT” が、別の場 “LEFT” との間に量子エンタングルメントを形成したからであると説明される。つまり、場 “RIGHT” は、パラメトリック下方変換におけるシグナル光 A とアイドラー光 B との一方に対応し、場 “LEFT” は他方に対応する。

以上のように、ウンルー効果は、量子エンタングルメントを生成する機構 (以下、量子エンタングルメント生成機構という。) である点でも、パラメトリック下方変換と等価である。

1.5 ウンルー効果と他の量子エンタングルメント生成機構との関係

本節では、ウンルー効果と他の量子エンタングルメント生成機構との関係を整理する。

図 1.5 に、代表的な量子エンタングルメント生成機構を挙げた [8]。既述のように、ウンルー効果は、真空揺らぎを増幅するパラメトリック増幅というメカニズムにおいて、パラメトリック下方変換と共通している。つまり、ウンルー放射をみるために一様加速運動を行うことは、真空揺らぎをパラメトリック増幅することに相当する。

また、量子エンタングルメント生成機構には、ホーキング放射 (Hawking radiation) もある [17]。ホーキング放射とは、ブラックホールの事象の地平面の近傍で対生成した粒子対の一方が地平面の内側に落ち込み、他方が地平面の外部で熱放射を構成する現象である。

² 熱状態とは、ボース - アインシュタイン分布に従って粒子が検出される、黒体放射と等価な状態を指す。

³ 時間的長さ及び空間的長さが観測者の立場に依存して変化すると同様、場の量子状態も、観測者の立場に依存する。

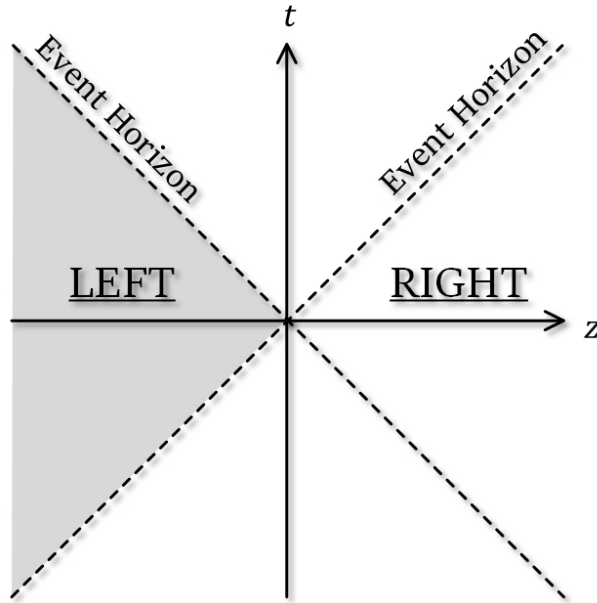


図 1.4: 事象の地平面 (Event Horizon) に跨った場の量子エンタングルメント. ウンルー効果によれば, 場 “RIGHT” と場 “LEFT” とがエンタングルする. 着色した領域には, 原理的にアクセス不可能である.

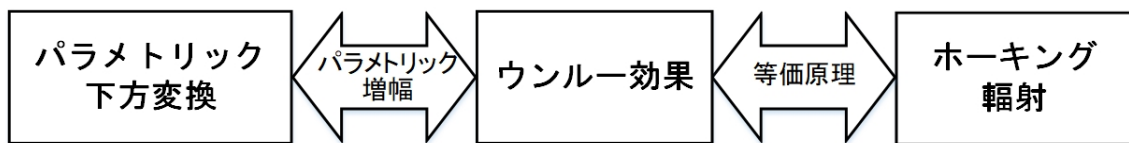


図 1.5: 代表的な量子エンタングルメント生成機構.

ホーキング放射は, 本質的には, 事象の地平面の内側と外側とがエンタングルしていることから説明される [18]. つまり, 重力による時空のゆがみによって, 量子エンタングルメントが生成されたと解される. ウンルー効果とホーキング放射は, ロブの運動の加速度と重力加速度とが区別できないという等価原理 (equivalence principle) により, 本質的には同じものである.

ウンルー効果及びホーキング放射で生成される量子エンタングルメントの特質を述べる. ウンルー効果及びホーキング放射は, 事象の地平面に跨った量子エンタングルメントを形成する. 従って, 量子エンタングルメントの対のうち, 事象の地平面の向こう側の場には, 原理的にアクセスできない. この点でウンルー効果は, ホーキング放射と共通する.

具体的には, ホーキング放射で生じる量子エンタングルメントの片割れは, ブラックホールの内側である. そして, ブラックホールの外側から内側にはアクセスできない. 同様のことがウンルー効果の場合にも言える. 即ち, 図 1.4 に示したように, ウンルー効果で生じる量子エンタングルメントの片割れは, 左リンドラーくさび状領域と呼ばれる場 “LEFT” である. そして, 場 “LEFT” と場 “RIGHT” との間には事象の地平面が介在する. このため, ロブの運動の舞台である場 “RIGHT” からみて, 場 “LEFT” にはアクセスできない.

1.6 本論文の目的

これまで、相対論的な効果が無視できない一様加速運動下で行われる量子情報処理を解析した事例が種々みられる [3] [4] [5] [6] [7]. しかし、それらのいずれもが予め準備した量子エンタングルメントを用いたものであり、ウンルー効果については、単にデコヒーレンスをもちやすき要因としてのみ位置づけられてきた。ウンルー効果そのものを有効活用した事例はこれまでみられない。既述のように、ウンルー効果で生成される量子エンタングルメントの片割れは、原理的にアクセス不可能な場“LEFT”に存在する。つまり、ウンルー効果で直接的に形成される量子エンタングルメントは利用可能な形態を有していない。このことが、これまでウンルー効果が活用に使われていない理由であると思われる。

しかし、その一方で、ウンルー効果と物理的に等価なパラメトリック下方変換は、必須と言えるほど重要な操作として活用されている。それゆえ、ウンルー効果もパラメトリック下方変換と同様、量子情報処理に有効活用できる可能性を秘めていると考えられる。また、ウンルー効果は、ホーキング放射をもたらすブラックホールのように強い時空のゆがみを必要としないので、将来的に実現される可能性は否定できないと思われる。本研究では、以上説明した動機に基づいてウンルー効果の活用方法を模索した。

本論文の目的は、ウンルー効果の量子情報科学への活用方法を提案することである。

1.7 本論文の構成

本章の最後に、本論文の次章以降の構成を述べる。

第2章から第4章にわたり、まず、ウンルー効果のメカニズムを数学的に調べる。具体的には、第2章で、アリスにとっての真空を数学的に定義し、第3章では、ロブにとっての真空を数学的に定義する。第4章では、それら2つの真空の関係を調べることにより、アリスにとっての場の状態と、ロブにとっての場の状態との関係を表すボゴリューボフ変換と呼ばれる写像を導く。その結果、ウンルー効果が、アリスにとっての真空をロブにとっての熱状態へと時間発展させるユニタリー演算子 \hat{G} で表されることが分かる。

第5章では、ユニタリー演算子 \hat{G} がアリスにとっての真空とロブにとっての熱状態とを数学的につなぐ役割を果たしていることに着目し、ロブが観測する熱状態をアリスにも観測させる量子チャンネルの形成が原理的に可能であることを述べる。

第6章では、その量子チャンネルの存在下、ロブが、ウンルー放射を構成するボース粒子を量子測定すると、その測定に伴う波束の収縮を表す世界線が、時空図上で閉ループを描くことを示す。その閉ループは、閉じた時間的曲線と呼ばれる。さらに、その閉じた時間的曲線を、量子エンタングルメントの形成に活用する手法を述べる。これにより形成される量子エンタングルメントは、ウンルー効果で直接的に形成されるものとは異なり、利用可能な形態を有するため、量子情報処理の資源となりうる。このように利用可能な形態の量子エンタングルメントの形成にウンルー効果を活用することが、本論文の主要な提案事項である。

第7章では、ウンルー効果を量子テレポーテーションに活用する事例を示す。

第8章では、本論文を総括し、結論を述べる。

第2章 慣性系からみたフォック状態の定義

既述のように、ウンルー効果とは、慣性運動をしているアリスにとっての真空が、アリスに対して一様加速運動をしているロブにとっては黒体放射にみえる、という現象である。本章以降では、ウンルー効果のメカニズムを具体的に調べる。

そのために“場”という概念を導入する。場は、数学的には、時間と空間との関数 $\phi(t, \mathbf{x})$ として定義され、時空の各点に物理量が分布している状況を表す。物理量としては、スカラー量、ベクトル量、及びテンソル量が挙げられるが、ここでは簡単のため、実数のスカラー量で表されるものとする。このような場は、特に実スカラー場と呼ばれている。場は、端的に言って、波動が伝播する舞台である。“波動”とは、上記物理量の時間的及び空間的な変動を指す。種々の物理現象は、波動の伝播に基づく近接作用によって説明される。つまり、場は、種々の物理現象を説明するための、時空のモデルである。その時空のモデルを用いて、ウンルー効果のメカニズムを調べようという訳である。

ミクロな視点に立つ場合、場を伝播する波動は、量子化により粒子としての側面を有する。波動がもつエネルギーの大きさは、粒子の数で表される。また、不確定性原理によれば、波動のエネルギーは揺らぐ。この揺らぎは、粒子数の増減として解釈できる。このため、場は、粒子が生成したり消滅したりする舞台であるとも言える。それゆえ、場の状態は、粒子の数を表すフォック状態で指定される。フォック状態は、数学的には、ヒルベルト空間としてのフォック空間を張るベクトルである。アリスがみる真空とは、フォック状態における粒子数がゼロの特別な場合（以下、真空状態という。）であり、ロブがみる黒体放射とは、ランダムな粒子数の統計分布を有する、フォック状態の確率的混合である。

ウンルー効果の意味するところは、アリスにとっての真空状態が、ロブにとっては真空状態でないということである。つまり、真空は、観測者の視点に異存する概念であり、どのような状態を真空と定めるかによって、その上に作られるフォック空間も異なってくる。即ち、アリスにとってのフォック空間と、ロブにとってのフォック空間とは異なる。本章では、アリスにとってのフォック空間を定義する。

2.1 クライン・ゴールドン方程式

場を表す関数 $\phi(t, \mathbf{x})$ は、上述した波動の振幅を表す。従って、例えば電場 $E(t, \mathbf{x})$ が電波をも表すのと同じ理由で、場 $\phi(t, \mathbf{x})$ を波動そのものとみることができる。フォック空間の定義には、この波動としての場 $\phi(t, \mathbf{x})$ が従う波動方程式—クライン・ゴールドン方程式と呼ばれる—が用いられる。そこで、以下、同じく波動方程式として知られるシュレーディンガー方程式の創出過程に倣い、クライン・ゴールドン方程式を定式化する。

シュレーディンガー方程式, $i\hbar \partial\phi/\partial t = -\hbar^2\nabla^2\phi/(2m)$ は, エネルギーと運動量との間の分散関係¹, $E = \mathbf{p}^2/(2m)$ を出発点とし, エネルギー E を演算子 $i\hbar\partial/\partial t$ に, また, 運動量 \mathbf{p} を演算子 $-i\hbar\nabla$ にそれぞれ置き換えることにより得られる.

しかし, シュレーディンガー方程式は, 空間座標 \mathbf{x} については2階微分 ∇^2 を含む一方, 時間座標 t については1階微分 $\partial/\partial t$ しか含まない点で, 時間と空間とを同等に扱っていない. このため, シュレーディンガー方程式は, 時間と空間とを同等に扱うことを大前提する相対論とは両立しない.

一方, 粒子を記述するミクロな世界においても, マクロな世界と同様に, 相対論が有効であると考えるのが自然である [22]. このため, 相対論の根幹をなす不変性の原理 (invariance principle) [21] に基づいて, 相対論的不変性 (relativistic invariance), 即ち共変性 (covariance) を, 波動方程式に要請したい. ここで共変性とは, 座標変換によって方程式が形を変えないことをいう. そこで, 共変性を有する次の分散関係を出発点とする:

$$\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2 \quad (2.1.1)$$

上式 (2.1.1) の左辺は, 4元運動量 $p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$ の内積 $p_\mu p^\mu = \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$ に相当するため², スカラーである. 上式 (2.1.1) の右辺も明らかにスカラーである. 従って, 分散関係 (2.1.1) は共変性を有する. なお, 先に述べたシュレーディンガー方程式の出発点とした分散関係 $E = \mathbf{p}^2/(2m)$ は, E と \mathbf{p} の次数が異なる点で4元運動量 p^μ の関係を記述したものでなく, しかも E と \mathbf{p} の各々はスカラーでないため, 明らかに共変性を有しない.

次に, シュレーディンガー方程式を得る過程の自然な拡張として, 上式 (2.1.1) の左辺に相当する内積 $p^\mu p_\mu$ を構成している4元運動量を, 次の4元運動量演算子に置き換える:

$$p^\mu \implies i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} := \partial^\mu = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial(ct)}, -i\hbar\nabla \right) \quad (2.1.2)$$

$$p_\mu \implies i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} := \partial_\mu = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial(ct)}, i\hbar\nabla \right) \quad (2.1.3)$$

そして, 上記の置き換え (2.1.2) 及び (2.1.3) が施された分散関係 (2.1.1) の両辺を, 場 $\phi(t, \mathbf{x})$ に作用させる. これにより, 次のクライン・ゴールドン方程式を得る:

$$\left(\square + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right) \phi(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (2.1.4)$$

上式 (2.1.4) において, ダランベルシアン $\square = (\partial/c\partial t)^2 - \Delta$ は, 微分演算子ベクトルの内積 $\partial^\mu \partial_\mu$ に等しいから, スカラーである. また, 物理量 m , c , \hbar はいずれもスカラーである. また, 場 $\phi(t, \mathbf{x})$ は, 本章の冒頭で述べたように, 時空の各点にスカラー量に対応させたもの, 即ちスカラー場であるとする. 従って, 上式 (2.1.4) は, 相対論的に共変である.

¹ 一般に角振動数と波数との関係式を分散関係という. 量子論では, 角振動数 ω はエネルギー E/\hbar と関係し, 波数 \mathbf{k} は運動量 \mathbf{p}/\hbar と関係するので, エネルギーと運動量との間の関係式は分散関係に他ならない.

² 本論文では, ミンコフスキー計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ を $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ とする.

2.2 場のモード展開

以下では、光速 c と換算プランク定数 \hbar とを、それぞれ $c = 1$, $\hbar = 1$ にとる自然単位系を採用する。このことは、粒子の速さや運動量を c と \hbar を単位として測ることを意味する。

また、簡単のため以下では、空間については 1 次元のみを考える。このため、 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ の表記を x に置き換える。ミンコフスキー計量テンソルは、 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ となる。

まず、場 $\phi(t, x)$ の数学的な構成を調べるために、場 $\phi(t, x)$ を、異なる波数 k に関して正規直交完全系を張る平面波 $\{e^{ikx}\}$ で展開する：

$$\phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \phi_k(t) e^{ikx} dk \quad (2.2.1)$$

既述のとおり、いま空間については 1 次元 x のみを考えているので、波数 k は、波数ベクトルの x 成分の大きさを表す。上式 (2.2.1) は、場 $\phi(t, x)$ の空間成分である x 成分を、波数 k の関数 $\phi_k(t)$ に写すフーリエ変換に相当する。

場 $\phi(t, x)$ の展開式 (2.2.1) の右辺をクライン・ゴールドン方程式 (2.1.4) に代入すると、展開係数 $\phi_k(t)$ が、各々の波数 k について、次式を満たさなければならないことが分かる。

$$\frac{d^2}{dt^2} \phi_k(t) + \omega_k^2 \phi_k(t) = 0 \quad (2.2.2)$$

但し、角周波数 ω_k は、次式で定義される。

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2} \quad (2.2.3)$$

上式 (2.2.2) は調和振動子の運動方程式と同じ形をしている。この意味で、場 $\phi(t, x)$ は、無限個の調和振動子の集まりであるということが出来る。

但し、調和振動子の運動への、質量 m の寄与の仕方は、マクロ世界の場合とは異なる点には注意を要する。即ち、上式 (2.2.3) で m は、分散関係 (2.1.1) に起源を有することから分かるように、波動を量子化した粒子の質量である。マクロな調和振動子では、角振動数が $1/\sqrt{m}$ に比例することから分かるように、振子の質量 m は振動のしにくさを表す。これに対し、上式 (2.2.3) の定義によれば、粒子の質量 m が大きい程、角振動数も大きくなる。これは、相対論が教示する質量とエネルギーとの等価性により、質量 m が大きい程、振動のエネルギーが大きいことに起因する。

式 (2.2.2) の一般解は、

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (a_{k,M} e^{-i\omega_k t} + a_{-k,M}^* e^{i\omega_k t}) \quad (2.2.4)$$

である。ここで、 $a_{k,M}$ と $a_{-k,M}^*$ は、振動の振幅を表す複素数の定数である。この式 (2.2.4) を、元の式 (2.2.1) に代入することにより、次式を得る：

$$\phi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}} \int a_{k,M} e^{-i(\omega_k t - kx)} + a_{-k,M}^* e^{i(\omega_k t + kx)} dk \quad (2.2.5)$$

さらに、この式の表記を整えるために、上式(2.2.5)の第2項の k を $-k$ に置き換えることにより、次式を得る：

$$\phi(t, x) = \int a_{k,M} \cdot f_{k,M} + a_{k,M}^* \cdot f_{k,M}^* dk \quad (2.2.6)$$

但し、モード関数 $f_{k,M}$ を次式で定義した。

$$f_{k,M} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}} e^{-i(\omega_k t - kx)} \quad (2.2.7)$$

以上のように、場 $\phi(t, x)$ をモード関数 $f_{k,M}$ 及びその複素共役で展開した式(2.2.6)を、場 $\phi(t, x)$ のモード展開という[20]。また、歴史的経緯から、モード関数 $f_{k,M}$ は正振動数モード関数と呼ばれており、その複素共役 $f_{k,M}^*$ は負振動数モード関数と呼ばれている。この理由は、後の2.4節で述べる。

2.3 クライン・ゴルドン内積の定義

後に第4章の計算で使用するため、ここで、任意の関数 $f(t, x)$, $g(t, x)$ に対して次のクライン・ゴルドン内積 (Klein-Gordon inner product) を定義しておく[19][18][21]：

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &:= i \int dx f^*(t, x) \overleftrightarrow{\partial}_0 g(t, x) \\ &= i \int dx \left[f^*(t, x) \frac{\partial g(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial f^*(t, x)}{\partial t} g(t, x) \right] \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

この定義を用いると、上述した正振動数モード $f_{k,M}$, 負振動数モード $f_{k,M}^*$ は、次の正規直交関係を満たすことが確かめられる：

$$\langle f_{k,M}, f_{k',M} \rangle = \delta(k - k'), \quad \langle f_{k,M}, f_{k',M}^* \rangle = 0 \quad (2.3.2)$$

このことから、モード展開(2.2.6)は、場 $\phi(t, x)$ を、正規直交完全系を張る正振動数モード関数 $f_{k,M}$ 及び負振動数モード関数 $f_{k,M}^*$ によって展開したものとみることができる。

2.4 場の量子化とフォック空間の定義

式(2.2.6)の左辺を、量子力学でいうところの波動関数とみなすと、負のエネルギーをもつ粒子の存在を認めねばならないといった問題が生じる。具体的には、式(2.2.6)の右辺第2項を構成する負振動数モード関数 $f_{k,M}^*$ は、固有方程式、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f_{k,M}^* = \frac{-\hbar\omega_k}{\sqrt{4\pi\omega_k}} f_{k,M}^*$$

が表すように、エネルギー演算子に対して負のエネルギー固有値を示す。従って、負振動数モード関数 $f_{k,M}^*$ を波動関数とみなす場合、負振動数モード関数 $f_{k,M}^*$ は、負のエネルギーをもつ粒子の確率振幅を与えることとなる。これが、モード関数 $f_{k,M}^*$ を“負振動数”モード関数と呼ぶ理由である。

仮に、負のエネルギーをもつ粒子が存在するならば、正のエネルギーをいくらでも放出し、いくらでも低いエネルギー状態へ落ち込むことができる。この結果、すべての状態は不安定となる。これは物理的に受け入れ難い状況である。

こういった難点は、以下に述べる解釈を採ることにより解決をみる [19][18][21]。以下に述べる解釈は、1927年にディラック、ヨルダン、クライン、ウィグナーらによって示されたものであり、現状、種々の実験結果と整合しており、自然界の真理を表すと考えられている。

まず、場 $\phi(t, x)$ そのものを演算子 $\hat{\phi}(t, x)$ とみなし、これに伴って式 (2.2.6) の右辺の展開係数 $a_{k,M}$, $a_{k,M}^*$ をそれぞれ演算子 $\hat{a}_{k,M}$, $\hat{a}_{k,M}^\dagger$ とみなす。以下に、演算子化した式 (2.2.6) を改めて掲げる：

$$\hat{\phi} = \int \hat{a}_{k,M} \cdot f_{k,M} + \hat{a}_{k,M}^\dagger \cdot f_{k,M}^* dk \quad (2.4.1)$$

このモード展開 (2.4.1) は、場をハイゼンベルグ表示したものである。従って、本来ならば、場を $\hat{\phi}(t, x)$ と表記すべきであるが、簡潔化のために $\hat{\phi}$ と表記した。

そして、このモード展開 (2.4.1) における展開係数としての演算子 $\hat{a}_{k,M}^\dagger$ 及び $\hat{a}_{k,M}$ に対し、次の交換関係を要請する：

$$[\hat{a}_{k,M}, \hat{a}_{k',M}^\dagger] = \delta(k - k'), \quad [\hat{a}_{k,M}, \hat{a}_{k',M}] = [\hat{a}_{k,M}^\dagger, \hat{a}_{k',M}^\dagger] = 0 \quad (2.4.2)$$

また、これら演算子 $\hat{a}_{k,M}^\dagger$ 及び $\hat{a}_{k,M}$ の作用を受ける状態ベクトルとして、粒子数を表すフォック状態を定義する。波数が k 、即ち運動量が $\hbar k$ の粒子が n 個存在することを表すフォック状態を、 $|n_k\rangle_M$ と表記する。ここで添え字の M は、ミンコフスキー時空を表す。

一方の演算子 $\hat{a}_{k,M}^\dagger$ は、フォック状態 $|n_k\rangle_M$ を次のように変化させるものと解釈する：

$$\hat{a}_{k,M}^\dagger |n_k\rangle_M = \sqrt{n+1} |(n+1)_k\rangle_M \quad (2.4.3)$$

つまり、演算子 $\hat{a}_{k,M}^\dagger$ は、運動量が $\hbar k$ の粒子を1つだけ増やす作用をもつ。それゆえ、演算子 $\hat{a}_{k,M}^\dagger$ は、生成演算子と呼ばれる。

他方の演算子 $\hat{a}_{k,M}$ は、フォック状態 $|n_k\rangle_M$ を次のように変化させるものと解釈する：

$$\hat{a}_{k,M} |n_k\rangle_M = \sqrt{n} |(n-1)_k\rangle_M \quad (2.4.4)$$

つまり、演算子 $\hat{a}_{k,M}$ は、運動量が $\hbar k$ の粒子を1つだけ減らす作用をもつ。それゆえ、演算子 $\hat{a}_{k,M}$ は、消滅演算子と呼ばれる。

どの運動量の粒子も存在しない状態が場の基底状態である。その状態を $|0\rangle_M$ と表記し、真空状態と呼ぶ。具体的には、アリスにとっての真空状態 $|0\rangle_M$ は、次式で定義される：

$$\hat{a}_{k,M} |0\rangle_M = 0, \quad \forall k \quad (2.4.5)$$

この真空状態 $|0\rangle_M$ に対して生成演算子 $\hat{a}_{k,M}^\dagger$ を任意回作用させたものの線形結合で、すべての物理的に実現可能な状態ベクトルが得られる。そのような状態ベクトルによって張られるヒルベルト空間をフォック空間という。以上のように、消滅演算子 $\hat{a}_{k,M}$ と $\hat{a}_{k,M}^\dagger$ とを導入したことにより、慣性系のアリスからみたフォック空間が定義された。以下では、このフォック空間をミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I と呼ぶことにする。

例えば、運動量が $\hbar k_s$ の粒子が n_{k_s} 個存在する状態（但し、 $s = 1, 2, 3 \dots$ ）は、次のように表される：

$$|n_{k_1}, n_{k_2}, n_{k_3} \dots\rangle = \left[\prod_s \frac{(\hat{a}_{k_s, M}^\dagger)^{n_{k_s}}}{\sqrt{n_{k_s}!}} \right] |0\rangle_M \quad (2.4.6)$$

なお、交換関係 (2.4.2) より、フォック状態は任意の2粒子の入れ換えに対して対称である：

$$|\dots 1_{k_x}, \dots, 1_{k_y} \dots\rangle = |\dots 1_{k_y}, \dots, 1_{k_x} \dots\rangle \quad (2.4.7)$$

このような性質をもつ粒子をボース粒子という。即ち、場 $\hat{\phi}(t, x)$ が表す粒子はボース粒子である。

2.5 クライン・ゴールドン方程式を導く作用積分

第2.1及び2.2節では、波動 $\phi(t, x)$ の粒子像としての粒子の質量をパラメータ m で表した。以下では、簡単のため、マッスレス (massless) の状況を考察の対象とする。即ち $m = 0$ とする。この場合、式 (2.1.4) は次のようになる。なお、既述のとおり $c = 1$ とした。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(t, x) = 0 \quad (2.5.1)$$

第2.1節で述べたとおり、このクライン・ゴールドン方程式 (2.5.1) 及びその元となった式 (2.1.4) は、エネルギーと運動量との分散関係 (2.1.1) に基づいて導出することができる。

一方、クライン・ゴールドン方程式 (2.5.1) は、ラグランジュ形式で定式化することもできる。ラグランジュ形式では、ラグランジアン密度 \mathcal{L} と呼ばれるスカラー量を出発点とする。ラグランジアン密度 \mathcal{L} の空間及び時間での積分を作用積分³ $S[\phi]$ といい、作用積分 $S[\phi]$ の変分をゼロとおくことにより、ラグランジュ方程式として、クライン・ゴールドン方程式を得る。

具体的には、クライン・ゴールドン方程式 (2.5.1) を導く作用積分は、次式で表される [19][20]：

$$S[\phi] = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4x = \int \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \right] \sqrt{-g} d^4x \quad (2.5.2)$$

ここで g は、計量テンソルの行列式である： $g = \det\{g_{\mu\nu}\}$ 。また、添え字 “ μ ” は、 x^μ に関する微分 ∂_μ を意味する⁴。

³ラグランジアン密度の空間積分をラグランジアンといい、ラグランジアンの時間積分を作用積分という。

⁴ 本来は共変微分 “ $;\mu$ ” であるが、いま考察の対象としている場はスカラー場なので、共変微分を通常の

残念ながら，上式 (2.5.2) のラグランジアン密度 \mathcal{L} を定める基本原理は存在しない．実際には，ラグランジアン密度 \mathcal{L} は，既知のクライン・ゴールドン方程式 (2.5.1) が導出されるように定められたものである [23]．では，式 (2.5.2) の作用積分 $S[\phi]$ を導入するメリットは何か？

第1のメリットは，作用積分 $S[\phi]$ はその共変性，特に，ローレンツ変換に対する共変性のみならず，一般座標変換に対する共変性までもが，一目瞭然である点にある．具体的には，式 (2.5.2) で，体積要素 $\sqrt{-g} d^4x$ は，一般座標変換に対して共変なスカラーとして定義されたものである [24][25]⁵．また，ラグランジアン密度 \mathcal{L} は，共変ベクトル $\phi_{,\mu}$ の内積で構成されるので，スカラーである．従って，式 (2.5.2) に示す作用積分 $S[\phi]$ は共変性を有する．

また，クライン・ゴールドン方程式は作用積分 $S[\phi]$ から導かれるので，クライン・ゴールドン方程式の共変性は，作用積分 $S[\phi]$ の共変性によって保証される [21]．従って，作用積分 $S[\phi]$ の共変性が明白であるということは，その作用積分 $S[\phi]$ から，相対論と整合する方程式が導かれることが，予め分かり易いということである．

第2のメリットは，慣性系に限らず，加速系を含む任意の座標系からの視点を，1つの作用積分 $S[\phi]$ で統一的に扱えるということである．或る座標系からみたクライン・ゴールドン方程式を得たければ，式 (2.5.2) の $g^{\mu\nu}$ として，その座標系の計量テンソルを採用すればよい．

例えば，慣性系のアリスの視点に立つ場合，式 (2.5.2) の $g^{\mu\nu}$ としてミンコフスキー計量テンソルを採用すればよい： $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ ．この場合， $\sqrt{-g} = 1$ となる．また，いまは2次元を考えているので， $d^4x \rightarrow dt dx$ と置き換える．これより，慣性系におけるクライン・ゴールドン方程式を導く作用積分が，次のとおりであることが分かる：

$$S[\phi] = \int \frac{1}{2} [(\partial_t \phi)^2 - (\partial_x \phi)^2] dt dx \quad (2.5.3)$$

上式 (2.5.3) に示す作用積分 $S[\phi]$ の変分をゼロとおくことで，クライン・ゴールドン方程式 (2.5.1) が導出される．なお，その導出の記載は省略する．既述のとおり，そもそもラグランジアン密度 \mathcal{L} そのものが，既知のクライン・ゴールドン方程式 (2.5.1) が得られるように定められたものだからである．

次章では，式 (2.5.2) から，一様加速系におけるクライン・ゴールドン方程式を定義する作用積分を求め，その作用積分を，式 (2.5.3) に示す作用積分と対比する．

2.6 まとめ

以上説明したように，本章では，まず，アリスに固定された慣性系におけるクライン・ゴールドン方程式 (2.1.4) を示し，それをを用いて，演算子化した場 $\hat{\phi}$ のモード展開 (2.4.1) を求めた．次に，そのモード展開 (2.4.1) の展開係数としての生成演算子 $\hat{a}_{k,M}^\dagger$ 及び消滅演算子 $\hat{a}_{k,M}$ を用いてフォック空間を定義した．

クライン・ゴールドン方程式 (2.1.4) を導く過程において，式 (2.1.1) の左辺を構成する内積 $p^\mu p_\mu$ を具体的には $\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$ として計算し，計量テンソルとしてミンコフスキー計量テンソ

微分に置き換えた．

⁵ 一般座標変換に対するヤコビアンが $\sqrt{-g'}/\sqrt{-g}$ であることによる．

ル $\eta_{\mu\nu}$ を採用したところに、アリスの視点が反映されている⁶. あるいは、全く等価なことであるが、式 (2.5.2) に示す作用積分 $S[\phi]$ の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ としてミンコフスキー計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ を採用することにより、アリスの視点が反映される.

従って、クライン・ゴールドン方程式 (2.1.4) 又は (2.5.1) に基づいて定義された生成演算子 $\hat{a}_{k,M}^\dagger$ 及び消滅演算子 $\hat{a}_{k,M}$ によって定義したフォック空間は、アリスからみた場の状態を表すものである. 次章では、ロブからみたフォック空間を定義する.

⁶ この場合、先に述べたように、ダランベルシアン \square の定義は、 $(\partial/c\partial t)^2 - \Delta$ となる. 仮に、一般の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を採用していたら、ダランベルシアン⁶の作用は、

$$\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\partial_\nu\phi) \quad (2.6.1)$$

となる [18][24]. この式における $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ の特別な場合を選び取るところにアリスの視点が反映される.

第3章 一様加速系からみたフォック状態の定義

前章では、慣性運動をするアリスにとってのフォック空間を定義した。その定義には、アリスの視点を表す慣性系を特徴付けるミンコフスキー計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ を用いた。

本章では、一様加速運動をするロブにとってのフォック空間を定義する。そのために、まず、第3.1–3.4節で、ロブの視点を表す座標系 — リンドラー座標系と呼ばれる — を定義し、かつそのリンドラー座標系を特徴付ける計量テンソルを求める。なお、第3.1–3.4節では、議論を明確化するために、光速を表す記号 $c = 1$ を明示することにする。

その後、第3.5節で、前章と同様に、リンドラー座標系を特徴付ける計量テンソルを用いて、ロブからみた場が従う運動方程式であるクライン・ゴールドン方程式を示し、それを用いて場のモード展開を求める。そして、第3.6節以降で、そのモード展開の展開係数である生成演算子及び消滅演算子を用いて、ロブにとってのフォック空間を定義する。

3.1 一様加速運動をするロブの世界線

本節から第3.2節までで、ロブの視点を表す座標系を求める。そのための第1ステップとして、本節では、加速度 a の一様加速運動をするロブの世界線を調べる。なお、本節から第3.2節までの議論は、文献 [26] の教示に基づいている。

まず、ロブの世界線を定式化するために、補助的に2つの座標系を導入する。

1つは、静止しているアリスに固定された慣性系であり、以下、静止慣性系 S と呼ぶ。静止慣性系 S は、アリスの視点を表す。静止慣性系 S の時間を t 、空間座標を x と表記する： $S(ct, x)$ 。簡単のため、空間については1次元のみを考えるものとする。

もう1つは、静止慣性系 S からみて、或る瞬間のロブと同じ速度 v をもつ慣性系であり、以下、局所慣性系 S' と呼ぶ。局所慣性系 S' は、静止慣性系 S に対して一定速度 v で移動しており、上記の或る瞬間に、ロブと重なる。局所慣性系 S' の時間を t' 、空間座標を x' と表記する： $S'(ct', x')$ 。但し、上記の或る瞬間には、局所慣性系 S' はロブに固定されているのだから、 t' は、その瞬間のロブの固有時間 τ に等しい： $t' = \tau$ 。

本節の目標は、アリスからみたロブの世界点を、ロブの固有時間 τ をパラメータとして表したもの $(ct(\tau), x(\tau))$ を求めることである。

まず、加速度 a の一様加速運動とは何か、その定義を確認する。相対論によれば、ロブの速度は光速を超えることはできない。従って、アリスの視点を表す静止慣性系 S からみて、ロブの速度が時間に比例して増加するような加速運動は物理的にあり得ないことに注意を要

する。一様加速運動とは、ロブの固有時間の経過に比例して、ロブ自身からみた速度が増加するような運動を指す。その比例定数は、ロブ自身が感じる加速度であり、ロブの固有加速度と呼ぶ。即ち、一様加速運動とは、ロブの固有加速度が一定値 a である運動を意味する。

具体的には、ロブの固有加速度は、次のように定義される。

$$\begin{aligned} a &= \text{局所慣性系 } S' \text{ からみたロブの速度の増加率} \\ &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx'}{d\tau} \right) \\ &:= \frac{dv'}{d\tau} \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

上式 (3.1.1) の右辺は、ロブにとっての微小固有時間 $d\tau$ の間に、局所慣性系 S' からみて、ロブの速度が 0 から dv' に増加したことを表す。一方、静止慣性系 S からみた場合には、ロブの微小固有時間 $d\tau$ の間に、ロブの速度が v から $v + dv$ に増加したとすると、特殊相対論における速度の合成則より、次式が成立する：

$$v + dv = \frac{v + dv'}{1 + \frac{v}{c^2} dv'} \tag{3.1.2}$$

上式 (3.1.2) より、静止慣性系 S からみたロブの速度の増加量 dv が次のように表される：

$$dv = \frac{dv' \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{1 + \frac{v}{c^2} dv'} \quad \doteq \quad dv' \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \tag{3.1.3}$$

但し、上式 (3.1.3) の右辺の第1式から第2式への移行において、第1式の分母中における因子 $(v/c^2)dv'$ は2次の微小量なのでゼロと近似した。

上式 (3.1.3) 中の dv' は、式 (3.1.1) より、 $dv' = ad\tau$ と書ける。また、その $d\tau$ は、特殊相対論における、静止慣性系 S からみた局所慣性系 S' の時間の遅れを表す関係式より、 $d\tau = dt\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ と表される。従って、式 (3.1.3) より、次式が成立する：

$$\begin{aligned} dv &\doteq adt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \\ \therefore \int adt &= \int \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} dv \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

上式 (3.1.4) の解は、 $at = v/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ + 積分定数である¹。積分定数を定めるために、 $t = 0$ で $v = 0$ という初期条件を課す。これにより、積分定数がゼロに定まり、 v が次のように定まる：

$$v = at\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{3.1.5}$$

¹ 式 (3.1.4) の右辺の積分は、例えば、 v/c を $\sin\theta$ と置く置換積分によって解くことができる。

以下、上式(3.1.5)を用い、アリスからみたロブの世界線の時間座標として、 t を τ で表した関係式を求める。既述の関係式、 $d\tau = dt\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ より、ロブの任意の固有時間 τ は、次のように v と t との関数として書ける：

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (3.1.6)$$

この式(3.1.6)に、上式(3.1.5)を変形して得られる v と t との関係式、

$$v^2 = \frac{a^2 t^2}{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} \quad (3.1.7)$$

を代入することにより、式(3.1.6)から v^2 を消去し、 τ と t との次の関係式が求まる：

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{a^2 t^2}{c^2 + a^2 t^2}} dt \quad (3.1.8)$$

この積分を解くことにより²、次式が求まる。

$$\tau = \frac{c}{a} \operatorname{arc} \sinh \left(\frac{at}{c} \right) \quad (3.1.9)$$

これより、アリスからみたロブの時間座標 t をロブの固有時間 τ で表した次式が求まる：

$$t(\tau) = \frac{c}{a} \sinh \left(\frac{a\tau}{c} \right) \quad (3.1.10)$$

次に、式(3.1.7)を用い、アリスからみたロブの世界線の空間座標として、 x を τ で表した関係式を求める。式(3.1.7)の両辺の平方根をとった次式、

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} \quad (3.1.11)$$

を積分することにより、 x と t との次の関係式が求まる：

$$x = \int at \left(1 + \frac{a^2 t^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{c^2}{a} \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} \quad (3.1.12)$$

但し、積分定数を定めるために、 $t = 0$ で $x = c^2/a$ という初期条件を課した。

そして、この式(3.1.12)の右辺中の t を、式(3.1.10)によって τ に変換することにより、アリスからみたロブの空間座標 x をロブの固有時間 τ で表した次式が求まる³：

$$x(\tau) = \frac{c^2}{a} \cosh \left(\frac{a\tau}{c} \right) \quad (3.1.13)$$

²公式 $\int 1/\sqrt{a^2 + x^2} dx = \operatorname{arc} \sinh(x/a)$ を用いる。

³公式 $1 + \sinh^2 \theta = \cosh^2 \theta$ を用いる。

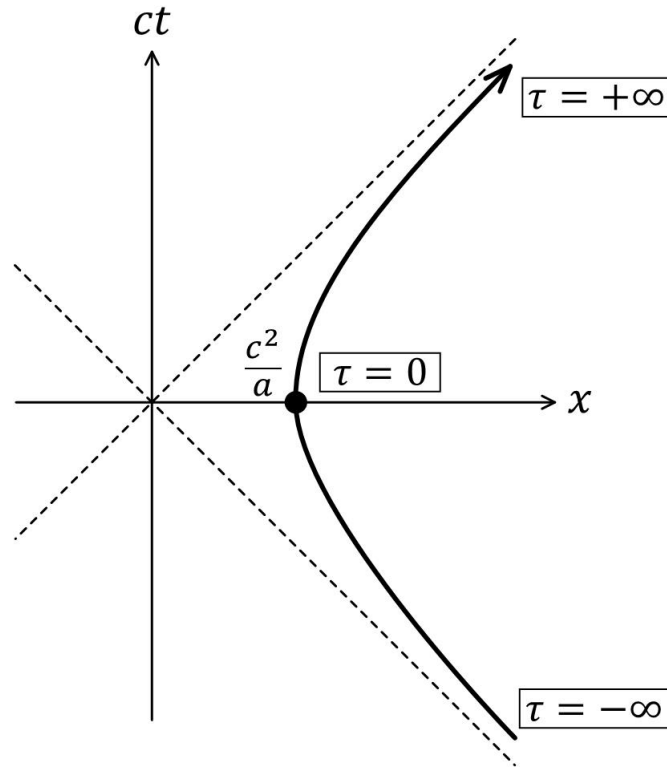


図 3.1: アリスからみたロブの世界線.

式 (3.1.10) 及び (3.1.13) は, t と x との間の次の関係式を満たす :

$$x^2(\tau) - \{ct(\tau)\}^2 = \frac{c^4}{a^2} \quad (3.1.14)$$

この式 (3.1.14) は, アリスからみたロブの世界線を, ロブの固有時間 τ を媒介変数として表したものである. 式 (3.1.14) に示すように, 世界線は双曲線の形をしている.

図 3.1 に, この双曲線を示す. ミンコフスキー時空, 即ち $x-ct$ 平面上において, ロブは $x = +\infty$ から減速しながら原点に近づいてきて, $x = c^2/a$ の瞬間に静止し, その後, 加速しながら $x = +\infty$ に戻ってゆく. 破線は光円錐を表す. ロブの世界線は $|\tau| \rightarrow \infty$ で光円錐に近づく. しかし, 一様加速度運動といえども光速には到達できない.

上記双曲線の導出過程で課した各初期条件について再確認する. 式 (3.1.12) の導出過程で課した初期条件 $x(t=0) = c^2/a$ は, 双曲線が x 軸と交わる点の座標が $x = c^2/a$ であることに表れている. 式 (3.1.5) の導出過程で課した初期条件 $v(t=0) = 0$ は, $t=0$ で双曲線の接線の傾きがゼロ, 即ちロブが $x = c^2/a$ の瞬間に静止することに表れている.

また, 式 (3.1.10) より, $t(\tau=0) = 0$ が得られ, これは, $\tau=0$ のとき $t=0$ となることを意味する. また, 式 (3.1.10) より, $dt/d\tau = \cosh(a\tau/c) > 0$ が得られ, これは, 図 3.1 において τ の増大と共に t も増大することに表れている.

3.2 一様加速運動をするロブの固有座標系

ロブからみた場がどのように記述されるかを調べるには、ロブの視点を表す座標系（以下、固有座標系と呼ぶ。）を定義することが必要である。本節では、この固有座標系を導入する。なお、固有座標系の時間座標は、既に導入したロブの固有時間 τ そのものである。以下では、固有座標系の空間座標を ξ と表記することにする。

本節の目標は、アリスからみた時間座標 ct と空間座標 x の各々を τ と ξ とで表したもの、 $ct(\tau, \xi)$, $x(\tau, \xi)$ を求めることである。

前の3.1節では、ミンコフスキー時空内を一様加速度運動するロブの世界線を求めた。式(3.1.10)及び(3.1.13)がそれを表す。しかし、式(3.1.10)及び(3.1.13)は、ロブの固有時間 τ と静止慣性系 $S(ct, x)$ との関係を記述するが、ロブによって測られる距離 ξ と静止慣性系 $S(ct, x)$ との関係は記述していない。そこでまず、ロブによって測られる距離 ξ が静止慣性系 $S(ct, x)$ でどのように表されるかを調べる。

ロブの位置を $\xi = 0$ にとる。即ち、ロブは $\xi = 0$ に静止しており、ロブの世界線は、ロブ自身から測った距離がゼロ ($\xi = 0$) の位置の世界線と考える。

ロブが、ロブ自身からみた長さ（以下、固有長さとして記す。）が ℓ のものさしの一端を持っているとする。固有座標系において、ものさしの一端の座標は $(\tau, \xi = 0)$ であり、他端の座標は $(\tau, \xi = \ell)$ とする。このものさしの他端（以下、先端という。）の、静止慣性系 $S(ct, x)$ での座標を求め、 ℓ を任意変数としての ξ に置き換えることで、 ξ と静止慣性系 $S(ct, x)$ との関係が求まる。

ローレンツ変換を利用するために、瞬間的にロブと重なる慣性系、局所慣性系 S'' を再び導入する。局所慣性系 S'' は、静止慣性系 S に対して速度 v で移動しているものとし、局所慣性系 S'' の時間座標を t'' 、空間座標を x'' と表記する。

なお、ここでいう速度 v は、固有座標系で $\tau = \tau$, $\xi = 0$ の座標位置に存在するロブの、アリスに対する速度である：

$$v = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{\tau=\tau, \xi=0} \quad (3.2.1)$$

計算の簡単化のために、局所慣性系 S'' がロブと重なる瞬間の t'' をゼロにとる。すると、局所慣性系 S'' において、ものさしの先端の座標は $(t'' = 0, x'' = \ell)$ と表される。従って、静止慣性系 S におけるものさしの先端の座標 $(c\Delta t, \Delta x)$ は、局所慣性系 S'' から静止慣性系 S へのローレンツ逆変換により求まる：

$$\begin{bmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{bmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \ell \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

静止慣性系 S の原点 $(ct = 0, x = 0)$ は、局所慣性系 S'' の原点 $(\tau = 0, x'' = 0)$ と一致している。従って、 $c\Delta t$ は、ミンコフスキー空間、即ち $x - ct$ 平面上における、ものさしの ct 軸方向の長さを表す。また、 Δx は、ミンコフスキー空間上における、ものさしの x 軸方向の長さを表す。

これより、

$$c\Delta t = \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \cdot \ell = \frac{\ell \cdot dx}{cdt\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{\ell}{c} \cdot \frac{d}{d\tau} x(\tau, 0) \quad (3.2.3)$$

また、

$$\Delta x = \frac{\ell}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{\ell \cdot dt}{dt\sqrt{1-(v/c)^2}} = \ell \cdot \frac{d}{d\tau} t(\tau, 0) \quad (3.2.4)$$

ミンコフスキー空間、即ち $x-ct$ 平面上において、ものさしの先端の時間座標 $ct(\tau, \xi)$ は、ロブの位置の時間座標 $ct(\tau, 0)$ に、ものさしの、 ct 軸方向の長さ $c\Delta t$ を加えたものである。また、ものさしの先端の空間座標 $x(\tau, \xi)$ は、ロブの位置の空間座標 $x(\tau, 0)$ に、ものさしの、 x 軸方向の長さ Δx を加えたものである：

$$ct(\tau, \xi) = ct(\tau, 0) + \frac{\ell}{c} \cdot \frac{d}{d\tau} x(\tau, 0) \quad (3.2.5)$$

$$x(\tau, \xi) = x(\tau, 0) + \ell \cdot \frac{d}{d\tau} t(\tau, 0) \quad (3.2.6)$$

ここで、ロブからみたものさしの長さ ℓ を任意の値 ξ へと一般化する。そして、上式における $ct(\tau, 0)$ として式(3.1.10)を代入し、 $x(\tau, 0)$ として式(3.1.13)を代入することにより、次式を得る：

$$\begin{aligned} ct(\tau, \xi) &= \frac{c^2}{a} \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) + \frac{\xi}{c} \cdot \frac{d}{d\tau} \left[\frac{c^2}{a} \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \right] \\ &= \left[\frac{c^2}{a} + \xi \right] \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

$$\begin{aligned} x(\tau, \xi) &= \frac{c^2}{a} \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) + \xi \cdot \frac{d}{d\tau} \left[\frac{c}{a} \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \right] \\ &= \left[\frac{c^2}{a} + \xi \right] \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

以上で、ロブの視点を表す固有座標系 (τ, ξ) が定まった。

3.3 右リンドラー座標系の導入

本節では、上述したロブの視点を表す固有座標系 (τ, ξ) を、その計量の対角成分が等しくなるようにスケール変換したものをリンドラー座標系として定義する。まず、固有座標系 (τ, ξ) での計量を調べるために、その線素 ds^2 を求める。線素 ds^2 はスカラーなので、慣性系での定義 $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$ と、上式(3.2.7)及び(3.2.8)とを用いて、固有座標系 (τ, ξ) での線素 ds^2 を求めることができる。そのための準備として次の計算を行う。

$$\begin{aligned}
 cdt &= \frac{\partial(ct)}{\partial\tau}d\tau + \frac{\partial(ct)}{\partial\xi}d\xi \\
 &= \left[c + \frac{a}{c}\xi \right] \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) d\tau + \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) d\xi \quad (\because \text{式 (3.2.7)}) \quad (3.3.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dx &= \frac{\partial x}{\partial\tau}d\tau + \frac{\partial x}{\partial\xi}d\xi \\
 &= \left[c + \frac{a}{c}\xi \right] \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) d\tau + \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) d\xi \quad (\because \text{式 (3.2.8)}) \quad (3.3.2)
 \end{aligned}$$

これらより $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2$ を計算する. その計算においては, $\{\text{式 (3.3.1)}\}^2$ と $\{\text{式 (3.3.2)}\}^2$ との交差項 $(\sinh(a\tau/c) \cosh(a\tau/c))$ の項 どうしがキャンセルするので, 公式 $\cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta) = 1$ を用いることにより, 固有座標系 (τ, ξ) での線素 ds^2 が次のように得られる.

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 = \left(c + \frac{a}{c}\xi \right)^2 d\tau^2 - d\xi^2 \quad (3.3.3)$$

この式 (3.3.3) をみると, $d\tau^2$ の係数と $d\xi^2$ の係数が等しくない. 即ち, 計量の対角成分が等しくない. そこで, 計量テンソルの対角成分が等しくなるようにするべく, 次の式 (3.3.4) を満たすような新しい空間座標 χ を導入する. なお, 計量テンソルの対角成分を等しくするメリットについては 3.5 節で述べる.

$$d\xi = \left(c + \frac{a}{c}\xi \right) d\chi \quad (3.3.4)$$

これにより, 線素において $d\tau^2$ の係数と $d\chi^2$ の係数が共に $(1 + a\xi/c)^2$ となり, 計量テンソルの対角成分を等しくすることができる. なお, 式 (3.3.4) より, 次のように χ が求まる.

$$\begin{aligned}
 d\chi &= \frac{1}{c + \frac{a}{c}\xi} d\xi \\
 \therefore \chi &= \frac{c}{a} \ln \left(c + \frac{a}{c}\xi \right) \quad (3.3.5)
 \end{aligned}$$

つまり, 新たな空間座標 χ は固有座標系の ξ 軸を対数スケールで表したものに相当する. このようにして固有座標系 (τ, ξ) の空間座標 ξ を式 (3.3.5) のようにスケール変換して得られる座標系 (τ, χ) を, リンドラー座標系と呼ぶ [20][18]. リンドラー座標系 (τ, χ) は, ロブに固定されているという意味で, 固有座標系 (τ, ξ) と同様に, ロブの視点を表す.

リンドラー座標系 (τ, χ) とミンコフスキー座標系 (t, x) との対応関係を求めるために, 式 (3.3.5) を次のように変形する:

$$c + \frac{a}{c}\xi = e^{\frac{a}{c}\chi} \quad (3.3.6)$$

上式(3.3.5)を用いることにより、ミンコフスキー座標系 (ct, x) の ct と x の各々を、リンドラー座標系 (τ, χ) の τ 及び χ によって表すことができる：

$$\begin{aligned} ct(\tau, \chi) &= \left[\frac{c^2}{a} + \xi \right] \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) && \text{(式(3.2.7)を再掲)} \\ &= \frac{c}{a} e^{\frac{a}{c}\chi} \sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) && (\because \text{式(3.3.6)}) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

$$\begin{aligned} x(\tau, \chi) &= \left[\frac{c^2}{a} + \xi \right] \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) && \text{(式(3.2.8)を再掲)} \\ &= \frac{c}{a} e^{\frac{a}{c}\chi} \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) && (\because \text{式(3.3.6)}) \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

また、リンドラー座標系 (τ, χ) での線素 ds^2 は、式(3.3.3)及び(3.3.4)と、式(3.3.6)とにより、次のように求まる：

$$\begin{aligned} ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 &= \left(c + \frac{a}{c}\xi\right)^2 (d\tau^2 - d\chi^2) \\ &= e^{\frac{2a}{c}\chi} (d\tau^2 - d\chi^2) \\ &= \begin{bmatrix} d\tau & d\chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\frac{2a}{c}\chi} & 0 \\ 0 & -e^{\frac{2a}{c}\chi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\tau \\ d\chi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

上記の最後の式より、リンドラー座標系 (τ, χ) での計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は、次のように書けることが分かる：

$$g_{\mu\nu} = e^{\frac{2a}{c}\chi} \eta_{\mu\nu} \quad (3.3.10)$$

3.4 左リンドラー座標系の導入

上式(3.3.7)及び(3.3.8)を通じて定義されたリンドラー座標系 (τ, χ) は、 τ と χ の各々を、 $\tau, \chi \in [-\infty, \infty]$ の範囲で動かしても、次ページの図3.2の R で示した領域（以下、右リンドラーくさび状領域という。）しか覆えない。この意味で、座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ は、右リンドラー座標系とも呼ばれる。

特に、式(3.3.8)で、 $\cosh(a\tau/c) \geq 1$ 、 $\exp(\frac{a}{c}\chi) \geq +0$ なので、慣性座標系 (ct, x) の空間座標 x は $+0$ から $+\infty$ の範囲しか変動し得ない。そこで、 x の、 -0 から $-\infty$ の範囲の変動を可能とするために、次式を通じて左リンドラー座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ を数学的に定義する [18]：

$$ct(\tilde{\tau}, \tilde{\chi}) = -\frac{c}{a} e^{\frac{a}{c}\tilde{\chi}} \sinh\left(\frac{a\tilde{\tau}}{c}\right) \quad (3.4.1)$$

$$x(\tilde{\tau}, \tilde{\chi}) = -\frac{c}{a} e^{\frac{a}{c}\tilde{\chi}} \cosh\left(\frac{a\tilde{\tau}}{c}\right) \quad (3.4.2)$$

左リンドラー座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ は、図3.2の L で示した領域（以下、左リンドラーくさび状領域という。）を覆う。

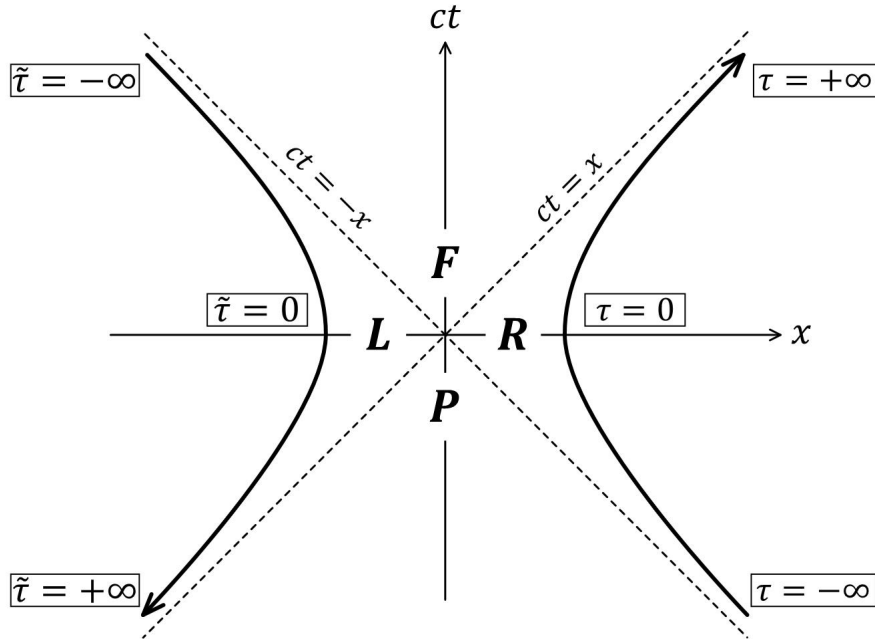


図 3.2: ミンコフスキー時空は、破線で示す事象の地平面を境界として、右リンドラーくさび状領域 R 、左リンドラーくさび状領域 L 、未来の領域 F 、及び過去の領域 P に区分される。

なお、図 3.2 において、左リンドラーくさび状領域 L のどの位置から信号をたとえ光速で発しても、その信号は右リンドラーくさび状領域 R には届かない。これは $ct = x$ で表される事象の地平面の存在のためである。また、右リンドラーくさび状領域 R のどの位置から信号をたとえ光速で発しても、その信号は左リンドラーくさび状領域 L には届かない。これは $ct = -x$ で表される事象の地平面の存在のためである。このように、事象の地平面 $ct = x$ 及び $ct = -x$ の存在のため、右リンドラーくさび状領域 R と左リンドラーくさび状領域 L の一方から他方への情報伝達は原理的に不可能である。

以下、左リンドラー座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ の、右リンドラー座標系 (τ, χ) との関係を調べる。

式 (3.3.8) の右辺は x の正の範囲をカバーし、式 (3.4.2) の右辺は x の負の範囲をカバーする。式 (3.3.8) の $x = |\text{式 (3.4.2) の } x|$ 、という条件を課すと、 \cosh が遇関数なので、次の関係式が得られる：

$$\tilde{\chi} = \chi \quad (3.4.3)$$

また、この関係式 (3.4.3) と、式 (3.3.7) の $ct = \text{式 (3.4.1) の } ct$ という条件とにより、 \sinh が奇関数なので、次の関係式が得られる：

$$\tilde{\tau} = -\tau \quad (3.4.4)$$

なお、式 (3.3.7) より $dt/d\tau \geq 0$ であり、従って t が未来に向かって増加するとき、 τ も未来に向かって増加する。一方、上記関係式 (3.4.4) より、 τ が未来に向かって増加するとき、 $\tilde{\tau}$

は t にとっての過去に向かって増加する．このことを，図 3.4.2 において矢印で表した．

以上のように，慣性系の空間座標 x は，その正の範囲が右リンドラー座標系の空間座標 χ へと 1 価に写像され，負の範囲は左リンドラー座標系の空間座標 $\tilde{\chi}$ へと 1 価に写像される．一方，慣性系の時間座標 t は，右リンドラー座標系の時間座標 τ と，左リンドラー座標系の時間座標 $\tilde{\tau}$ とに，1 対 2 に，即ち 2 価に，写像される⁴．

3.5 リンドラー座標系における場のモード展開

まず，右リンドラー座標系 (τ, χ) でクライン・ゴールドン方程式がどのように表現されるかを調べる．そのために，クライン・ゴールドン方程式を導く作用積分 (2.5.2) を以下に再掲する：

$$S[\phi] = \int \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \right] \sqrt{-g} d^4x$$

上式の $\sqrt{-g}$ は，式 (3.3.10) より， $g = \det\{g_{\mu\nu}\} = -e^{\frac{2a}{c}x}$ であるから， $\sqrt{-g} = e^{\frac{2a}{c}x}$ である．また，上式の $g^{\mu\nu}$ は，式 (3.3.10) と，相対論で要請される関係式， $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$ とにより， $g^{\mu\nu} = e^{-\frac{2a}{c}x} \eta_{\mu\nu}$ である．従って，上式の $\sqrt{-g}$ と $g^{\mu\nu}$ との積で因子 $e^{\frac{2a}{c}x}$ がキャンセルされる．このため，右リンドラー座標系 (τ, χ) では，作用積分 $S[\phi]$ は次のように書ける [19][20]：

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \int \left[\frac{1}{2} e^{-\frac{2a}{c}x} \eta_{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} \right] e^{\frac{2a}{c}x} d\tau d\chi \\ &= \int \frac{1}{2} [(\partial_\tau \phi)^2 - (\partial_\chi \phi)^2] d\tau d\chi \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

この式 (3.5.1) に示す作用積分 $S[\phi]$ は，前章の式 (2.5.3) に示した慣性系の作用積分 $S[\phi]$ と全く同じ形をしている．従って，右リンドラー座標系 (τ, χ) でも，前章の式 (2.5.1) と同じ形の，以下に示すクライン・ゴールドン方程式が得られる [19][20][27]：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \right) \phi = 0 \quad (3.5.2)$$

次に，左リンドラー座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ でのクライン・ゴールドン方程式の表現を調べる．慣性系の $c\tau, x$ を左リンドラー座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ で表した式 (3.4.1) 及び (3.4.2) の右辺は，右リンドラー座標系 (τ, χ) で表した式 (3.3.7) 及び (3.3.8) の右辺に負号を付けたものと形式的に同じである．従って，線素 $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$ の計算結果は，左リンドラー座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ でも，式 (3.3.9) と同じ形となる．このため，左リンドラー座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ でも，式 (3.3.10) に示す右リンドラー座標系 (τ, χ) の計量テンソルと同じ形の計量テンソル $g_{\mu\nu} = e^{\frac{2a}{c}\tilde{\chi}} \eta_{\mu\nu}$ が得られる．

この結果，左リンドラー座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ においても，上記と同様の手順により，右リンド

⁴このことが，後に述べる，右リンドラーくさび状領域 R と左リンドラーくさび状領域 L との間の量子エンタングルメントの起源であると考えられる．

ラー座標系 (τ, χ) で表現した作用積分 (3.5.1) と同じ形の作用積分が得られる：

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int [(\partial_{\tilde{\tau}}\phi)^2 - (\partial_{\tilde{\chi}}\phi)^2] d\tilde{\tau}d\tilde{\chi} \quad (3.5.3)$$

それゆえ、左リンドラー座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ においても、右リンドラー座標系 (τ, χ) におけるクライン・ゴールドン方程式 (3.5.2) と同じ形のクライン・ゴールドン方程式が得られる：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{\tau}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\chi}^2} \right) \phi = 0 \quad (3.5.4)$$

以上のように、慣性系における場合と、左右のリンドラー座標系における場合とで、作用積分の形が同じになることをみた。このことは、相対論が要請する共変性の直接的な帰結ではない点に注意を要する。相対論が要請する共変性とは、どのような座標系でも作用積分が式 (2.5.2) の形に書けるという意味である。

これに対し、慣性系における場合と、左右のリンドラー座標系における場合とで、作用積分の“具体的な”形が同じになったのは、左右のリンドラー座標系における計量テンソルが、 $e^{\frac{2a}{c}x} \eta_{\mu\nu}$, $e^{\frac{2a}{c}\tilde{x}} \eta_{\mu\nu}$ という形をとるおかげである。先に 3.3 節で、計量テンソルの対角成分を等しくする方針を採ったのは、右リンドラー座標系における計量テンソルを上記の形にもっていくことにより、慣性系の場合と同じ形の作用積分を得る数学的技巧上の理由による。

次に、前章で述べたやり方と同様にして、場 $\hat{\phi}$ のモード展開を求める。前章では、クライン・ゴールドン方程式を用いて、場 $\hat{\phi}$ のモード展開 (2.4.1) を導いた。そのモード展開 (2.4.1) を構成する式 (2.2.7) のモード関数 $f_{k,M}$ 及びその複素共役は、場 $\hat{\phi}$ のフーリエ展開 (2.2.1) をクライン・ゴールドン方程式に代入することにより定まった。

右リンドラー座標系 (τ, χ) においても、場 $\hat{\phi}$ のフーリエ展開の形は慣性系の場合と同じである。また、既述のとおり、右リンドラー座標系 (τ, χ) においても、クライン・ゴールドン方程式の形が慣性系の場合と同じである。従って、式 (2.2.7) のモード関数 $f_{k,M}$ と同じ形の、次のモード関数 $g_{k,R}$ を定義することができる [19][27]：

$$g_{k,R} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}} e^{-i(\omega_k\tau - k\chi)} \quad (3.5.5)$$

但し、慣性系の空間軸 x の正の範囲を右リンドラー座標系 (τ, χ) に写像し、負の範囲を左リンドラー座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ に写像したことから分かるように、右リンドラー座標系 (τ, χ) のモード関数 $g_{k,R}$ は、左リンドラー座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ のモード関数及びその複素共役と合わさって完全系を構成する。そこで、左リンドラー座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ のモード関数も導入する必要がある。

左リンドラー座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ のモード関数 $g_{k,L}$ は、上式 (3.5.5) のモード関数 $g_{k,R}$ に、式 (3.4.3) 及び (3.4.4) の関係を代入することにより次のように定まる [19][27]：

$$g_{k,L} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}} e^{-i(-\omega_k\tilde{\tau} - k\tilde{\chi})} \quad (3.5.6)$$

そして、上述したモード関数 (3.5.5), (3.5.6), 及びこれらの複素共役を用いると、次のよ

うに場 $\hat{\phi}$ がモード展開される [19][27] :

$$\hat{\phi} = \int \hat{a}_{k,R} \cdot g_{k,R} + \hat{a}_{k,R}^\dagger \cdot g_{k,R}^* + \hat{a}_{k,L} \cdot g_{k,L} + \hat{a}_{k,L}^\dagger \cdot g_{k,L}^* dk \quad (3.5.7)$$

このモード展開 (3.5.7) は、場をハイゼンベルグ表示したものである。本来ならば、場は、 $\hat{\phi}(\tau, \chi; \tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ と表記すべきであるが、簡潔化のために $\hat{\phi}$ と表記した。

次に、後の第5章の計算で使用するため、上述したモード関数の、式 (2.3.1) で定義したクライン・ゴールドン内積の関係について述べておく。モード関数 $g_{k,R}, g_{k,L}$ 及びこれらの複素共役は、次のクラインゴールドン内積の関係を満たす [8]。但し、下式 (3.5.9) において添え字 X は R, L を表すものとする。

$$\langle g_{k,X}, g_{k',X} \rangle = \delta(k - k') \quad , \quad \langle g_{k,X}^*, g_{k',X}^* \rangle = -\delta(k - k') \quad (3.5.8)$$

$$\langle g_{k,R}, g_{k',L} \rangle = 0 \quad , \quad \langle g_{k,X}, g_{k',X}^* \rangle = 0 \quad (3.5.9)$$

3.6 右リンドラー座標系に対応するフォック空間の定義

本節では、前章の2.2節で述べたやり方と同様にして、右リンドラー座標系 (τ, χ) に対応するフォック空間を定義する。右リンドラーくさび状領域 R を一様加速運動するロブからみたフォック状態を、 $|n_k\rangle_R$ と定義する。

そして、上記モード展開 (3.5.7) における展開係数としての演算子 $\hat{a}_{k,R}^\dagger$ 及び $\hat{a}_{k,R}$ は、それぞれフォック状態 $|n_k\rangle_R$ に対する生成演算子、消滅演算子とみなす：

$$\hat{a}_{k,R}^\dagger |n_k\rangle_R = \sqrt{n+1} |(n+1)_k\rangle_R \quad (3.6.1)$$

$$\hat{a}_{k,R} |n_k\rangle_R = \sqrt{n} |(n-1)_k\rangle_R \quad (3.6.2)$$

また、ロブにとっての真空状態 $|0\rangle_R$ は、次式で定義される：

$$\hat{a}_{k,R} |0\rangle_R = 0, \quad \forall k \quad (3.6.3)$$

この真空状態 $|0\rangle_R$ に対して生成演算子 $\hat{a}_{k,R}^\dagger$ を任意回作用させたものの線形結合で、すべての物理的に実現可能な状態ベクトルが得られる。そのような状態ベクトルによって張られるヒルベルト空間が、右リンドラー座標系 (τ, χ) に対応するフォック空間（以下、右リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_R と記す。）である。

3.7 左リンドラー座標系に対応するフォック空間の定義

次に、左リンドラー座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ に対応するフォック空間を定義する。左リンドラー座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ の時間座標は、式 (3.4.4) に示すように、右リンドラー座標系 (τ, χ) の時間座標の符号を反転したものである。この結果、図 3.2 に示すように、右リンドラーくさび状領域 R におけるロブの運動は、原点に対して点対称に左リンドラーくさび状領域 L に写像される。

以下では、そのように点対称に写像された運動をする架空の観測者を“反”ロブと名づけることにする．図 3.2 を参照して説明したように、左リンドラーくさび状領域 L の反ロブは、事象の地平面によって、右リンドラーくさび状領域 R のロブとは断絶されている．このため、反ロブに対しては、ロブからみたフォック状態 $|n_k\rangle_R$ とは別のフォック状態を定義する．

具体的には、反ロブからみたフォック状態を $|n_k\rangle_L$ と定義する．そして、上記モード展開 (3.5.7) における展開係数としての演算子 $\hat{a}_{k,L}^\dagger$ 及び $\hat{a}_{k,L}$ は、それぞれフォック状態 $|n_k\rangle_L$ に対する生成演算子、消滅演算子とみなす：

$$\hat{a}_{k,L}^\dagger |n_k\rangle_L = \sqrt{n+1} |(n+1)_k\rangle_L \quad (3.7.1)$$

$$\hat{a}_{k,L} |n_k\rangle_L = \sqrt{n} |(n-1)_k\rangle_L \quad (3.7.2)$$

また、反ロブにとっての真空状態 $|0\rangle_L$ は、次式で定義される：

$$\hat{a}_{k,L} |0\rangle_L = 0, \quad \forall k \quad (3.7.3)$$

この真空状態 $|0\rangle_L$ に対して生成演算子 $\hat{a}_{k,L}^\dagger$ を任意回作用させたものの線形結合で、すべての物理的に実現可能な状態ベクトルが得られる．そのような状態ベクトルによって張られるヒルベルト空間が、左リンドラー座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ に対応するフォック空間（以下、左リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_L と記す。）である．

3.8 まとめ

本章では、一様加速運動をするロブに固定された座標系として右リンドラー座標系 (τ, χ) を定義した．そして、右リンドラー座標系 (τ, χ) におけるクライン・ゴールドン方程式 (3.5.2) が、慣性系におけるクライン・ゴールドン方程式 (2.5.1) と同じ形であることを根拠として、慣性系の場合と同じ形の、式 (3.5.5) に示すモード関数 $g_{k,R}$ を導入した．

また、右リンドラー座標系 (τ, χ) では、慣性系の x 軸の正の範囲しか覆えないため、慣性系との対応関係をより完全なものにすべく、慣性系の x 軸の負の範囲を覆う左リンドラー座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ を、数学的に導入した．そして、左リンドラー座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ におけるクライン・ゴールドン方程式 (3.5.4) が、慣性系におけるクライン・ゴールドン方程式 (2.5.1) と同じ形であること、並びに左リンドラー座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ と右リンドラー座標系 (τ, χ) との対応関係 (3.4.3) 及び (3.4.4) を根拠として、式 (3.5.6) に示すモード関数 $g_{k,L}$ を導入した．

次に、モード関数 $g_{k,R}$ 及び $g_{k,L}$ 並びにこれらの複素共役によって場 $\hat{\phi}(t, x)$ を展開したモード展開 (3.5.7) を示し、その展開係数のうちの生成演算子 $\hat{a}_{k,R}^\dagger$ 及び消滅演算子 $\hat{a}_{k,R}$ を用いて、右リンドラー座標系 (τ, χ) に対応する右リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_R を定義した．

右リンドラー座標系 (τ, χ) におけるクライン・ゴールドン方程式 (3.5.2) を導く過程で、式 (2.5.2) に示す作用積分 $S[\phi]$ の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ として式 (3.3.10) に示す計量テンソル $e^{\frac{2a}{c}x} \eta_{\mu\nu}$ を採用することで、ロブの視点が反映された．このため、右リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_R は、ロブからみた場の状態を表すものである．

また同様に、上記展開係数のうちの生成演算子 $\hat{a}_{k,L}^\dagger$ 及び消滅演算子 $\hat{a}_{k,L}$ を用いて、左リンドラー座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ に対応する左リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_L を定義した。左リンドラー座標系 $(\tilde{\tau}, \tilde{\chi})$ におけるクライン・ゴールドン方程式 (3.5.4) を導く過程で、式 (2.5.2) に示す作用積分 $S[\phi]$ の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ として $e^{\frac{2a}{c}\tilde{\chi}} \eta_{\mu\nu}$ を採用することで、反ロブの視点が反映された。このため、左リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_L は、反ロブからみた場の状態を表す。

以上のように、本章では、右リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_R と左リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_L とを定義した。以下では、右リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_R と左リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_L とを合成したヒルベルト空間 $\mathcal{F}_R \otimes \mathcal{F}_L$ を、リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_H と呼ぶことにする。

これまでに、前章でアリスにとってのミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I を定義し、本章でロブ及び反ロブにとってのリンドラーフォック空間 \mathcal{F}_H を定義した。次章では、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I と、リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_H との関係を調べることにより、ウンルー効果のメカニズムを明らかにする。

第4章 ウンルー効果のメカニズム

第2章の式(2.4.5)で、アリスにとっての真空 $|0\rangle_M$ を、消滅演算子 $\hat{a}_{k,M}$ の作用 $\hat{a}_{k,M}|0\rangle_M = 0$ を通じて定義した。また、第3章の式(3.7.3)及び式(3.6.3)では、ロブにとっての真空 $|0\rangle_R$ を、消滅演算子 $\hat{a}_{k,R}$ の作用 $\hat{a}_{k,R}|0\rangle_R = 0$ を通じて定義し、反ロブにとっての真空 $|0\rangle_L$ を、消滅演算子 $\hat{a}_{k,L}$ の作用 $\hat{a}_{k,L}|0\rangle_L = 0$ を通じて定義した。

以下では、アリスにとっての真空 $|0\rangle_M$ をミンコフスキー真空と呼ぶことにする。また、ロブにとっての真空 $|0\rangle_R$ と、反ロブにとっての真空 $|0\rangle_L$ とのテンソル積 $|0,0\rangle_{R,L}$ をリンドラー真空と呼ぶことにする。

本章では、ウンルー効果のメカニズムを調べるために、まず、ミンコフスキー真空 $|0\rangle_M$ と、リンドラー真空 $|0,0\rangle_{R,L}$ との間の数学的な関係を求める。この結果、ミンコフスキー真空 $|0\rangle_M$ は、リンドラー真空 $|0,0\rangle_{R,L}$ をユニタリー変換したものに相当するということが分かる。そのユニタリー変換は、右リンドラーくさび状領域 R のフォック状態と、左リンドラーくさび状領域 L のフォック状態とをエンタングルさせる作用をもつ。その作用が原因で右リンドラーくさび状領域 R にウンルー効果が発現する、ということを経最後に示す。

4.1 ウンルーモード関数の導入

第2章でみたように、ミンコフスキー真空 $|0\rangle_M$ を定義する消滅演算子 $\hat{a}_{k,M}$ は、場 $\hat{\phi}$ の、慣性系でのモード関数（以下、ミンコフスキーモード関数と記す。） $f_{k,M}$ によるモード展開(2.4.1)において、そのミンコフスキーモード関数 $f_{k,M}$ に掛かる展開係数として導入された。このため、ミンコフスキー真空 $|0\rangle_M$ は、ミンコフスキーモード関数 $f_{k,M}$ に基づいて定義されたと言える。

一方、第3章でみたように、リンドラー真空 $|0,0\rangle_{R,L}$ を定義する消滅演算子 $\hat{a}_{k,L}$, $\hat{a}_{k,R}$ は、場 $\hat{\phi}$ の、左右のリンドラー座標系でのモード関数（以下、リンドラーモード関数と記す。） $g_{k,R}$, $g_{k,L}$ によるモード展開(3.5.7)において、それらリンドラーモード関数 $g_{k,R}$, $g_{k,L}$ に掛かる展開係数として導入された。このため、リンドラー真空 $|0,0\rangle_{R,L}$ は、リンドラーモード関数 $g_{k,R}$, $g_{k,L}$ に基づいて定義されたと言える。

そこで、ミンコフスキー真空 $|0\rangle_M$ とリンドラー真空 $|0,0\rangle_{R,L}$ との関係を調べるための第1ステップとして、まず、ミンコフスキーモード関数 $f_{k,M}$ と、リンドラーモード関数 $g_{k,R}$, $g_{k,L}$ との関係を調べる。

リンドラーモード関数 $g_{k,R}$, $g_{k,L}$ 、及びこれらの複素共役は、クライン・ゴールドン内積の観点から完全直交系を構成する。従って、ミンコフスキーモード関数 $f_{k,M}$ は、リンドラーモード関数 $g_{k,R}$, $g_{k,L}$ 及びこれらの複素共役によって展開することができる：

$$\begin{aligned}
 f_{k,M} &= \int_{k'} \langle g_{k',R}, f_{k,M} \rangle \cdot g_{k',R} + \langle g_{k',R}^*, f_{k,M} \rangle \cdot g_{k',R}^* \\
 &\quad + \langle g_{k',L}, f_{k,M} \rangle \cdot g_{k',L} + \langle g_{k',L}^*, f_{k,M} \rangle \cdot g_{k',L}^* dk' \\
 &:= \int_{k'} \alpha_{k,k'}^R \cdot g_{k',R} + \beta_{k,k'}^R \cdot g_{k',R}^* + \alpha_{k,k'}^L \cdot g_{k',L} + \beta_{k,k'}^L \cdot g_{k',L}^* dk' \quad (4.1.1)
 \end{aligned}$$

上式 (4.1.1) で、行列 $\alpha_{k,k'}^R := \langle g_{k',R}, f_{k,M} \rangle$ は、 $f_{k,M}$ の $g_{k',R}$ 成分の大きさを表す。行列 $\beta_{k,k'}^R := \langle g_{k',R}^*, f_{k,M} \rangle$ は、 $f_{k,M}$ の $g_{k',R}^*$ 成分の大きさを表す。行列 $\alpha_{k,k'}^L := \langle g_{k',L}, f_{k,M} \rangle$ は、 $f_{k,M}$ の $g_{k',L}$ 成分の大きさを表す。行列 $\beta_{k,k'}^L := \langle g_{k',L}^*, f_{k,M} \rangle$ は、 $f_{k,M}$ の $g_{k',L}^*$ 成分の大きさを表す。これら行列 $\alpha_{k,k'}^R$ 、 $\beta_{k,k'}^R$ 、 $\alpha_{k,k'}^L$ 、及び $\beta_{k,k'}^L$ をボゴリューボフ係数と呼ぶ。

次に、それらボゴリューボフ係数 $\alpha_{k,k'}^R$ 、 $\beta_{k,k'}^R$ 、 $\alpha_{k,k'}^L$ 、及び $\beta_{k,k'}^L$ を用いて、ミンコフスキー真空 $|0\rangle_M$ を定義する消滅演算子 $\hat{a}_{k,M}$ と、リンドラー真空 $|0,0\rangle_{R,L}$ を定義する消滅演算子 $\hat{a}_{k,L}$ 、 $\hat{a}_{k,R}$ 、及びこれらのエルミート共役との関係を調べる。

そのために、第 2 章で示したモード展開 (2.4.1) と、第 3 章で示したモード展開 (3.5.7) とが等号で結ばれることを利用する。モード展開 (2.4.1) 及び (3.5.7) は、同じ場 $\hat{\phi}$ を異なる基底で展開した関係にあるからである。具体的には、直交関係 (2.3.2) によれば、慣性系での消滅演算子 $\hat{a}_{k,M}$ は、モード展開 (2.4.1) と、ミンコフスキーモード関数 $f_{k,M}$ とのクライン・ゴルドン内積 $\langle \hat{\phi}, f_{k,M} \rangle$ をとることで得られる。そこで、その内積 $\langle \hat{\phi}, f_{k,M} \rangle$ 中の場 $\hat{\phi}$ として、モード展開 (3.5.7) の右辺を代入することにより、次の関係を得る：

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_{k,M} &= \langle \hat{\phi}, f_{k,M} \rangle \\
 &= \int_{k'} \alpha_{k,k'}^R \cdot \hat{a}_{k',R} + \beta_{k,k'}^R \cdot \hat{a}_{k',R}^\dagger + \alpha_{k,k'}^L \cdot \hat{a}_{k',L} + \beta_{k,k'}^L \cdot \hat{a}_{k',L}^\dagger dk' \quad (4.1.2)
 \end{aligned}$$

上式 (4.1.2) で、左辺の $\hat{a}_{k,M}$ は、アリスにとってのフォック空間上のラダー演算子¹ であり、右辺の $\hat{a}_{k,L}$ 、 $\hat{a}_{k,R}$ 、及びこれらのエルミート共役は、ロブ及び反ロブにとってのフォック空間上のラダー演算子である。以下では、アリスにとってのラダー演算子をミンコフスキーラダー演算子と呼び、ロブ及び反ロブにとってのラダー演算子をリンドラーラダー演算子と呼ぶ。上式 (4.1.2) で、ミンコフスキーラダー演算子と、リンドラーラダー演算子との間の変換であるボゴリューボフ変換 (Bogoliubov transformation) が求まった。

しかし、上式 (4.1.2) の右辺は積分の形で表されているので、上式 (4.1.2) をそのまま考察しても、ミンコフスキー真空 $|0\rangle_M$ とリンドラー真空 $|0,0\rangle_{R,L}$ との関係は判然としない。仮に、上式 (4.1.2) 中の積分を取り除くことができれば、ミンコフスキー真空 $|0\rangle_M$ とリンドラー真空 $|0,0\rangle_{R,L}$ との関係がもっと分かり易くなるであろう。そのためには、上式 (4.1.2) 中のボゴリューボフ係数 $\alpha_{k,k'}^R$ 、 $\beta_{k,k'}^R$ 、 $\alpha_{k,k'}^L$ 、及び $\beta_{k,k'}^L$ が対角化されればよい²。

¹本論文では、生成演算子と消滅演算子との総称の意味で、ラダー (ladder) 演算子という言葉を用いる。

²現象の背後にひそむ法則を明らかにするために、運動方程式に表れる係数行列が対角化されるような座標変換を行うことは、物理学における常套手段である。例えば、2重振り子においては、各質点の揺れ角を表す一般化座標に対し、上記係数行列が対角化されるような点変換を施すことで、2重振り子の運動を2つの独立なノーマルモードの組み合わせとして捉えることができる。

そして、そのような要求を満たす関数として、ウンルーモード関数 $\tilde{f}_{k,M1}$, $\tilde{f}_{k,M2}$ と呼ばれるものが知られている。ウンルーモード関数 $\tilde{f}_{k,M1}$, $\tilde{f}_{k,M2}$ は、式 (4.1.1) の左辺のミンコフスキーモード関数 $f_{k,M}$ の代替として用いられる。ウンルーモード関数 $\tilde{f}_{k,M1}$, $\tilde{f}_{k,M2}$ は、以下の性質 (ア) – (ウ) を有する [2] [8] [19] [27] [28] :

(ア) ウンルーモード関数 $\tilde{f}_{k,M1}$, $\tilde{f}_{k,M2}$ は、それをリンドラーモード関数で展開した場合に、ボゴリューボフ係数 $\alpha_{k,k'}^R, \beta_{k,k'}^R, \alpha_{k,k'}^L, \beta_{k,k'}^L$ が対角化されるような関数である :

$$\tilde{f}_{k,M1} = \alpha_k^R \cdot g_{k,R} + \beta_k^L \cdot g_{-k,L}^* \quad (4.1.3)$$

$$\tilde{f}_{k,M2} = \beta_k^R \cdot g_{-k,R}^* + \alpha_k^L \cdot g_{k,L} \quad (4.1.4)$$

具体的には、ウンルーモード関数 $\tilde{f}_{k,M1}$, $\tilde{f}_{k,M2}$ は、次のように定義されたものである。

$$\tilde{f}_{k,M1} := \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\frac{\pi\omega_k}{a})}} \left[\exp\left(\frac{\pi\omega_k}{2a}\right) g_{k,R} + \exp\left(-\frac{\pi\omega_k}{2a}\right) g_{-k,L}^* \right] \quad (4.1.5)$$

$$\tilde{f}_{k,M2} := \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\frac{\pi\omega_k}{a})}} \left[\exp\left(-\frac{\pi\omega_k}{2a}\right) g_{-k,R}^* + \exp\left(\frac{\pi\omega_k}{2a}\right) g_{k,L} \right] \quad (4.1.6)$$

(イ) ウンルーモード関数 $\tilde{f}_{k,M1}$, $\tilde{f}_{k,M2}$, 及びこれらの複素共役は、クライン・ゴールドン内積の観点から完全直交系を構成する。ウンルーモード関数 $\tilde{f}_{k,M1}$, $\tilde{f}_{k,M2}$, 及びこれらの複素共役は、次のクライン・ゴールドン内積の関係を満たす。但し、下式 (4.1.7) 及び (4.1.8) において、添え字 X は $M1, M2$ を表すものとする。

$$\langle \tilde{f}_{k,X}, \tilde{f}_{k',X} \rangle = \delta(k - k') \quad , \quad \langle \tilde{f}_{k,X}^*, \tilde{f}_{k',X}^* \rangle = -\delta(k - k') \quad (4.1.7)$$

$$\langle \tilde{f}_{k,M1}, \tilde{f}_{k',M2} \rangle = 0 \quad , \quad \langle \tilde{f}_{k,X}, \tilde{f}_{k',X}^* \rangle = 0 \quad (4.1.8)$$

(ウ) ウンルーモード関数 $\tilde{f}_{k,M1}$, $\tilde{f}_{k,M2}$ の各々は、ミンコフスキーモード関数 $f_{k,M}$ の線形結合である :

$$\tilde{f}_{k,M1} = \int_{k'} \lambda_{k,k'}^{M1} \cdot f_{k',M} dk' \quad (4.1.9)$$

$$\tilde{f}_{k,M2} = \int_{k'} \lambda_{k,k'}^{M2} \cdot f_{k',M} dk' \quad (4.1.10)$$

4.2 ボゴリューボフ変換の簡潔化

以下、上記性質 (ア) 及び (イ) を利用して、ボゴリューボフ変換 (4.1.2) を簡潔化する。なお、上記性質 (ウ) は、次節で利用する。

上記性質 (イ) より、ウンルーモード関数 $\tilde{f}_{k,M1}$, $\tilde{f}_{k,M2}$, 及びこれらの複素共役によって、

場 $\hat{\phi}$ を展開することができる :

$$\begin{aligned} \hat{\phi} = & \int \hat{b}_{k,M1} \cdot \tilde{f}_{k,M1}(g_{k,R}, g_{-k,L}^*) + \hat{b}_{k,M2} \cdot \tilde{f}_{k,M2}(g_{-k,R}^*, g_{k,L}) \\ & + \hat{b}_{k,M1}^\dagger \cdot \tilde{f}_{k,M1}^*(g_{k,R}^*, g_{-k,L}) + \hat{b}_{k,M2}^\dagger \cdot \tilde{f}_{k,M2}^*(g_{-k,R}, g_{k,L}^*) dk \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

上式 (4.2.1) も、既述の式 (2.4.1) 及び (3.5.7) と同様、場 $\hat{\phi}$ のモード展開である。なお、上式 (4.2.1) では、上記性質 (ア) より、 $\tilde{f}_{k,M1}$ が $g_{k,R}$ 及び $g_{-k,L}^*$ の関数であることを明示した。 $\tilde{f}_{k,M2}$, $\tilde{f}_{k,M1}^*$, 及び $\tilde{f}_{k,M2}^*$ についても同様である。

上式 (4.2.1) によって、ウンルーモード関数 $\tilde{f}_{k,M1}$, $\tilde{f}_{k,M2}$, 及びこれらの複素共役に掛かる展開係数として、新たなラダー演算子 $\hat{b}_{k,M1}^\dagger$, $\hat{b}_{k,M1}$, $\hat{b}_{k,M2}^\dagger$, 及び $\hat{b}_{k,M2}$ が導入された。以下では、これらをウンルーラダー演算子と呼ぶことにする。

これまで述べたように、ミンコフスキーラダー演算子 $\hat{a}_{k,M}$ はミンコフスキーモード関数 $f_{k,M}$ に掛かる展開係数として導入された。また、一方のリンドラーラダー演算子 $\hat{a}_{k,R}$ は一方のリンドラーモード関数 $g_{k,R}$ に掛かる展開係数として導入され、他方のリンドラーラダー演算子 $\hat{a}_{k,L}$ は他方のリンドラーモード関数 $g_{k,L}$ に掛かる展開係数として導入された。これらのことから分かるように、ラダー演算子はモード関数と 1 対 1 に対応する。

従って、ミンコフスキーモード関数 $f_{k,M}$ の代わりにウンルーモード関数 $\tilde{f}_{k,M1}$, $\tilde{f}_{k,M2}$ を用いるということは、ミンコフスキーラダー演算子とリンドラーラダー演算子との関係 (4.1.2) を調べる問題が、ウンルーラダー演算子とリンドラーラダー演算子との関係を調べる問題へと置き換えられることを意味する。

以下、具体的に、ウンルーラダー演算子 $\hat{b}_{k,M1}$, $\hat{b}_{k,M2}^\dagger$, $\hat{b}_{k,M2}$, 及び $\hat{b}_{k,M1}^\dagger$ と、リンドラーラダー演算子 $\hat{a}_{k,R}$, $\hat{a}_{k,L}$ との関係を調べる。

リンドラーモード関数の直交関係 (3.5.8) 及び (3.5.9) によれば、リンドラーラダー演算子 $\hat{a}_{k,R}$ は、モード展開 (3.5.7) と、リンドラーモード関数 $g_{k,R}$ とのクライン・ゴールドン内積 $\langle \hat{\phi}, g_{k,R} \rangle$ をとることで得られる。そこで、その内積 $\langle \hat{\phi}, g_{k,R} \rangle$ 中の場 $\hat{\phi}$ として、モード展開 (4.2.1) の右辺を代入することにより、次式を得る :

$$\hat{a}_{k,R} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega_k}{a}\right)}} \left[\exp\left(\frac{\pi\omega_k}{2a}\right) \hat{b}_{k,M1} + \exp\left(-\frac{\pi\omega_k}{2a}\right) \hat{b}_{-k,M2}^\dagger \right] \quad (4.2.2)$$

同様に、リンドラーラダー演算子 $\hat{a}_{k,L}$ は、モード展開 (3.5.7) と、リンドラーモード関数 $g_{k,L}$ とのクライン・ゴールドン内積 $\langle \hat{\phi}, g_{k,L} \rangle$ をとることで得られる。そこで、その内積 $\langle \hat{\phi}, g_{k,L} \rangle$ 中の場 $\hat{\phi}$ として、モード展開 (4.2.1) の右辺を代入することにより、次式を得る :

$$\hat{a}_{k,L} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh\left(\frac{\pi\omega_k}{a}\right)}} \left[\exp\left(\frac{\pi\omega_k}{2a}\right) \hat{b}_{k,M2} + \exp\left(-\frac{\pi\omega_k}{2a}\right) \hat{b}_{-k,M1}^\dagger \right] \quad (4.2.3)$$

上式 (4.2.3) の両辺の k を $-k$ に置き換えて両辺の複素共役をとったものは、式 (4.2.2) と

共に行列の形にまとめられる：

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_{k,R} \\ \hat{a}_{-k,L}^\dagger \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2 \sinh(\frac{\pi\omega_k}{a})}} \begin{bmatrix} \exp(\frac{\pi\omega_k}{2a}) & \exp(-\frac{\pi\omega_k}{2a}) \\ \exp(-\frac{\pi\omega_k}{2a}) & \exp(\frac{\pi\omega_k}{2a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_{k,M1} \\ \hat{b}_{-k,M2}^\dagger \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

さらに、次式によってスキューニングパラメータ θ_k を定義する：

$$\tanh \theta_k := \exp\left(-\frac{\pi\omega_k}{a}\right) \quad (4.2.5)$$

すると、上式 (4.2.4) が次のように簡潔化される：

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_{k,R} \\ \hat{a}_{-k,L}^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \theta_k & \sinh \theta_k \\ \sinh \theta_k & \cosh \theta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_{k,M1} \\ \hat{b}_{-k,M2}^\dagger \end{bmatrix} \quad (4.2.6)$$

上式 (4.2.6) の逆変換は、次のように書ける：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{b}_{k,M1} \\ \hat{b}_{-k,M2}^\dagger \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cosh \theta_k & \sinh \theta_k \\ \sinh \theta_k & \cosh \theta_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{a}_{k,R} \\ \hat{a}_{-k,L}^\dagger \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \theta_k & -\sinh \theta_k \\ -\sinh \theta_k & \cosh \theta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_{k,R} \\ \hat{a}_{-k,L}^\dagger \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

さらに、次のように、ユニタリー演算子 \hat{G}_k 及びその直積よりなる演算子 \hat{V} を定義する：

$$\hat{V} := \prod_k \hat{G}_k, \quad (4.2.8)$$

$$\hat{G}_k := \exp\left[-\theta_k \left(\hat{a}_{k,R}^\dagger \hat{a}_{k,L}^\dagger - \hat{a}_{k,R} \hat{a}_{k,L}\right)\right] \quad (4.2.9)$$

上記演算子 \hat{V} を用いると、式 (4.2.7) が次のように書ける（付録 B 参照）：

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_{k,M1} \\ \hat{b}_{-k,M2}^\dagger \end{bmatrix} = \hat{V}^\dagger \begin{bmatrix} \hat{a}_{k,R} \\ \hat{a}_{-k,L}^\dagger \end{bmatrix} \hat{V} \quad (4.2.10)$$

$$= \hat{G}_k^\dagger \begin{bmatrix} \hat{a}_{k,R} \\ \hat{a}_{-k,L}^\dagger \end{bmatrix} \hat{G}_k \quad (4.2.11)$$

但し、 $k' \neq k$ のとき、 $\hat{G}_{k'}^\dagger \hat{a}_{k,R} \hat{G}_{k'} = \hat{a}_{k,R}$ であり、かつ $\hat{G}_{k'}^\dagger \hat{a}_{-k,L}^\dagger \hat{G}_{k'} = \hat{a}_{-k,L}^\dagger$ である。これらの関係を式 (4.2.10) から式 (4.2.11) への移行において用いた。

以上のようにして、ウンルーラダー演算子 $\hat{b}_{k,M1}$, $\hat{b}_{-k,M2}^\dagger$ と、リンドラーラダー演算子 $\hat{a}_{k,R}$, $\hat{a}_{-k,L}^\dagger$ との関係を表す新たなボゴリューボフ変換 (4.2.11) が求まった³。

³式 (4.2.11) において、 $\hat{a}_{-k,L}^\dagger$ の添え字が $-k$ であることは、右リンドラーくさび状領域 R の粒子が、それとは逆向きに運動する粒子として、左リンドラーくさび状領域 L に写像されることを意味する。これは前章で、左リンドラー座標系を右リンドラー座標系とは原点对称に定義したことによる。このことを了解したうへ

4.3 ウンルー真空とミンコフスキー真空との関係

ところで、式(4.2.1)で新たに導入されたウンルーラダー演算子 $\hat{b}_{k,M1}$ 及び $\hat{b}_{k,M2}$ もラダー演算子である以上、各々何らかの真空を定義するはずである：

$$\hat{b}_{k,M1}|0\rangle_{M1} = 0 \quad (4.3.1)$$

$$\hat{b}_{k,M2}|0\rangle_{M2} = 0 \quad (4.3.2)$$

そして、一方の真空 $|0\rangle_{M1}$ に対して生成演算子 $\hat{b}_{k,M1}^\dagger$ を任意回作用させた状態ベクトルの集合が1つのフォック空間を張る。そのフォック空間を、以下、第1ウンルーフォック空間 \mathcal{F}_{M1} と呼ぶことにする。

また、他方の真空状態 $|0\rangle_{M2}$ に対して生成演算子 $\hat{b}_{k,M2}^\dagger$ を任意回作用させた状態ベクトルの集合がもう1つのフォック空間を張る。そのフォック空間を、以下、第2ウンルーフォック空間 \mathcal{F}_{M2} と呼ぶことにする。

また、以下では、第1ウンルーフォック空間 \mathcal{F}_{M1} に属する真空 $|0\rangle_{M1}$ を第1ウンルー真空と呼び、第2ウンルーフォック空間 \mathcal{F}_{M2} に属する真空 $|0\rangle_{M2}$ を第2ウンルー真空と呼ぶことにする。また、第1ウンルー真空 $|0\rangle_{M1}$ と第2ウンルー真空 $|0\rangle_{M2}$ とを総称して、ウンルー真空と呼ぶことにする。

新たなボゴリューボフ変換(4.2.11)によれば、左辺のウンルーラダー演算子が定義するウンルー真空 $|0\rangle_{M1}$, $|0\rangle_{M2}$ と、右辺のリンドラーラダー演算子が定義するリンドラー真空 $|0,0\rangle_{R,L}$ との関係が分かるように見える。しかし、いま知りたいのは、ミンコフスキー真空 $|0\rangle_M$ と、リンドラー真空 $|0,0\rangle_{R,L}$ との関係である。そこで、それを明らかにするために、まず、ウンルー真空 $|0\rangle_{M1}$, $|0\rangle_{M2}$ とミンコフスキー真空 $|0\rangle_M$ との関係を調べる。

そのために、以下、ウンルーラダー演算子 $\hat{b}_{k,M1}$ と、ミンコフスキーラダー演算子 $\hat{a}_{k,M}$ との関係を求める。ウンルーモード関数の直交関係(4.1.7)及び(4.1.8)によれば、ウンルーラダー演算子 $\hat{b}_{k,M1}$ は、モード展開(4.2.1)と、ウンルーモード関数 $\tilde{f}_{k,M1}$ とのクライン・ゴルドン内積 $\langle \hat{\phi}, \tilde{f}_{k,M1} \rangle$ をとることで得られる。そこで、その内積 $\langle \hat{\phi}, \tilde{f}_{k,M1} \rangle$ 中の場 $\hat{\phi}$ として、モード展開(2.4.1)の右辺を代入することにより、次の関係を得る：

$$\begin{aligned} \hat{b}_{k,M1} &= \langle \hat{\phi}, \tilde{f}_{k,M1} \rangle \\ &= \int_{k'} \hat{a}_{k',M} \langle f_{k',M}, \tilde{f}_{k,M1} \rangle + \hat{a}_{k',M}^\dagger \langle f_{k',M}^*, \tilde{f}_{k,M1} \rangle dk' \\ &= \int_{k'} \hat{a}_{k',M} \left\langle f_{k',M}, \int_{k''} \lambda_{k,k''}^{M1} \cdot f_{k'',M} dk'' \right\rangle dk' \\ &= \int_{k'} \hat{a}_{k',M} \int_{k''} \lambda_{k,k''}^{M1} \delta(k' - k'') dk'' dk' \\ &= \int_{k'} \lambda_{k,k'}^{M1} \cdot \hat{a}_{k',M} dk' \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

で、 $\hat{a}_{-k,L}^\dagger$ を改めて $\hat{a}_{k,L}^\dagger$ を書いても差し支えない。 $\hat{b}_{-k,M2}^\dagger$ についても同様である。

上記の式変形において、第 2 式から第 3 式への移行には、直交関係 $\langle f_{k',M}^*, \tilde{f}_{k,M1} \rangle = 0$ と、式 (4.1.9) とを用いた。なお、直交関係 $\langle f_{k',M}^*, \tilde{f}_{k,M1} \rangle = 0$ は、上記性質 (ウ) を示す式 (4.1.9) より $\tilde{f}_{k,M1}$ が $f_{k'',M}$ のみの関数であって $f_{k',M}^*$ を含まないことと、式 (2.3.2) に示す直交関係 $\langle f_{k,M}, f_{k',M}^* \rangle = 0$ とを根拠としている。

次に、式 (4.3.1) に示すウンルーラダー演算子 $\hat{b}_{k,M1}$ の作用を通じて定義される第 1 ウンルー真空 $|0\rangle_{M1}$ と、ミンコフスキー真空 $|0\rangle_M$ との関係を見る。そのために、上式 (4.3.3) を用い、ウンルーラダー演算子 $\hat{b}_{k,M1}$ がミンコフスキー真空 $|0\rangle_M$ に対してどのように作用するかを調べる：

$$\begin{aligned} \hat{b}_{k,M1} |0\rangle_M &= \left[\int_{k'} \lambda_{k,k'}^{M1} \cdot \hat{a}_{k',M} dk' \right] |0\rangle_M \\ &= \int_{k'} \lambda_{k,k'}^{M1} \cdot \hat{a}_{k',M} |0\rangle_M dk' \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

以上のように、ウンルーラダー演算子 $\hat{b}_{k,M1}$ も、ミンコフスキーラダー演算子 $\hat{a}_{k,M}$ が消すミンコフスキー真空 $|0\rangle_M$ を消す。これは、式 (4.3.3) に示すように、ウンルーラダー演算子 $\hat{b}_{k,M1}$ が $\hat{a}_{k,M}$ のみの線形結合で表され、 $\hat{a}_{k,M}^\dagger$ を含まないからである。以上のようにして、上式 (4.3.4) と、式 (4.3.1) との対比から、第 1 ウンルー真空 $|0\rangle_{M1}$ がミンコフスキー真空 $|0\rangle_M$ と一致することが分かった。

また、全く同様に、ウンルーモード関数の上記性質 (ウ) を示す式 (4.1.10) より $\tilde{f}_{k,M2}$ が $f_{k'',M}$ のみの関数であって $f_{k',M}^*$ を含まないことに依拠して、ウンルーラダー演算子 $\hat{b}_{k,M2}$ が $\hat{a}_{k,M}$ のみの関数であって $\hat{a}_{k,M}^\dagger$ を含まないことが確かめられる。この結果、上式 (4.3.4) と同様に、 $\hat{b}_{k,M2} |0\rangle_M = 0$ が成立し、その式と式 (4.3.2) との対比から、第 2 ウンルー真空 $|0\rangle_{M2}$ がミンコフスキー真空 $|0\rangle_M$ と一致することも示される。

但し、第 1 ウンルーフォック空間 \mathcal{F}_{M1} と第 2 ウンルーフォック空間 \mathcal{F}_{M2} との各々は、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I と対等ではない。 $f_{k,M}$ の代わりに、各々 $f_{k,M}$ で表される互いに独立な $\tilde{f}_{k,M1}$ 及び $\tilde{f}_{k,M2}$ を導入したことは、モード M がモード $M1$ と $M2$ とに形式的に分割されたこと、つまり、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I が第 1 ウンルーフォック空間 \mathcal{F}_{M1} と第 2 ウンルーフォック空間 \mathcal{F}_{M2} とに形式的に分割されたことを意味する。

従って、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I と対等なのは、第 1 ウンルーフォック空間 \mathcal{F}_{M1} と第 2 ウンルーフォック空間 \mathcal{F}_{M2} とを合成したヒルベルト空間 $\mathcal{F}_{M1} \otimes \mathcal{F}_{M2}$ である。

それゆえ、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I に属する状態ベクトルは、第 1 ウンルーフォック空間 \mathcal{F}_{M1} に属する状態ベクトルと、第 2 ウンルーフォック空間 \mathcal{F}_{M2} に属する状態ベクトルとのテンソル積で表される。具体的には、ミンコフスキー真空 $|0\rangle_M$ は、第 1 ウンルー真空 $|0\rangle_{M1}$ と第 2 ウンルー真空 $|0\rangle_{M2}$ とのテンソル積で表される：

$$|0\rangle_M = |0, 0\rangle_{M1, M2} \quad (4.3.5)$$

4.4 ウンルー効果をもたらす量子エンタングルメント

今後、議論を簡単化するため、場 $\hat{\phi}$ における特定の波数 k の成分のみに着目し、添え字 k の表記を止めることとする。具体的には、以下では、式 (4.2.9) に示した \hat{G}_k を \hat{G} 、 θ_k を θ 、 $\hat{a}_{k,R}$ を \hat{a}_R 、 $\hat{a}_{k,R}^\dagger$ を \hat{a}_R^\dagger 、 $\hat{a}_{k,L}$ を \hat{a}_L 、 $\hat{a}_{k,L}^\dagger$ を \hat{a}_L^\dagger 、とそれぞれ表記する。

つまり、特定の波数 k のみに着目するシングルモード近似 (SMA; Single Mode Approximation) が可能であるということが、本論文における以降の議論の基本的前提となっている。なお、シングルモード近似を採用しない場合の注意点を付録 D に記した。

第 4.2 節で示したボゴリューボフ変換 (4.2.11) は、左辺のミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I に属するラダー演算子と、右辺のリンドラーフォック空間 \mathcal{F}_R に属するラダー演算子とを等号で結んでいる。右辺のリンドラーフォック空間 \mathcal{F}_R に属するラダー演算子は、ハイゼンベルグ描像により、ユニタリー演算子 \hat{G} の作用による時間発展の形で表されている。

この右辺のユニタリー演算子 \hat{G} の作用を、リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_R に属するフォック状態、具体的には、リンドラー真空 $|0,0\rangle_{R,L}$ の時間発展として、シュレーディンガー描像で表すこともできる。その場合、左辺は、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I に属するミンコフスキー真空 $|0\rangle_M = |0,0\rangle_{M1,M2}$ に置き換えられる (付録 B 参照) :

$$|0\rangle_M = \hat{G} |0,0\rangle_{R,L} \quad (4.4.1)$$

$$= \frac{1}{\cosh \theta} \sum_{n=0}^{\infty} (-\tanh \theta)^n |n,n\rangle_{R,L} \quad (4.4.2)$$

$$:= |\text{EPR}\rangle_{R,L} \quad (4.4.3)$$

なお、ロブが一様加速運動を開始する前⁴ は、ロブはアリスがみる真空と同じ真空をみる。また、反ロブもロブと原点对称な運動をするのであるから、ロブが一様加速運動をする前は、反ロブもアリスがみる真空と同じ真空をみる。このため、ロブが一様加速運動をする前は、 $|0\rangle_M = |0,0\rangle_{R,L}$ が成立する。それゆえ、式 (4.4.1) に示すユニタリー演算子 \hat{G} は、ロブの一様加速運動の効果を表す。

そして、上式 (4.4.2) の右辺は、そのユニタリー演算子 \hat{G} の作用によって、左リンドラーくさび状領域 L の場のフォック状態 $|n\rangle_L$ と、右リンドラーくさび状領域 R の場のフォック状態 $|n\rangle_R$ とがエンタングルしたことを表す。即ち、アリスにとってのミンコフスキー真空 $|0\rangle_M$ は、ロブ及び反ロブにとってはエンタングル状態 $|\text{EPR}\rangle_{R,L}$ に相当する。

但し、このエンタングル状態 $|\text{EPR}\rangle_{R,L}$ そのものを直接的に俯瞰することは、原理的に不可能である。これは第 3 章の第 3.4 節で図 3.2 を参照して述べたように、ロブが存在する右リンドラーくさび状領域 R と、反ロブが存在する左リンドラーくさび状領域 L との間には、事象の地平線が介在しているからである。つまり、ロブは、反ロブが存在する左リンドラーくさび状領域 L における物理量その他の情報を一切感知し得ない。

⁴ ここで“ロブが一様加速運動を開始する前”とは、ロブがアリスに対して静止している場合のみならず、ロブがアリスに対して等速直線運動をしている場合も含む。要するに、ロブの運動は加速運動でなければよい。真空はローレンツ不変であるため [18]、ロブがアリスに対して等速直線運動をしている場合であっても、ロブはアリスがみる真空と同じ真空をみる。

そこで、ロブが右リンドラークさび状領域 R で如何なるフォック状態を観測するかを調べるために、式 (4.4.3) に示す合成場 RL の状態 $|\text{EPR}\rangle_{R,L}$ から、左リンドラークさび状領域 L のフォック状態をトレースアウトする。すると、次の混合状態 $\hat{\rho}_{\text{thermal } R}$ が得られる：

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{\text{thermal } R} &:= \text{Tr}_L \left[|\text{EPR}\rangle_{R,L} \langle \text{EPR}| \right] \\ &= \frac{1}{\cosh^2 \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^{2n} \theta |n\rangle_R \langle n|\end{aligned}\quad (4.4.4)$$

式 (4.4.4) は、右リンドラークさび状領域 R の場が、ボース・アインシュタイン分布 (Bose-Einstein distribution) に従って粒子を放射する熱状態 (thermal state) であることを示す (付録 C 参照)。即ち、これがウンルー効果である。

ここでいう“粒子”とは、右リンドラークさび状領域 R の場を量子化して得られるエネルギー量子 (以下、ウンルー粒子という。) を指す。“粒子”が光子である場合には、式 (4.4.4) に示す $\hat{\rho}_{\text{thermal } R}$ は、黒体放射 (black body radiation) の状態そのものである。その放射熱の温度 T は、ロブの固有加速度 a に比例する： $T = (a\hbar)/(2\pi k_B)$ 。

なお、付録 C には、温度 T の具体値を例示した。50 °C 程度の温度 T を得るにしても、ロブの固有加速度 a は莫大な値であることが必要である。従って温度 T それ自体が問題となる可能性は小さい。第 1 章の第 1.1 節で述べたデコヒーレンスは、上記温度 T というよりも、熱状態 $\hat{\rho}_{\text{thermal } R}$ におけるウンルー粒子の数の揺らぎのランダム性に起因する。

4.5 まとめ

以上説明したように、本章では、ミンコフスキー真空 $|0\rangle_M$ と、リンドラーク真空 $|0,0\rangle_{R,L}$ との間の数学的な関係を求めるために、まず、ミンコフスキーラダー演算子と、リンドラークラダー演算子との間の関係を表すボゴリューボフ変換 (4.1.2) を導いた。

次に、そのボゴリューボフ変換 (4.1.2) を簡潔化する目的で、ウンルーモード関数 $\tilde{f}_{k,M1}$, $\tilde{f}_{k,M2}$ を導入した。ウンルーモード関数 $\tilde{f}_{k,M1}$, $\tilde{f}_{k,M2}$ の導入により、簡潔化された新たなボゴリューボフ変換 (4.2.11) が得られた。

次に、そのボゴリューボフ変換 (4.2.11) をシュレーディンガー表示することで、ミンコフスキー真空 $|0\rangle_M$ とリンドラーク真空 $|0,0\rangle_{R,L}$ との間の数学的な関係 (4.4.1)–(4.4.3) を導いた。この結果、アリスにとってのミンコフスキー真空 $|0\rangle_M$ は、ユニタリー演算子 \hat{G} に従ってリンドラーク真空 $|0,0\rangle_{R,L}$ を時間発展させた状態と等しいことが分かった。その時間発展させた状態とは、具体的には、エンタングル状態 $|\text{EPR}\rangle_{R,L}$ である。

即ち、ロブの一樣加速運動の効果を表すユニタリー演算子 \hat{G} は、右リンドラークさび状領域 R の真空場 $|0\rangle_R$ を、左リンドラークさび状領域 L の真空場 $|0\rangle_L$ とエンタングルさせる作用をもつ。一方、右リンドラークさび状領域 R は、事象の地平面によって、左リンドラークさび状領域 L とは断絶されている。従って、右リンドラークさび状領域 R に存在するロブは、エンタングル状態 $|\text{EPR}\rangle_{R,L}$ を全体的に俯瞰することはできず、その片割れを構成する熱状態 $\hat{\rho}_{\text{thermal } R}$ のみを感知する。これがウンルー効果のメカニズムである。

第5章 ウンルー効果をもたらすユニタリー演算子 \hat{G} の役割

第3章までに、アリスとロブの各々にとっての場は、量子化を経てフォック状態とラダー演算子とで表されることを示した。そして、第4章の式(4.4.1)–(4.4.3)では、リンドラー真空 $|0,0\rangle_{R,L}$ が、ウンルー効果を表すユニタリー演算子 \hat{G} の作用によって、エンタングル状態 $|EPR\rangle_{R,L}$ へと時間発展することを示した。

本章では、このユニタリー演算子 \hat{G} の役割を、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I とリンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} とを俯瞰する大局的な観点から解釈する。そのために、一旦、光の場に視点を移す。光の場も、アリス及びロブにとっての場と同様に量子化を経て、フォック状態 $|n\rangle$ とラダー演算子 \hat{a} , \hat{a}^\dagger とで表される(付録E参照)。また、光の場を操作する光学素子によっても、ウンルー効果を表すエンタングル状態 $|EPR\rangle_{R,L}$ と数学的に等価な状態 — 2モードスクイーズド状態と呼ばれる — を形成できる[32]。

そこで、本章では、2モードスクイーズド状態を形成する光学系を、ウンルー効果を表すモデルとして用いる。実体の明確な光学系を考察すると、ユニタリー演算子 \hat{G} の役割をイメージしやすいからである。そして、その光学系のモデルの作用に基づいて、ユニタリー演算子 \hat{G} の役割についての解釈を述べる。

5.1 光学系のモデル

光学系で2モードスクイーズド状態を形成する方法として、(i) パラメトリック下方変換による方法と、(ii) ビームスプリッターで2つのモード¹の光を重ね合わせる方法とが挙げられる。第1章では前者(i)について述べたが、後者(ii)の方が、各モードの光の時間発展が分かりやすい。そこで、ここでは後者(ii)の光学系をモデルとして示す。

図5.1に、その後者(ii)の光学系を示す。この光学系は、各々真空状態 $|0\rangle$ の2つのモード A, B の入力光を、それら2つのモード A, B が互いにエンタングルした2モードスクイーズド状態 $|EPR'\rangle_{A,B}$ の出力光へと時間発展させる。その時間発展は演算子 \hat{G}' で表される。

図5.1に示すように、演算子 \hat{G}' は、演算子 $\hat{S}(r)$, $\hat{S}(-r)$, 及び \hat{B} によって構成される。このうち演算子 $\hat{S}(r)$ 及び $\hat{S}(-r)$ の各々は、スクイージングと呼ばれる作用を光に施す光学素子である非線形光学媒質を表す。また、演算子 \hat{B} は、光を重ね合わせる光学素子であるビームスプリッターを表す。

¹ここでいうモードとは、伝播方向、即ち光の経路(パス)を意味する。

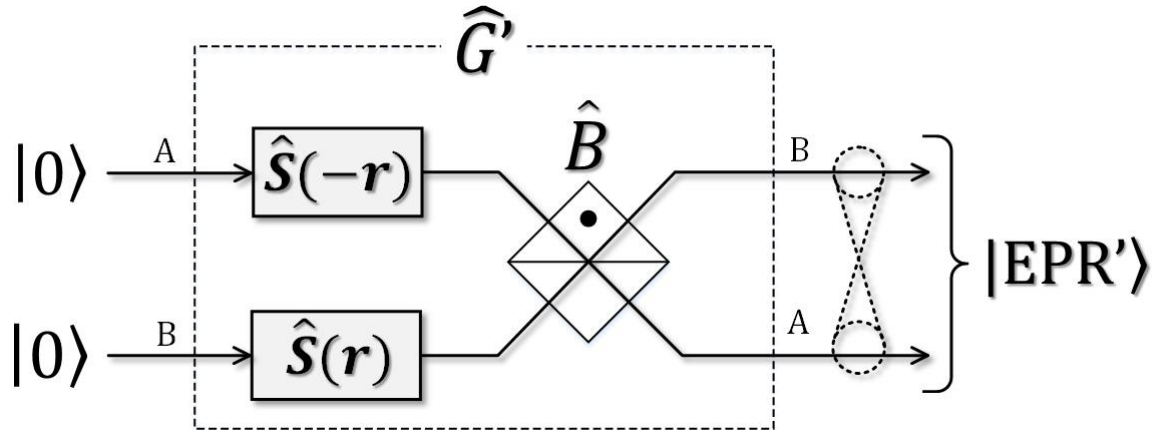


図 5.1: 真空状態 $|0, 0\rangle_{A,B}$ から 2 モードスクイズド状態 $|EPR'\rangle_{A,B}$ を形成する光学系 [40]. この光学系による時間発展はユニタリー演算子 $\hat{G}' := \hat{B}_{AB} (\hat{S}_A(-r) \otimes \hat{S}_B(r))$ で表される.

以下, 図 5.1 に示す演算子 \hat{G}' の作用の説明に先立ち, スクイズングの作用 $\hat{S}(r)$ と, 重ね合わせの作用 \hat{B} について個別に説明する.

5.1.1 スクイズングの作用

スクイズングと呼ばれる物理過程も, 第 1 章の図 1.3 で示したパラメトリック下方変換と同様, 非線形光学媒質によって実現される.

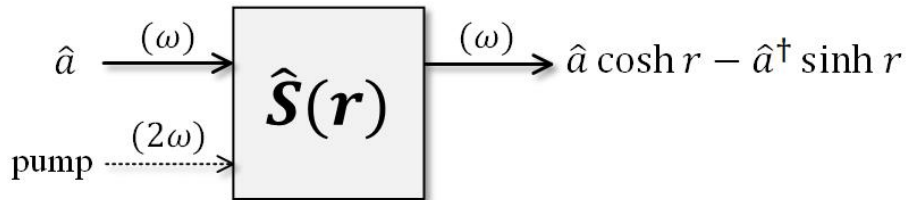


図 5.2: 縮退-光パラメトリック増幅によるスクイズング過程 [40].

図 5.2 に, スクイズングを実現する非線形光学媒質を示す. 角周波数 ω の入射光と, 角周波数 2ω のポンプ光とが非線形光学媒質に入射し, 角周波数 ω の出射光が, 非線形光学媒質から出射する. 出射光は, 入射光とポンプ光との相互作用によって形成される.

このような時間発展の過程を, 縮退-光パラメトリック増幅という. ここでいう“縮退”とは, 出射光の周波数がポンプ光の周波数のちょうど $1/2$ であることを意味する².

² より具体的には, 第 1 章の図 1.3 で, シグナル光とアイドラー光との角周波数が等しく ($\omega_1 = \omega_2$), 両者が共通のモードに入ることを“縮退”と表現している. 即ち, 図 5.2 に示す縮退-光パラメトリック増幅は, 図 1.3 に示した光パラメトリック増幅の特別な場合である.

縮退-光パラメトリック増幅は、次のユニタリー演算子 $\hat{S}(r)$ で表される [40] :

$$\hat{S}(r) = \exp \left[\frac{r}{2} (\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2) \right] \quad (5.1.1)$$

ここで、 r は、ポンプ光の振幅の絶対値と、非線形光学媒質の 2 次の非線形光学定数とに比例する定数である。上式 (5.1.1) で記述されるユニタリー演算子 $\hat{S}(r)$ は、入射光の、一般化運動量の成分³ の揺らぎを絞る作用をもつ。また、 $\hat{S}(-r)$ は、入射光の、一般化座標の成分の揺らぎを絞る作用をもつ。このように、揺らぎを絞るという作用をもつので、縮退-光パラメトリック増幅は、スクイーピングとも呼ばれる。

なお、上式 (5.1.1) では、ポンプ光の時間発展については度外視し、入射光から出射光に至る時間発展のみに着目している。上式 (5.1.1) で、指数部分の $\hat{a}^{\dagger 2}$ の存在は、たとえ入力光が真空状態 $|0\rangle$ であっても、新たに光子対が生成されることを意味する。この場合、出射光 $\hat{S}(r)|0\rangle$ に含まれるその光子対は、ポンプ光によって真空揺らぎを増幅することにより生成されたものと解釈することができる。この意味で、スクイーピングもパラメトリック増幅の一種である。なお、真空をスクイーピングした状態 $\hat{S}(r)|0\rangle$ 及び $\hat{S}(-r)|0\rangle$ は、スクイーズド真空 (squeezed vacuum) 状態と呼ばれる [41]。

5.1.2 ビームスプリッターの作用

次に、上述したスクイーズド真空状態を重ね合わせるビームスプリッターについて説明する。図 5.3 に示すように、ビームスプリッターの作用は、ユニタリー演算子 \hat{B} で表される。

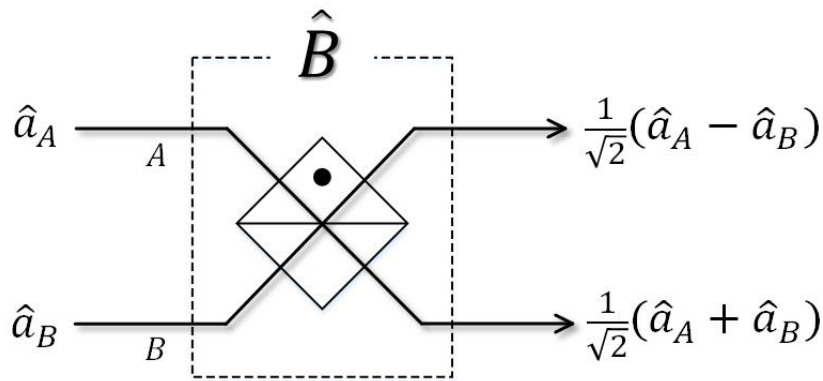


図 5.3: ビームスプリッター

2 つのモードの入射光についての消滅演算子 \hat{a}_A 及び \hat{a}_B は、ユニタリー演算子 \hat{B} により次のように時間発展する [40]:

³ 光の一般化運動量の成分とは、光の \cos 成分を意味し、慣習的にエルミート演算子 \hat{x} で表される。光の一般化座標の成分とは、光の \sin 成分を意味し、慣習的にエルミート演算子 \hat{p} で表される。 \hat{x} と \hat{p} との間には、正準交換関係が成立する (付録 E 参照)。

$$\hat{B}^\dagger \begin{bmatrix} \hat{a}_A \\ \hat{a}_B \end{bmatrix} \hat{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_A \\ \hat{a}_B \end{bmatrix} \quad (5.1.2)$$

図 5.3 に、消滅演算子 \hat{a}_A 及び \hat{a}_B の時間発展の様子を示している．なお、消滅演算子 \hat{a}_A 及び \hat{a}_B は、エルミート演算子ではないためオブザーバブルにはなり得ないが、それぞれ入射光の電場演算子の複素振幅を構成する．そのため、上式 (5.1.2) は、入射光の複素振幅の時間発展をハイゼンベルグ描像で表したものとみることができる．

5.1.3 ビームスプリッターによるスクイーズド真空状態の重ね合わせ

次に、以上説明したユニタリー演算子 $\hat{S}(r)$ 及び \hat{B} の作用を踏まえて、図 5.1 に示した光学系全体の作用 \hat{G}' を調べる．

図 5.1 において、2 モードスクイーズド状態 $|\text{EPR}'\rangle_{A,B}$ は、真空状態 $|0\rangle_A$ の一般化座標成分の揺らぎをスクイーズしたモード A の光 $\hat{S}_A(-r)|0\rangle_A$ と、真空状態 $|0\rangle_B$ の一般化運動量成分の揺らぎをスクイーズしたモード B の光 $\hat{S}_B(r)|0\rangle_B$ とを、ビームスプリッター \hat{B}_{AB} で重ね合わせることで生成される．この過程は、次式によって記述される：

$$|\text{EPR}'\rangle_{A,B} = \hat{B}_{AB} \left[\hat{S}_A(-r) \otimes \hat{S}_B(r) \right] |0,0\rangle_{A,B} \quad (5.1.3)$$

$$= \hat{B}_{AB} \exp \left[\frac{r}{2} \left(\hat{a}_A^\dagger - \hat{a}_A \right)^2 \right] \exp \left[\frac{r}{2} \left(\hat{a}_B^2 - \hat{a}_B^{\dagger 2} \right) \right] \hat{B}_{AB}^\dagger |0,0\rangle_{A,B} \quad (5.1.4)$$

$$= \exp \left[\frac{r}{4} \left(\hat{a}_A^\dagger + \hat{a}_B^\dagger \right)^2 - \frac{r}{4} \left(\hat{a}_A + \hat{a}_B \right)^2 + \frac{r}{4} \left(\hat{a}_A - \hat{a}_B \right)^2 - \frac{r}{4} \left(\hat{a}_A^\dagger - \hat{a}_B^\dagger \right)^2 \right] |0,0\rangle_{A,B} \quad (5.1.5)$$

$$= \exp \left[r \left(\hat{a}_A^\dagger \hat{a}_B^\dagger - \hat{a}_A \hat{a}_B \right) \right] |0,0\rangle_{A,B} \quad (5.1.6)$$

なお、上記の式変形で、式 (5.1.3) から式 (5.1.4) への移行に式 (5.1.1) を用いた．また、式 (5.1.4) から式 (5.1.5) への移行には式 (5.1.2) を用いた．そして、式 (5.1.6) を具体的に計算すると、次式が得られる [41]：

$$|\text{EPR}'\rangle_{A,B} = \frac{1}{\cosh(r)} \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^n(r) |n,n\rangle_{A,B} \quad (5.1.7)$$

上式 (5.1.7) は、モード A の光とモード B の光とがエンタングルしていることを表す．

5.1.4 2 モードスクイーズド状態を形成するユニタリー変換の性質

既述のように、図 5.1 に示す $\hat{S}_A(-r)$ 、 $\hat{S}_B(r)$ 、及び \hat{B}_{AB} の各々は、ユニタリー演算子である．このため、図 5.1 において破線で囲んだ部分の作用を表す演算子 \hat{G}' もまたユニタリー

演算子である。

具体的には、演算子 \hat{G}' は、式 (5.1.3) に示すように、 $\hat{G}' := \hat{B}_{AB} (\hat{S}_A(-r) \otimes \hat{S}_B(r))$ と書け、

$$\hat{G}'^\dagger \hat{G}' = (\hat{S}_A^\dagger(-r) \otimes \hat{S}_B^\dagger(r)) \hat{B}_{AB}^\dagger \hat{B}_{AB} (\hat{S}_A(-r) \otimes \hat{S}_B(r)) = \hat{I} \quad (5.1.8)$$

が確かめられる⁴。即ち、図 5.1 において、左側の真空状態 $|0, 0\rangle_{A,B}$ と、右側の 2 モードスクイーズド状態 $|EPR'\rangle_{A,B}$ とは、ユニタリー演算子 \hat{G}'_{AB} が表すユニタリー変換の関係で結ばれている。そして、ユニタリー変換の重要な性質の 1 つは、入力と出力とを 1 対 1 に対応付けるため、逆変換をもつということである。

この逆変換とは、光学系においては、光を逆向きに入射させることに対応する。実際、図 5.1 に示す光学系は、左側から真空状態 $|0, 0\rangle_{A,B}$ を入射させた場合に、右側に 2 モードスクイーズド状態 $|EPR'\rangle_{A,B}$ の光を出現させるだけでなく、右側から 2 モードスクイーズド状態 $|EPR'\rangle_{A,B}$ の光を入力させた場合には、そのモード AB 間のエンタングルメントを解消させ、左側にセパラブルな真空状態 $|0, 0\rangle_{A,B}$ を出現させる可逆性を有する。

なお、式 (5.1.6) に示すように、ユニタリー演算子 \hat{G}' は、具体的には $\hat{G}' = \exp[r(\hat{a}_A^\dagger \hat{a}_B^\dagger - \hat{a}_A \hat{a}_B)]$ と書ける。このユニタリー演算子 \hat{G}' の指数部分は、ハミルトニアン $\hat{H} \propto i(\hat{a}_A^\dagger \hat{a}_B^\dagger - \hat{a}_A \hat{a}_B)$ を構成する。ユニタリー演算子 \hat{G}' のユニタリー性は、ハミルトニアン \hat{H} のエルミート性に依拠しているとも言える。即ち、ハミルトニアン \hat{H} のエルミート性によって、対生成の過程 $\hat{a}_A^\dagger \hat{a}_B^\dagger$ があると必ずその逆の対消滅の過程 $\hat{a}_A \hat{a}_B$ が存在しなければならない。対生成の過程 $\hat{a}_A^\dagger \hat{a}_B^\dagger$ は、真空状態 $|0, 0\rangle_{A,B}$ を 2 モードスクイーズド状態 $|EPR'\rangle_{A,B}$ に発展させることに寄与し、対消滅の過程 $\hat{a}_A \hat{a}_B$ は、2 モードスクイーズド状態 $|EPR'\rangle_{A,B}$ を真空状態 $|0, 0\rangle_{A,B}$ に発展させることに寄与する。

以上より、図 5.1 に示す光学系においては、ユニタリー演算子 \hat{G}' が、左右の場を可逆的につなぐ役割を果たしているともみることができる。

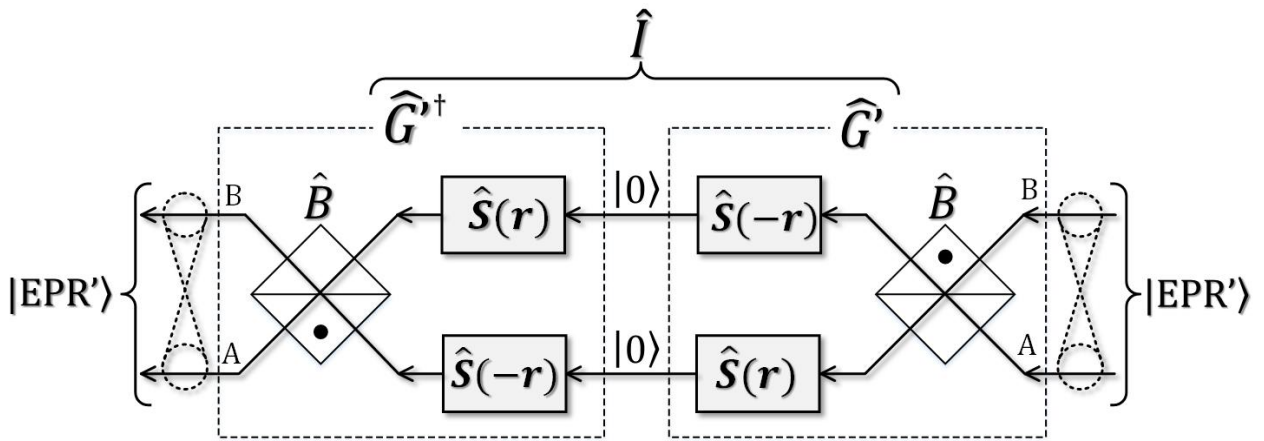


図 5.4: ユニタリー逆変換 \hat{G}'^\dagger を行う光学系の付設による恒等チャンネル \hat{I} の形成。

⁴ 一般に、演算子 \hat{U} は $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = \hat{I}$ ，即ち $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger$ を満たすならばユニタリー演算子である [13][42]

また、既述のように、ユニタリー演算子 \hat{G}' の逆変換が存在するため、その逆変換 \hat{G}'^\dagger を行う光学系を、図 5.1 に示す光学系に付設することも可能である。

図 5.4 に、逆変換 \hat{G}'^\dagger を行う光学系を付設した構成を示す。ひとたび図 5.1 に示す光学系で右側の場に 2 モードスクイーズド状態 $|\text{EPR}'\rangle_{A,B}$ を生成したならば、その光学系に逆変換 \hat{G}'^\dagger を実現する光学系を付設することにより、左側の場にも 2 モードスクイーズド状態 $|\text{EPR}'\rangle_{A,B}$ を出現させることができる。逆変換 \hat{G}'^\dagger を行う光学系だけに着目すると、それは単に真空状態 $|0,0\rangle_{A,B}$ から 2 モードスクイーズド状態 $|\text{EPR}'\rangle_{A,B}$ を生成するものに過ぎない。しかし、元の光学系との組み合わせにおいては、逆変換 \hat{G}'^\dagger を実現する光学系は、元の光学系の作用 \hat{G}' をキャンセルさせ、左右の場を恒等演算子 $\hat{I} = \hat{G}'\hat{G}'^\dagger$ でつなぐ役割を果たす。このため、左側の場に出現した 2 モードスクイーズド状態 $|\text{EPR}'\rangle_{A,B}$ は、恒等演算子 \hat{I} を通じて右側の場から取り出されたものであるとも解釈することができる。

以上のように、図 5.1 に示したユニタリー演算子 \hat{G}' 、及び図 5.4 に示した恒等演算子 \hat{I} は、左右の場を可逆的につなぐ役割を果たすものと解釈することができる。

以下、本論文では、このように左右の場、より具体的には、左右の場のフォック空間を可逆的につなぐ機能を“量子チャンネル”と呼ぶことにする⁵。また、恒等演算子 \hat{I} で表される量子チャンネルを特に“恒等チャンネル”と呼ぶことにする。

5.2 ウンルー効果をもたらすユニタリー演算子 \hat{G} の解釈

次に、以上説明した解釈を、ウンルー効果をもたらすユニタリー演算子 \hat{G} に当てはめる。

第 4 章の式 (4.4.1) 及び (4.4.3) から得られる式、 $\hat{G}|0,0\rangle_{R,L} = |\text{EPR}\rangle_{R,L}$ は、一様加速運動の効果を表すユニタリー演算子 \hat{G} の作用によって、リンドラー真空 $|0,0\rangle_{R,L}$ がエンタングル状態 $|\text{EPR}\rangle_{R,L}$ に発展することを表す。

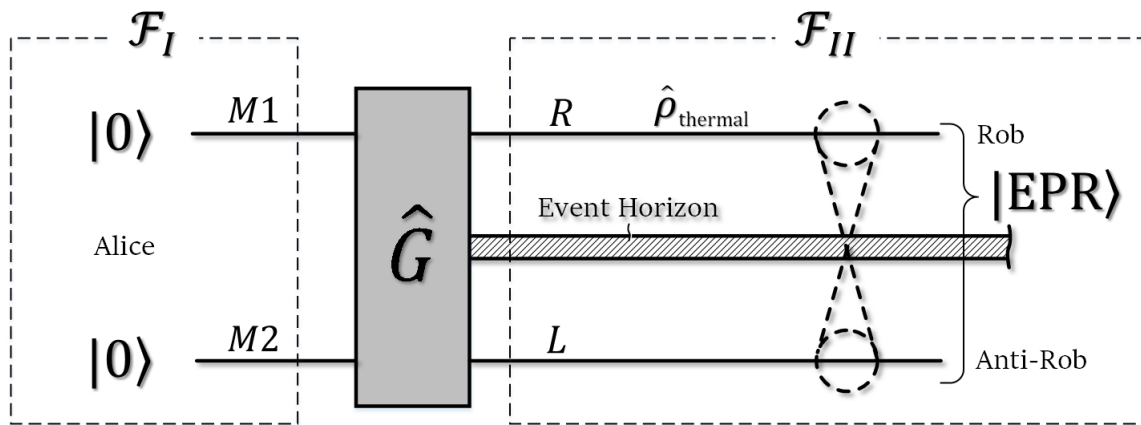


図 5.5: 量子チャンネル \hat{G} でつながれたミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} .

⁵ 一般的には、量子チャンネルとは、量子系の実現可能な任意の時間発展を表す TPCP (Trace Preserving Completely Positive) 写像を指すが、ユニタリー変換も恒等変換も TPCP 写像の特別な場合に該当する。

ここで、リンドラー真空 $|0,0\rangle_{R,L}$ は、ロブが一樣加速運動を開始する前の真空を表す。一樣加速運動の開始前はロブも慣性系に属し、特殊相対論によれば、真空はローレンツ不変である [18]。従って、一樣加速運動の開始前は、 $|0,0\rangle_{R,L} = |0,0\rangle_{M1,M2}$ と書ける。

そうすると、第 4 章の式 (4.4.1) 及び (4.4.3) は、次の関係を表しているとも言える：

$$\hat{G}|0,0\rangle_{M1,M2} = |\text{EPR}\rangle_{R,L} \tag{5.2.1}$$

図 5.5 に、上式 (5.2.1) に基づくユニタリー演算子 \hat{G} の解釈を示す。つまり、ユニタリー演算子 \hat{G} は、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I と、リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} とを可逆的につなぐ役割を果たしている [43][44]⁶。従って、ユニタリー演算子 \hat{G} は、前節の図 5.1 でモデル化した \hat{G}' と同様、量子チャンネルとみることができる。

なお、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I と、リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} とがユニタリー同値であることの厳密な根拠については、付録 D で述べたとおりである。

5.3 ウンルー効果を表すエンタングル状態 $|\text{EPR}\rangle$ の取り出し

次に、図 5.4 に示した状況と同様に、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I と、リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} との間に、既述の恒等チャンネル \hat{I} を形成することを考える⁷。

図 5.6 に、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I においてアリスが逆変換 \hat{G}^\dagger の操作を行うことにより、恒等チャンネル \hat{I} が構成された状況を示す。

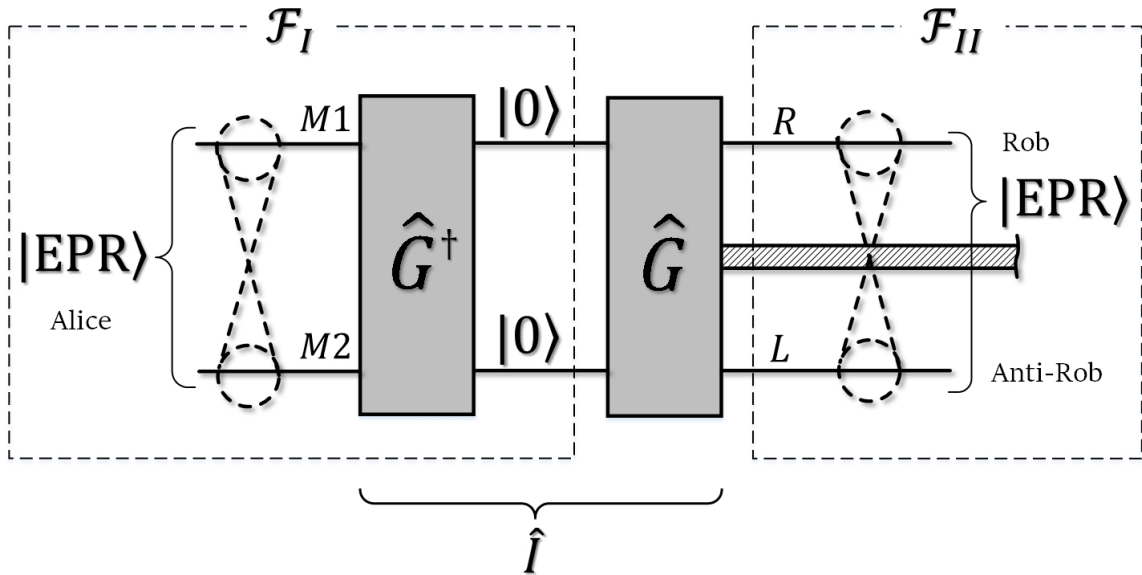


図 5.6: 恒等チャンネル \hat{I} の形成によるエンタングル状態 $|\text{EPR}\rangle_{M1,M2}$ の取り出し。

⁶ 文献 [43] は、ユニタリー演算子 \hat{G} を、 S 行列 (S-Matrix) に相当するものと解釈している。

⁷ 本論文の第 5.3 節以降の着想については、いずれの文献にも開示がない。

ウンルー効果をもたらす変換 \hat{G} は、入力と出力とを 1 対 1 に対応付けるので、数学的に逆変換 \hat{G}^\dagger が存在する。従って、逆変換 \hat{G}^\dagger の操作を行うことは少なくとも理論的には可能である。そこで、具体的に逆変換 \hat{G}^\dagger をどのように実現するかは今後の課題として⁸、以下、逆変換 \hat{G}^\dagger の操作がもたらす効果を述べる。

アリスが行う逆変換 \hat{G}^\dagger の操作だけに着目すると、その逆変換 \hat{G}^\dagger の操作自体は、単にミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I 内で、ミンコフスキー真空 $|0, 0\rangle_{M1, M2}$ からエンタングル状態 $|\text{EPR}\rangle_{M1, M2}$ を生成するものに過ぎないように見える。しかし、この逆変換 \hat{G}^\dagger の操作は、ウンルー効果をもたらす変換 \hat{G} との組み合わせにおいては、図 5.4 に示した光学系 \hat{G}^\dagger と同様、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I とリンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} との間に、恒等チャンネル $\hat{I} = \hat{G}\hat{G}^\dagger$ を構成する役割を果たす。

従って、ひとたびロブの一樣加速運動によってリンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} にエンタングル状態 $|\text{EPR}\rangle_{R, L}$ が形成された後は、アリスの逆変換 \hat{G}^\dagger の操作によって恒等チャンネル \hat{I} を構成することにより、その恒等チャンネル \hat{I} を通じて、エンタングル状態 $|\text{EPR}\rangle_{R, L}$ をミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I へと取り出すことができる。この場合にミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I に出現したエンタングル状態 $|\text{EPR}\rangle_{M1, M2}$ は、アリスの逆変換 \hat{G}^\dagger の操作を通じて、リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} から取り出されたものであると解釈することができる。

本節の最後に、図 5.1 に示す光学系のモデルと、図 5.5 に示す状況との相違点を述べる。

図 5.1 の横方向は、空間的な長さを表す。そして、図 5.1 では、量子状態を担う光子が、実体のある量子チャンネル \hat{G}' を通過する。

これに対し、図 5.5 の横方向は、空間的な長さを表していない。アリスとロブとは同じ場をみているのであり、その場が、アリスのミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I では真空状態として記述され、ロブ及び反ロブのリンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} ではエンタングル状態として記述されることを図 5.5 は表している。量子チャンネル \hat{G} は、量子状態を担う粒子を通過させる実体ではなく、フォック空間 \mathcal{F}_I 及び \mathcal{F}_{II} の一方における量子状態の確定を他方にマッピングさせる数学的機能に過ぎない。図 5.6 についても同様である。

5.4 まとめ

以上説明したように、ウンルー効果をもたらすユニタリー演算子 \hat{G} は、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I と、リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} とを可逆的につなぐ量子チャンネルの役割を果たしている。また、アリスがミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I において逆変換 \hat{G}^\dagger の操作を行うことにより、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I と、リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} とを可逆的につなぐ恒等チャンネル \hat{I} を構成することができる。

そして、恒等チャンネル \hat{I} の構成により、ウンルー効果を表す、左リンドラーくさび状領域 L と右リンドラーくさび状領域 R との間の量子エンタングルメントを、エンタングル状

⁸ 逆変換 \hat{G}^\dagger は、理論的には、場のモード $M1, M2$ の各々をスクイーズする手段と、スクイーズされたモード $M1, M2$ の空間周波数をそろえる手段と、空間周波数がそろえられたモード $M1, M2$ を重ね合わせる手段とで実現できると考えられる。なお、第 4 章の式 (4.2.5) 及び (4.2.9) に示したように、ウンルー効果をもたらす変換 \hat{G} はロブの固有加速度 a に依存する。従って、逆変換 \hat{G}^\dagger もまたロブの固有加速度 a に依存したものでなければならない。

態 $|\text{EPR}\rangle_{M1,M2}$ としてミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I に取り出すことができる.

なお, 取り出されたエンタングル状態 $|\text{EPR}\rangle_{M1,M2}$ は, アリスが, 量子情報処理の資源として活用できる. 即ち, 恒等チャンネル \hat{I} の構成によるエンタングル状態 $|\text{EPR}\rangle_{M1,M2}$ の取り出しは, ウンルー効果の量子情報科学への応用事例の 1 つである.

以下, 本応用事例のメリットについて述べる. 既述のように, 事象の地平面の存在により, 左リンドラーくさび状領域 L にはアクセスが原理的に不可能である. このため, 左リンドラーくさび状領域 L と右リンドラーくさび状領域 R との間のエンタングル状態 $|\text{EPR}\rangle_{R,L}$ は, 直接的には利用できない.

これに対し, 本応用事例では, そのエンタングル状態 $|\text{EPR}\rangle_{R,L}$ をミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I に取り出す. ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I においては, アリスがモード $M1$ 及び $M2$ の双方にアクセス可能であるため, モード $M1$ 及び $M2$ 間に取り出された状態 $|\text{EPR}\rangle_{M1,M2}$ はエンタングル状態としての利用が可能である. これが本応用事例のメリットである.

第6章 閉じた時間的曲線を利用した量子エンタングルメントの形成

前章では、ウンルー効果の応用事例の1つとして、恒等チャンネル \hat{I} を用いて、アリスが無限準位系のエンタングル状態 $|\text{EPR}\rangle_{M_1, M_2}$ を取得する構成を示した。

本章では、ウンルー効果のもう1つの応用事例として、アリスが保有する2準位系 A と、ロブが保持する2準位系 B とを、恒等チャンネル \hat{I} を用いてエンタングルさせる手法、つまり一対の2準位系 A, B のエンタングル状態 $|\Phi(n)\rangle_{A, B}$ を形成する手法を述べる。

このエンタングル状態 $|\Phi(n)\rangle_{A, B}$ を形成するために、恒等チャンネル \hat{I} を用いて、アリス及びロブにとっての場に、閉じた時間的曲線（CTC : Closed Timelike Curve）を形成する。ここでCTCとは、それに沿えば過去の自身と出会うような世界線のことである。

以下、まず、CTCに関する背景を述べ、次いで、場のCTCのモデルとして、量子テレポーテーションについて述べる。その後、場にCTCを形成する手法を述べ、最後に、その場のCTCを用いてエンタングル状態 $|\Phi(n)\rangle_{A, B}$ を形成する手法を述べる。

6.1 CTCに関する背景

近時、アインシュタイン方程式の真空解に現れる重力波の存在が実験的に確かめられ、これまでの様々な一般相対論的現象の確認の積み上げと相まって、アインシュタイン方程式の正しさは、ますます確固たるものとなった。興味深いことに、アインシュタイン方程式の解の中には、CTCの存在を示すものがある[45]。また、CTCの存在に起因する、いわゆるタイムパラドックスを解決する解釈理論が提案されている[46][47]。但し、一般相対論の分野では、非現実的に強い時空のゆがみによって形成されるCTCは、あくまでも数学的な可能性の1つに過ぎないという見解が通説となっている。

一方、量子情報科学の分野においては、量子テレポーテーションの過程で、転送したい量子状態によってCTCが構成されているとの報告がある[48][49][50][51][52][53]。量子テレポーテーションは、時空のゆがみを必要とせずに実現可能である。また、量子テレポーテーションにおいては、CTCが構成された成功事象であることが、量子状態の転送の完了時点ではじめて判明する。そして、その時点ではもうCTCは存在しない。このため、CTCによって超光速の通信ができるといった因果律の破綻が生じ得ない。

しかし、CTCを有効活用する方法については、現状、未だ十分な検討がなされているとは言い難い。また、量子情報科学の分野において、量子テレポーテーション以外の状況下でCTCを構成した事例がこれまでみられない。

以上の背景に鑑み、本章では、ウンルー効果が発現する状況下において、アリス及びロブにとっての場に CTC を形成する事例を提案する。また、本章では、その場の CTC を、一対の 2 準位系 A, B のエンタングル状態 $|\Phi(n)\rangle_{A,B}$ の形成に活用する事例を提案する。

6.2 場の CTC のモデル

場の CTC について述べる前に、理解を容易にするために、場の CTC のモデルとして、量子テレポーテーションの CTC を紹介する。また、その量子テレポーテーションの CTC を、一対の 2 準位系 A, B のエンタングル状態の形成に活用する事例の提案を述べる。

6.2.1 事後選択された量子テレポーテーション

ベネット (C. H. Bennett) によれば、量子テレポーテーションの過程では確率的に CTC が構成されている [48]。ここで“確率的に”とは、ベル測定の結果 $\{\hat{I}, \hat{\sigma}_X, \hat{\sigma}_Y, \hat{\sigma}_Z\}$ のうちの \hat{I} 、即ち、受け手側でのユニタリー変換が不要となる事象（以下、成功事象という。）が生じた場合には、という意味である。その成功事象だけに着目することを、複数回の試行の後に成功事象を選び取るという意味で、“事後選択する”と表現する。

図 6.1 に、事後選択された量子テレポーテーションのスキームを示す。時刻 t_0 で、エンタングル源が、ベル状態 $|\text{Bell}\rangle_{Y,Z} := (|00\rangle_{Y,Z} + |11\rangle_{Y,Z})/\sqrt{2}$ の量子ビット Y と Z を出射する。時刻 t_0 より後の時刻 t_1 で、量子ビット X が状態 $|\psi\rangle_X := a|0\rangle_X + b|1\rangle_X$ ($a, b \in \mathbb{C}$) に準備される。その後、時刻 t_2 で、量子ビット X と Y がベル測定 “ $\langle \text{Bell} |_{X,Y}$ ” に供される。ベル測定の結果は、既述のとおり “ \hat{I} ” である。この場合、量子ビット Z に何らのユニタリー変換を施すことなく、量子ビット Z の状態が $|\psi\rangle_Z$ に確定する。

CTC が構成されるメカニズム

以下、図 6.1 に示す時空図に CTC が構成されていると言える理由を述べる。なお、図 6.1 では、CTC を明示するために、一般的な量子テレポーテーションの場合とは異なり、量子ビット X の世界線を量子ビット Y, Z の世界線と交差させた¹。

一般に、弱測定 (weak measurement) の理論によれば、量子系の、始状態 $|i\rangle$ と終状態 $\langle f|$ との間の状態 — 過渡状態 (transient state) と呼ばれる — は、密度演算子の自然な拡張として、 $|i\rangle\langle f|/\langle f|i\rangle$ と表される。そうすると、事後選択された量子テレポーテーションにおいて、始状態 $|\psi\rangle_X \otimes |\text{Bell}\rangle_{Y,Z}$ の準備の完了時点と、終状態としてのベル状態 “ $\langle \text{Bell} |_{X,Y}$ ” の時点との間における量子ビット X, Y, Z の過渡状態 $\hat{\rho}_{X,Y,Z}$ は、次のように書ける [54]：

$$\hat{\rho}_{X,Y,Z} = \sum_{j,k=0,1} |\psi\rangle_X \langle k| \otimes |j\rangle_Y \langle k| \otimes |j\rangle_Z \langle \psi| \quad (6.2.1)$$

¹ 従って、送り手が遠隔の受け手に量子状態 $|\psi\rangle$ を転送するという、一般的な量子テレポーテーションの目的は没却される点に注意。図 6.1 は、あくまでも CTC が構成されるスキームを例示したものに過ぎない。

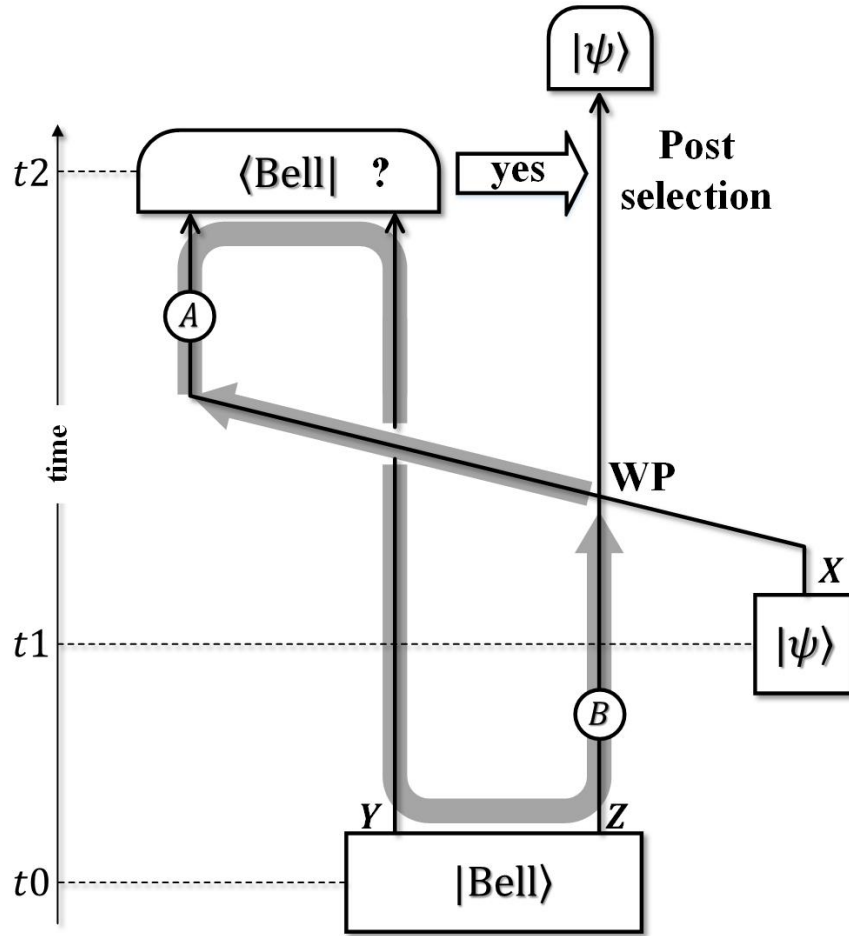


図 6.1: 事後選択された量子テレポーテーションのスキーム. CTC を明示するために, 量子ビット X の世界線を量子ビット Y, Z の世界線と交差させた. この場合, 量子ビット Z は, 世界点 WP において, “過去の自分自身” X に出会ったと考えられる.

まず, 量子ビット Y について検討する. 上式 (6.2.1) を用いると量子ビット Y の過渡状態 $\hat{\rho}_Y$ が次のように求まる:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_Y &= \text{Tr}_{X,Z} [\hat{\rho}_{X,Y,Z}] = \left(a|0\rangle + b|1\rangle \right)_Y^* \left(\langle 0|a^* + \langle 1|b^* \right)^* \\ &:= |\psi^*\rangle_Y \langle \psi^*| \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

このように, 事後選択した場合には, 量子ビット Y の過渡状態は, 転送したい状態 $|\psi\rangle$ の複素共役 $|\psi^*\rangle$ に相当する. そして, 一般に, 複素共役がとられた量子状態は, 時間を反転させた結果を表す (付録 F 参照). このため, 図 6.1 の時空図において, 状態 $|\psi^*\rangle_Y$ の量子ビット Y が時刻 t_0 から時刻 t_2 まで移動することは, 状態 $|\psi\rangle_Y$ の量子ビット Y が時刻 t_2 から時刻 t_0 まで時をさかのぼることと等価である, という解釈が可能となる².

² この解釈は, ちょうど, 反粒子の波動関数が, 対応する粒子の波動関数の複素共役で表され, かつ時間を逆行する反粒子と, 時間を逆行する粒子とが等価であると解釈できると整合する.

次に、量子ビット Z について検討する。量子ビット Z の状態が $|\psi\rangle$ であると判明するのは時刻 t_2 であるが、時刻 t_0 から時刻 t_2 までの間、量子ビット Z に対しては何らの操作も施されない。従って、事後選択した場合に限り、量子ビット Z は、エンタングル源から出射された時刻 t_0 の時点で既に状態 $|\psi\rangle$ であったと考えられ得る。実際、上式 (6.2.1) を用いると、量子ビット Z の過度状態が $|\psi\rangle$ であることが確かめられる：

$$\hat{\rho}_Z = \text{Tr}_{X,Y} [\hat{\rho}_{X,Y,Z}] = |\psi\rangle_Z \langle\psi| \quad (6.2.3)$$

以上より、図 6.1 の時空図においては、転送したい状態 $|\psi\rangle$ の移動の軌跡を次のようにたどることができる。まず、転送したい状態 $|\psi\rangle$ は、量子ビット X を通じて、時刻 t_1 から時刻 t_2 まで移動する。次に、時刻 t_2 において同状態 $|\psi\rangle$ が量子ビット X から量子ビット Y に担持し直され、量子ビット Y を通じて、同状態 $|\psi\rangle$ が時刻 t_0 まで時間を逆行する。次に、時刻 t_0 において同状態 $|\psi\rangle$ が量子ビット Y から量子ビット Z に担持し直され、量子ビット Z を通じて、同状態 $|\psi\rangle$ が時刻 t_2 に向かって進む。

興味深いことに、転送したい状態 $|\psi\rangle$ は、はじめに時刻 t_1 で生成されたはずであるが、それよりも過去の時刻 t_0 に、量子ビット Y, Z において既に存在していたことになる。そして、量子ビット X と量子ビット Z とが互いに区別のつかない同種粒子であるとする、量子ビット Z は、図 6.1 に示す世界点 WP において、“過去の自分自身” X に出会ったと考えられる。これが、図 6.1 の時空図に CTC が構成されると言える理由である。

最終測定

ところで、ベル測定の結果 \hat{I} が得られた場合、量子ビット Z の状態は $|\psi\rangle$ に確定するのであるから、ベル測定の後に、仮に量子ビット Z に対し、状態が $|\psi\rangle$ であるか、 $|\psi\rangle$ に直交する状態 $|\psi_\perp\rangle$ であるか、を判定する射影測定を行うと、必ず、 $|\psi\rangle$ であるという測定結果を得る。従って、図 6.1 において、量子ビット Z は、一般性を失うことなく、その世界線の終端の位置において、測定で状態 $|\psi\rangle$ に射影されたとみなしてもよい [42]。

以下では、この量子ビット Z に対する測定を、最終測定³ と呼ぶこととし、最終測定で量子ビット Z が $|\psi\rangle$ に射影されたことまで含めて事後選択するものとする。

6.2.2 CTC を用いたエンタングル状態 $|\Phi(|a|^2)\rangle_{A,B}$ の形成

次に、上述した事後選択された量子テレポーテーションの CTC を、一对の 2 準位系 A, B をエンタングルさせることに活用する手法の提案を述べる。

図 6.1 に示すように、一方の 2 準位系 A は、量子ビット X と相互作用させる。他方の 2 準位系 B は、量子ビット Z と相互作用させる。相互作用の過程は、制御 NOT (CNOT: Controlled-Not) 演算、 $|0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{\sigma}_X$ で記述されるものとする。

³文献 [42] では、このような測定を Implicit Measurement (暗黙測定) と呼んでいる (文献 [42] の第 187 ページ参照)。

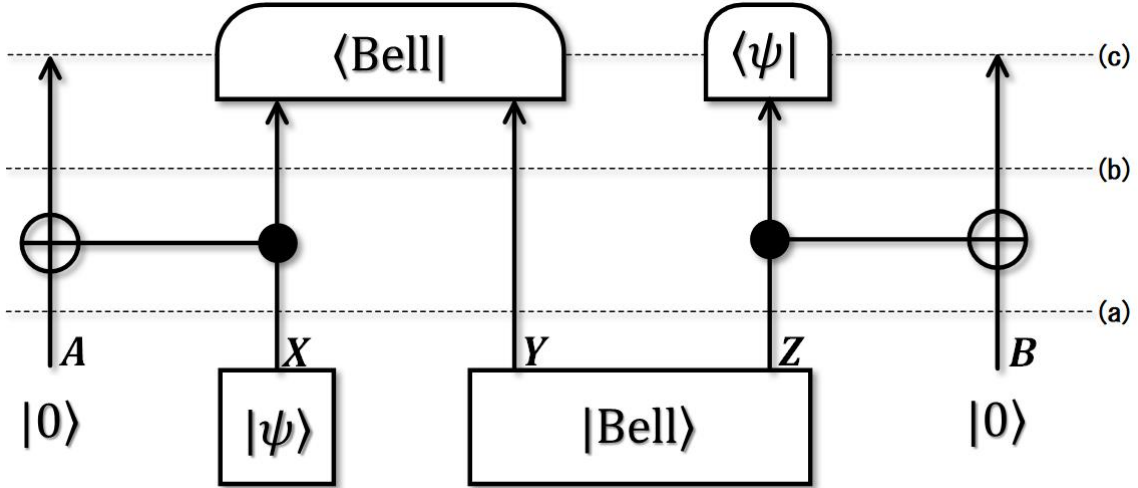


図 6.2: 事後選択される量子テレポーテーションに一对の 2 準位系 A, B が相互作用する状況を示す量子回路. 2 準位系 A, B は, ベル測定 “ $\langle \text{Bell} |_{X,Y}$ ” とは別途に行われる最終測定 “ $\langle \psi |_Z$ ” によって, エンタングル状態 $|\Phi(|a|^2)\rangle_{A,B}$ へと射影される.

図 6.2 に, 図 6.1 のスキームに等価な量子回路を示す. 系 A, X, Y, Z, B の各々の量子状態は, 図 6.2 に示す段階 (a) から (c) の順に, 以下のように発展及び収縮する. なお, 以下では, 簡単のため, 途中, 規格化定数は省略する.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & |0\rangle_A \otimes (a|0\rangle_X + b|1\rangle_X) \otimes (|00\rangle_{Y,Z} + |11\rangle_{Y,Z}) \otimes |0\rangle_B \\
 & \downarrow \text{CTC との相互作用: CNOT} \\
 \text{(b)} \quad & (a|00\rangle_{A,X} + b|11\rangle_{A,X}) \otimes (|000\rangle_{Y,Z,B} + |111\rangle_{Y,Z,B}) \\
 & \downarrow \text{ベル測定: } \langle 00 |_{X,Y} + \langle 11 |_{X,Y} \\
 & a|000\rangle_{A,Z,B} + b|111\rangle_{A,Z,B} \tag{6.2.4}
 \end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad \frac{|a|^2}{\sqrt{|a|^4 + |b|^4}} |00\rangle_{A,B} + \frac{|b|^2}{\sqrt{|a|^4 + |b|^4}} |11\rangle_{A,B} := |\Phi(|a|^2)\rangle_{A,B} \tag{6.2.5}$$

式 (6.2.5) に示すように, $|a|, |b| \neq 0$ の場合, 最終測定で 2 準位系 A, B がエンタングル状態 $|\Phi(|a|^2)\rangle_{A,B}$ に射影される⁴. 特に, $|a| = |b|$ の場合, $|\Phi(|a|^2)\rangle_{A,B}$ は最大エンタングル状態を表す. 以上のように, CTC をエンタングル状態 $|\Phi(|a|^2)\rangle_{A,B}$ の形成に活用できる.

⁴ なお, 2 準位系 A, B と CTC との相互作用の結果, ベル測定結果が \hat{I} であっても, 最終測定では量子ビット Z が $|\psi_{\perp}\rangle$ にも射影されうる. しかし, ここでは CTC の存在を保証するため, 最終測定で量子ビット Z が $|\psi\rangle$ に射影されたことまで含めて事後選択するものとする. また, その場合, [2 準位系 A, B に形成されるエンタングル状態 $|\Phi(|a|^2)\rangle_{A,B}$ のエンタングル量] \leq [元の量子ビット Y, Z 間のエンタングル量] であることを断っておく. 図 6.2 示す量子回路は実用的な有用性を企図したものではなく, あくまでも, CTC をエンタングル状態の形成に活用する物理モデルとなり得る事象を示したものの過ぎない.

6.2.3 量子テレポーテーションの CTC についての考察

既述のように、量子ビット X, Y, Z によって CTC が構成されるので、以下では、量子ビット X, Y, Z をいずれも CTC と表現する。

1. 2 準位系 A と B がエンタングルする過程をみると、式 (6.2.4) に示すように、一旦、相互作用によって 2 準位系 A, B と CTC との 3 者に量子相関が形成される。2 準位系 A, B と、CTC との間の量子相関を断ち切り、2 準位系 A, B 間のみ量子相関を残すためには、最終測定 “ $\langle\psi|_Z$ ” が必要である。実際、最終測定を行わないならば、たとえ式 (6.2.4) で $a = b = 1/\sqrt{2}$ であっても、2 準位系 A と B はエンタングルしない:

$$\text{Tr}_Z \left[|\text{GHZ}\rangle_{A,Z,B} \langle\text{GHZ}| \right] = \frac{1}{2} \hat{I}_{A,B} \quad (6.2.6)$$

また、最終測定は、CTC が、たとえ 2 準位系 A, B からの相互作用を受けても、状態 $|\psi\rangle$ によって構成されている、という自己無矛盾性を保証するためにも必要な操作である。以上より、最終測定を含めてはじめて、量子エンタングルメントの形成に活用可能な CTC が構成されると言える。

2. 2 準位系 A, B に形成された量子エンタングルメントは、量子テレポーテーションの資源として準備した量子エンタングルメントに由来する。一方、量子ビット Y, Z のベル状態への準備、量子ビット X, Y のベル測定、及び量子ビット Z の最終測定は、CTC を構成する手段である。そこで、これらの操作を度外視した場合、2 準位系 A と B の各々における局所操作としての CNOT だけで、CTC から量子エンタングルメントを得たことになる。このことは、量子エンタングルメントは局所操作では生成され得ない、という基本法則とどのように整合するのだろうか。

この点については、次のように考える。2 準位系 A と B が、たとえ相対論の意味で空間的に離れていても各々の局所操作だけで両者がエンタングルしたのは、CTC が、2 準位系 A と B を直接に相互作用させる役割を果たしたためである。即ち、CTC 上における空間的に離れた 2 つの世界点の各々での局所操作は、それら 2 つの世界点にまたがる大局操作と等価な結果をもたらす得る。

3. CTC を構成する状態 $|\psi\rangle$ は、 $|b| = 0$ のとき、古典ビット “0” に対応する状態 $|0\rangle$ となり、 $|a| = 0$ のときにも、古典ビット “1” に対応する状態 $|1\rangle$ となる。状態 $|\psi\rangle$ がこれら古典ビットに対応する、いわば古典的な状態となる $b = 0$ 又は $a = 0$ のとき、式 (6.2.5) に示す状態 $|\Phi(|a|^2)\rangle_{A,B}$ はエンタングル状態にならない。つまり、CTC を量子エンタングルメントの形成に活用できない。また、CTC を構成する状態 $|\psi\rangle\langle\psi|$ が任意の混合状態のときにも、CTC をエンタングル状態の形成に活用できないことが分かる。なお、そもそも、混合状態は CTC の概念になじまないと言える。

これに対し、CTC を構成する状態 $|\psi\rangle$ が重ね合わせ状態となる非古典的なとき、即ち $|a|, |b| \neq 0$ のときに、式 (6.2.5) に示す状態 $|\Phi(|a|^2)\rangle_{A,B}$ がエンタングル状態となる。つまり、CTC を量子エンタングルメントの形成に活用できる。

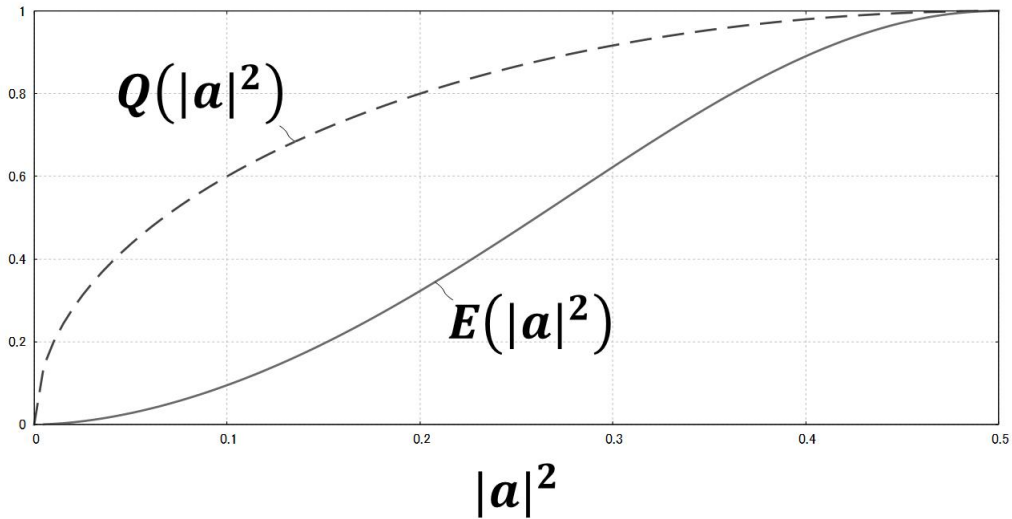


図 6.3: CTC の非古典性の度合いを表すコヒーレンス強度 $Q(|a|^2)$ と、CTC を用いて形成されるエンタングルメントの量を表すフォンノイマンエントロピー $E(|a|^2)$ とのグラフ。

以上の事実より、CTC を用いて形成される量子エンタングルメントの量は、CTC を構成する状態 $|\psi\rangle$ の非古典的性質の度合い（以下、非古典度という。）に依存するのではないかと推定される。そこで、以下、CTC を構成する状態 $|\psi\rangle$ の非古典度と、その CTC を用いて形成できる量子エンタングルメントの量とを定量的に調べる。

CTC を構成する状態 $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ の非古典度は、密度演算子の非対角要素、 ab^* , a^*b の大きさ $|ab^*| = |a^*b| = |a||b|$ によって定量化するものとする。これは、非対角要素の大きさはコヒーレンスの強さを表し、かつコヒーレンスこそが量子力学特有の性質だからである。具体的には、非古典度を表すものとして、次のコヒーレンス強度 $Q(|a|^2)$ を定義する：

$$Q(|a|^2) = 2\sqrt{|a|^2|b|^2} \quad (6.2.7)$$

一方、CTC を用いて形成できる量子エンタングルメントの量は、式 (6.2.5) に示す状態 $|\Phi(|a|^2)\rangle_{A,B}$ のフォンノイマンエントロピー [13] として、以下のように定義される：

$$E(|a|^2) = \frac{|a|^4}{|a|^4 + |b|^4} \log_2 \frac{|a|^4 + |b|^4}{|a|^4} + \frac{|b|^4}{|a|^4 + |b|^4} \log_2 \frac{|a|^4 + |b|^4}{|b|^4} \quad (6.2.8)$$

図 6.3 に、コヒーレンス強度 $Q(|a|^2)$ 及びフォンノイマンエントロピー $E(|a|^2)$ のグラフを示す。CTC の非古典度を表すコヒーレンス強度 $Q(|a|^2)$ の増大に伴って、形成されるエンタングルメントの量を表すフォンノイマンエントロピー $E(|a|^2)$ が増大する。

これより、CTC を構成する状態 $|\psi\rangle$ の非古典度が大きいほど、その CTC から取り出せるエンタングルメント量が大きいことが分かった。

6.3 場の CTC を用いたエンタングル状態の形成

次に, CTC を構成する媒体を量子ビットから場に変更した事例の提案を述べる.

なお, 場を利用したエンタングル状態の形成については, 既にレズニック (B. Reznik) の報告がある [63]. しかし, その報告において場は CTC を構成するものではなく, ウンルー効果が発現する舞台でもない⁵. CTC をエンタングル状態の形成に活用した事例は, これまでみられない.

6.3.1 場の CTC の形成方法

まず, 場の CTC がどのようにして構成されるかを説明する.

図 6.4 に, アリスとロボの世界線を示す. 簡単のため, アリスは静止しているものとする. 静止も慣性運動の一種である. ロブは無尽遠方から減速しながらアリスに近づいてきて, アリスに最も近づいた時点で静止し, その後, 加速しながら無尽遠方に去ってゆく.

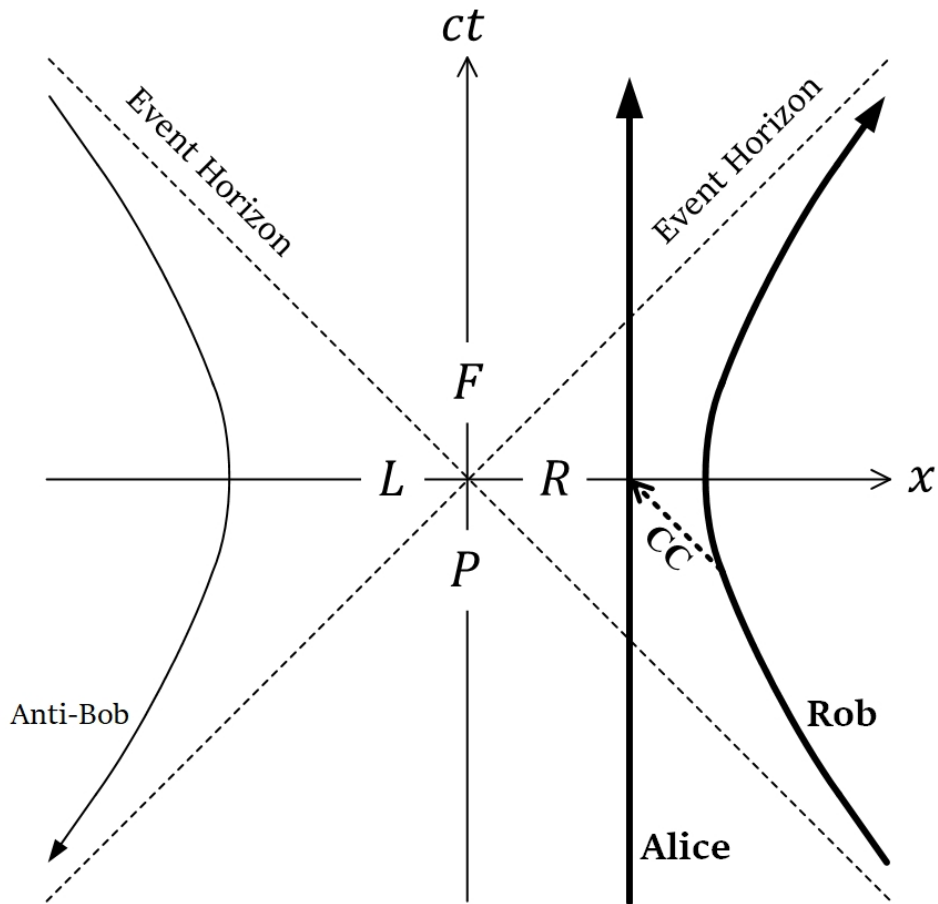


図 6.4: アリスとロボの世界線. 図中の CC は, ロブからアリスに対して行う古典通信を表す.

⁵ 文献 [63] と本研究との相違点については, 後に改めて説明する.

場の CTC は、アリスの世界線が右リンドラーくさび状領域 R に進入しており、アリスとロブとが右リンドラーくさび状領域 R における共通の場（以下、共通場と呼ぶ。）をみている状況下で形成される。共通場は、当初、アリスからみて真空状態 $|0, 0\rangle_{M1, M2}$ にあり、ロブからみると熱状態 $\hat{\rho}_{\text{thermal } R}$ にある。

まず、アリスは、ロブがみる量子状態と同じ量子状態を共通場にみるために、第 5 章で述べた逆ユニタリー変換 \hat{G}^\dagger を、共通場のモード $M1, M2$ に施す。これにより、第 5 章の図 5.6 に示したように、アリスにとっての共通場のモード $M1, M2$ を記述するミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I と、ロブにとっての共通場のモード R を記述するリンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} とが、可逆的な恒等チャンネル $\hat{I} = \hat{G}\hat{G}^\dagger$ でつながれる。

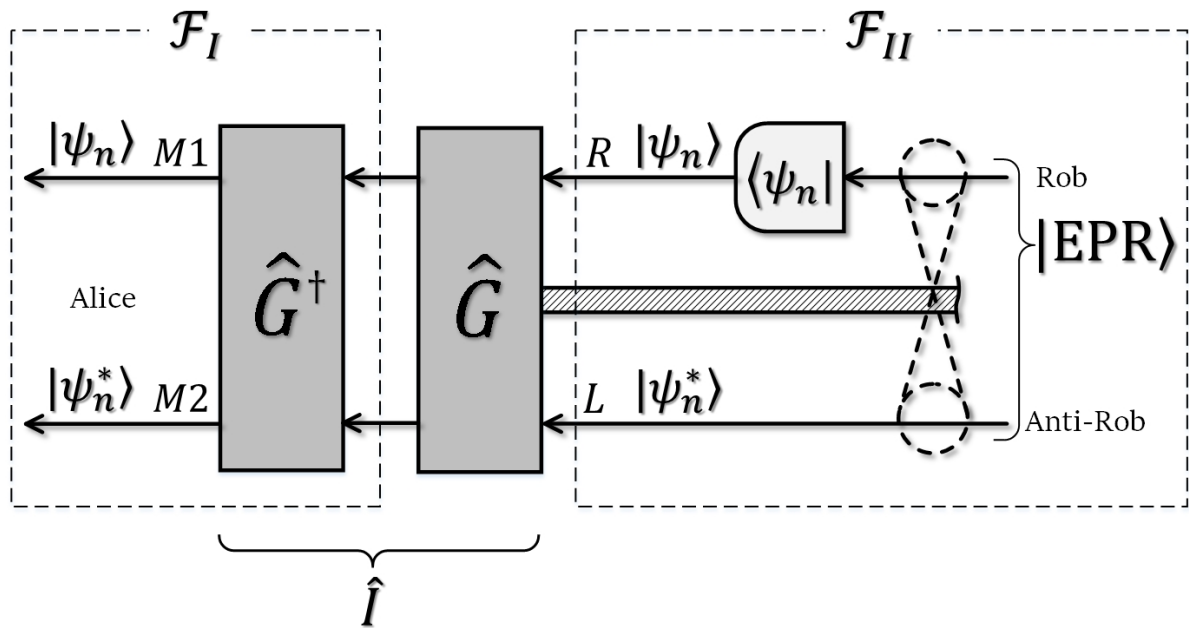


図 6.5: ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I とリンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} とを恒等チャンネル \hat{I} でつないだ状態で、ロブが POVM 測定 “ $\langle\psi_n|_R$ ” を行った場合の波束の収縮を示す概念図。

次に、上述のようにアリスによって恒等チャンネル \hat{I} が形成されている状態で、ロブが一樣加速運動しながら、共通場のモード R に対して、POVM (Positive operator valued measure) $\{|\psi_m\rangle\langle\psi_m|\}$ で記述される量子測定（以下、POVM 測定という。）を行う。ここで m は測定結果を識別する自然数とする。

図 6.5 に示すように、この POVM 測定でモード R が状態 $|\psi_n\rangle_R$ に射影されるとする。すると、これに伴い、モード R とエンタングルしているモード L が状態 $|\psi_n^*\rangle_L$ に収縮する: ${}_R\langle\psi_n|\text{EPR}\rangle_{R,L} \approx |\psi_n^*\rangle_L$ 。但し、第 4 章の式 (4.2.5) 及び式 (4.4.2) に示したパラメータ θ が十分に大きいため、状態 $|\text{EPR}\rangle_{R,L}$ は十分に最大エンタングル状態⁶ に近いものとする。

⁶ 離散無限準位系の最大エンタングル状態とは如何なる概念であるかという問題が理論の根底に残されているが、リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} は十分に密であり、任意の $|\psi_n^*\rangle$ に対し、これにいかほどでも近い状態が無数に存在するものとする。ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I についても同様である。

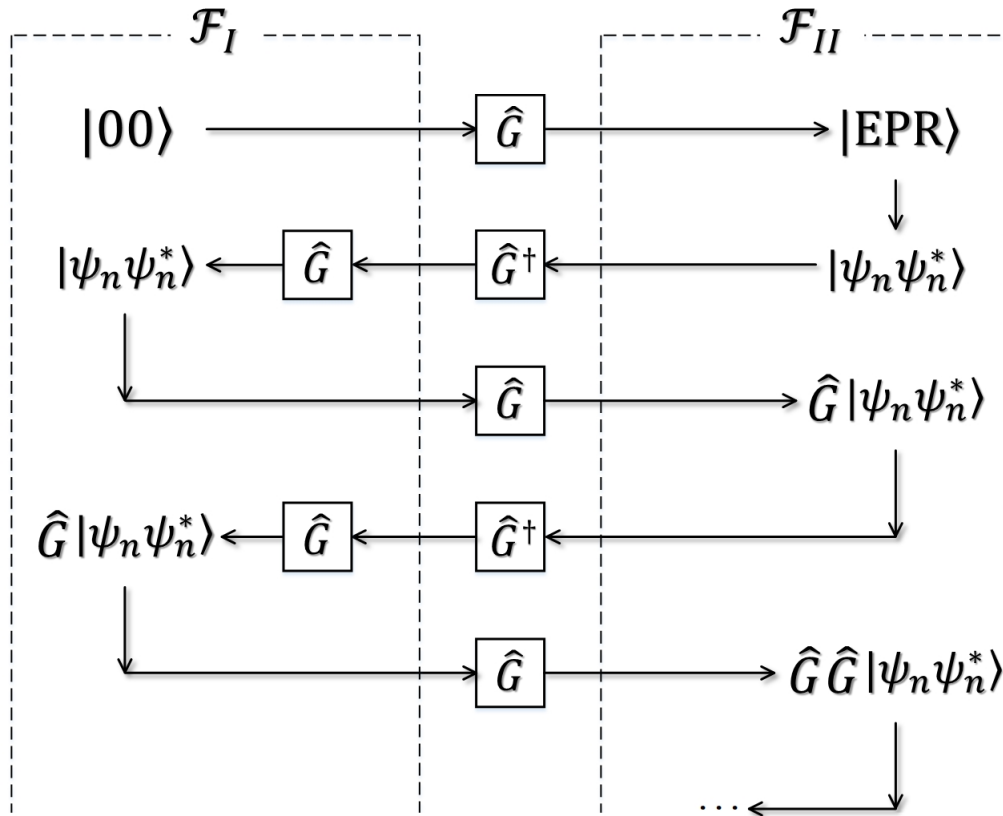


図 6.6: 波束の収縮の連鎖を示す概念図.

そして、リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} でモード R, L が状態 $|\psi_n, \psi_n^*\rangle_{R,L}$ に収縮すると、その波束の収縮が、恒等チャンネル \hat{I} を通じてミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I に伝播する。これにより、モード $M1, M2$ も状態 $|\psi_n, \psi_n^*\rangle_{M1,M2}$ に収縮する⁷。さらに、恒等チャンネル \hat{I} が波束の収縮の双方向的な伝播を許容するので、波束の収縮は、リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} とミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I とを往復する。

図 6.6 に、波束の収縮が往復する様子を示す。上述のようにしてミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I でモード $M1, M2$ が状態 $|\psi_n, \psi_n^*\rangle_{M1,M2}$ に収縮すると、ウンルー効果を表す演算子 \hat{G} の作用を通じて、リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} のモード R, L が状態 $\hat{G}|\psi_n, \psi_n^*\rangle_{R,L}$ に収縮する。すると、その波束の収縮が、恒等チャンネル \hat{I} を通じてミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I に伝播し、モード $M1, M2$ も状態 $\hat{G}|\psi_n, \psi_n^*\rangle_{M1,M2}$ に収縮する。すると、ウンルー効果を表す演算子 \hat{G} の作用を通じて、リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} のモード R, L が状態 $\hat{G} \cdot \hat{G}|\psi_n, \psi_n^*\rangle_{R,L}$ に収縮する。このようにして波束の収縮がフォック空間 \mathcal{F}_I と \mathcal{F}_{II} とを往復する。

⁷状態 $|\psi_n\rangle$ が例えばフォック状態 $|n\rangle$ である場合、アリスは、モード $M1, M2$ の各々において n 個のウンルー粒子分のエネルギーを得たことになる。このエネルギーの根源は、逆ユニタリー変換 \hat{G}^\dagger の操作に要するエネルギーと、ロブが行った POVM 測定の反作用とにあると思われる。

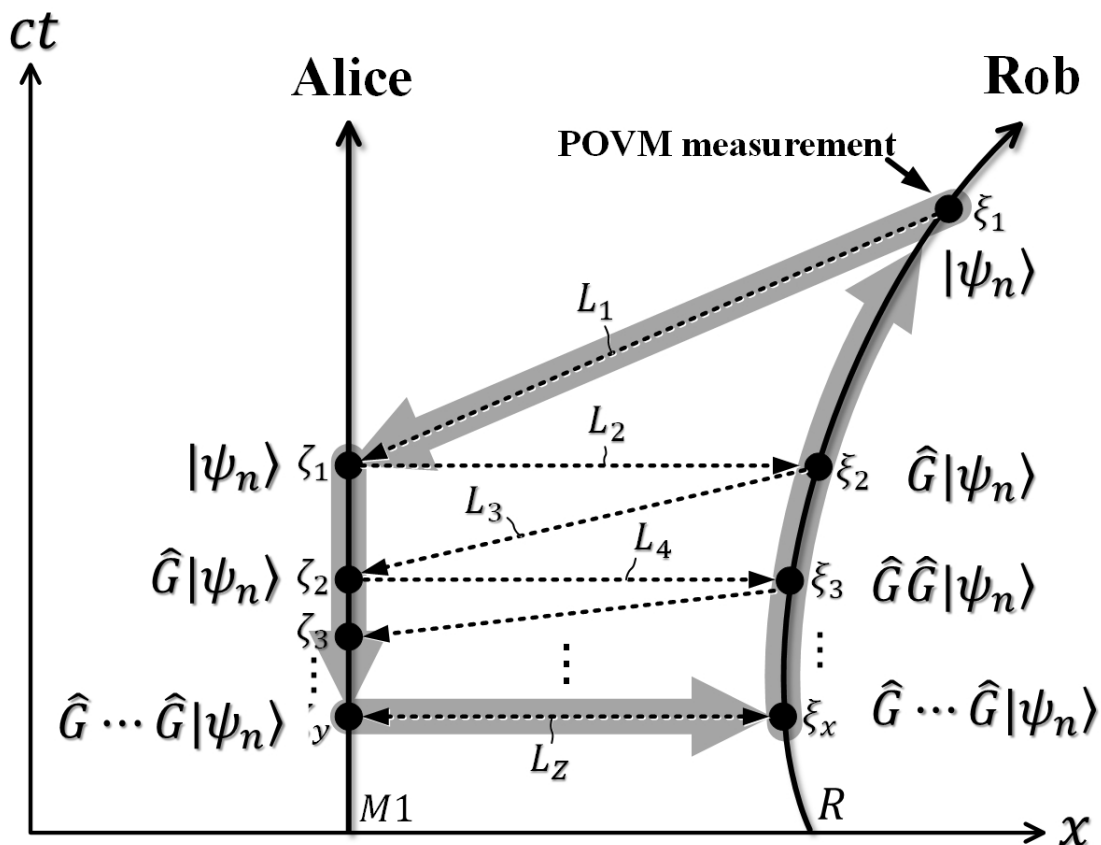


図 6.7: 波束の収縮の連鎖を示す概念図. アリスの世界線上に, アリスからみた共通場 (モード $M1$) の状態を付記している. ロブの世界線上には, ロブからみた共通場 (モード R) の状態を付記している. ひとたびロブが固有時刻 ξ_1 で POVM 測定を行うと, 波束の収縮がリンドラーフォック空間 \mathcal{F}_R とミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I との間を往復して次々に起こる. この結果, CTC ($\xi_1 \rightarrow \zeta_1 \rightarrow \zeta_y \rightarrow \xi_x \rightarrow \xi_1$) が構成される.

次に, 上述したフォック空間 \mathcal{F}_I 及び \mathcal{F}_R における波束の収縮のタイミングについて説明する. 以下では, ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I についてはモード $M1$ のみに着目し, リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_R についてはモード R のみに着目する.

図 6.7 に, ロブが POVM 測定を行うタイミングを示す. 図 6.7 では, アリスの世界線上に, アリスの固有時間での時刻 (以下, 固有時刻と略記する.) $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_y$ と, 各々の固有時刻におけるモード $M1$ の状態とを付記している. ロブの世界線上には, ロブの固有時刻 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_x$ と, 各々の固有時刻におけるモード R の状態とを付記している.

ロブは, 固有時刻 ξ_x でアリスに対して静止した後, アリスから遠ざかりつつある固有時刻 ξ_1 に, POVM 測定 “ $\langle \psi_n |$ ” を行う. これにより, 固有時刻 ξ_1 のモード R が状態 $|\psi_n\rangle$ に射影されると, 恒等チャンネル \hat{I} を通じて, モード $M1$ も状態 $|\psi_n\rangle$ に収縮する.

このモード $M1$ の収縮は、どのようなタイミングで生じるのであろうか。これについては次のように考えられる。波動関数それ自体は、情報を伝達するものではないため、光速よりも速い収縮が禁じられている訳ではない [55]。そこで、モード $M1$ の状態 $|\psi_n\rangle$ への収縮は、ロブにとっては、POVM 測定を行った瞬間⁸、具体的には、POVM 測定を行った固有時刻 ξ_1 と同時刻に、生じると考えられる。つまり、モード $M1$ の収縮は、固有時刻 ξ_1 のロブにとっての同時刻線 L_1 で固有時刻 ξ_1 とつながれた、アリスの固有時刻 ζ_1 に生じる⁹。先の図 6.5 は、この同時刻線 L_1 に沿う波束の収縮の様態を示す。

また、既述のとおり、モード $M1$ が状態 $|\psi_n\rangle$ に収縮すると、ウンルー効果を表す演算子 \hat{G} の作用を通じてモード R が状態 $\hat{G}|\psi_n\rangle$ に収縮する。このモード R の状態 $\hat{G}|\psi_n\rangle$ への収縮は、アリスにとっては、モード $M1$ が収縮した固有時刻 ζ_1 と同時刻に生じていなければならない¹⁰。即ち、モード R の状態 $\hat{G}|\psi_n\rangle$ への収縮は、固有時刻 ζ_1 のアリスにとっての同時刻線 L_2 で固有時刻 ζ_1 とつながれた、ロブの固有時刻 ξ_2 に生じる。

この固有時刻 ξ_2 は、ロブが最初に POVM 測定 “ $\langle\psi_n|$ ” を行った固有時刻 ξ_1 よりも過去である。以下、この理由を説明する。

図 6.8 に示すように、特殊相対論によれば、固有時刻 ξ_1 のロブにとっての同時刻線 L_1 は、ロブの世界線の、固有時刻 ξ_1 における接線と平行な時間軸（縦軸）をもつ斜交座標系の空間軸（横軸）と平行である。なお、この斜交座標系とは、固有時刻 ξ_1 の瞬間にロブが静止するような局所慣性系のことである。そして、既述のように、固有時刻 ξ_1 においては、ロブは、アリスから離れる向きに運動している。この結果、固有時刻 ξ_1 の同時刻線 L_1 は、アリスの世界線に近づくに従って過去に向かう方向に傾斜したものとなる¹¹。

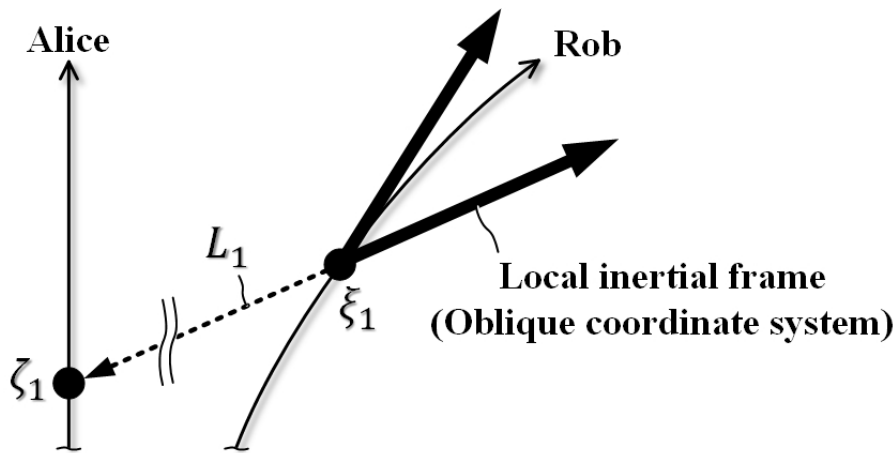


図 6.8: 固有時刻 ξ_1 のロブが瞬間的に静止する局所慣性系を示す概念図。

⁸ いわゆる観測問題を説明する解釈として、コペンハーゲン解釈、非局所隠れた変数の理論、多世界解釈等が知られている。測定した瞬間に波束の収縮が生じるという解釈は、コペンハーゲン解釈に含まれる。

⁹ アリスとロブのいずれにも共通の“絶対時間”なる概念は存在しないことに注意する。

¹⁰ 実際にアリスが時刻 ζ_1 でモード $M1$ の収縮を認識したかどうかは問題でない。ロブは、時刻 ζ_1 にモード $M1$ が状態 $|\psi_n\rangle$ に収縮することを知りうる。従って、時刻 ζ_1 におけるモード $M1$ の収縮の、ロブによる認識を契機としても、同時刻線 L_2, L_3, L_4, \dots に沿った波束の収縮の折り返しは生じると考えられる。

¹¹ 文献 [56] の第 154 ページの図 6.1 にも傾斜した同時刻線が示されている。

図 6.7 に戻り、説明を続ける．一方でアリスは、図 6.7 に示す $x - ct$ 座標系に静座しているので、アリスにとっての同時刻線は、常に、 x 軸と平行である．従って、固有時刻 ξ_1 から同時刻線 L_1 に沿って過去に向かい、固有時刻 ζ_1 で同時刻線 L_2 に沿って水平に折り返されてたどり付く固有時刻 ξ_2 は、固有時刻 ξ_1 よりも過去である．

さらに、固有時刻 ξ_2 においてもロブはアリスから離れる向きに運動中であるから、同様のメカニズムで、波束の収縮は固有時刻 ξ_2 よりも過去の固有時刻 ξ_3 にも及ぶ．

但し、固有時刻 ξ_2 から固有時刻 ξ_3 への時間的な遡及量は、固有時刻 ξ_1 から固有時刻 ξ_2 への時間的な遡及量よりも小さい．これは、固有時刻 ξ_2 におけるロブの速度が、固有時刻 ξ_1 におけるロブの速度よりも小さいことに起因して、同時刻線 L_3 の x 軸に対する傾斜角度が、同時刻線 L_1 の x 軸に対する傾斜角度よりも小さくなるためである¹²．

以降同様に、過去に向かって波束の収縮が連鎖的に生起する．この波束の収縮の連鎖は、ロブがアリスに対して静止した瞬間の固有時刻 ξ_x まで続く．固有時刻 ξ_x では、アリスに対するロブの速度がゼロであるため、固有時刻 ξ_x のロブにとっての同時刻線は、 x 軸と平行な直線 L_z となる．また、直線 L_z は、 x 軸と平行であるため、アリスにとっての同時刻線でもある．従って、波束の収縮の連鎖は、直線 L_z の両端の時刻 ξ_x 及び ζ_y で完了する．

以上のようにして、ロブの固有時刻 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_x$ と、アリスの固有時刻 $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_y$ との各々を表す世界点において、共通場の収縮が起こる．それら収縮が起こる世界点をつなぐと、図 6.7 に示すように、 $\xi_1 \rightarrow \zeta_1 \rightarrow \zeta_y \rightarrow \xi_x \rightarrow \xi_1$ を通るループが構成される．収縮が起こる世界点間における共通場の状態は不定であり、かつループ内で共通場の状態がユニタリー変換を受けるという意味で完全とは言えないが、ループは、世界点 ξ_1 の状態 $|\psi_n\rangle$ から発して、同じ世界点 ξ_1 の状態 $|\psi_n\rangle$ に戻る．従って、疑似的ではあるが、状態 $|\psi_n\rangle$ によって CTC が構成されたとみることができる．

なお、図 6.7 に示す CTC は、ロブが一様加速運動をしながら固有時刻 ξ_1 で POVM 測定 “ $\langle\psi_n|$ ” を行いさえすれば、その測定結果によらずに構成される．このことは、図 6.1 に示した量子テレポーテーションでは、1/4 の成功確率でしか CTC が構成され得ないこととは対照的である．

6.3.2 CTC がフォック状態よりなる場合

次に、以上のようにして構成される共通場の CTC を利用して、2 体系のエンタングル状態を形成する方法の提案について述べる．

図 6.9 に示すように、エンタングル状態の形成先は、2 準位系 A と B である．2 準位系 A と B の各々は、基底状態 $|\downarrow\rangle$ と励起状態 $|\uparrow\rangle$ とを有する．2 準位系 A と B をそれぞれ共通場の CTC と相互作用させることにより、2 準位系 A と B をエンタングル状態に移行させる．

本節では、既述の POVM の要素 $|\psi_m\rangle\langle\psi_m|$ がフォック状態 $|m\rangle\langle m|$ である場合を述べる．2 準位系 A, B にエンタングル状態を形成する手順は、以下の **Step 1–4** よりなる：

¹² 固有時刻 ξ_i におけるロブの同時刻線の x 軸に対する傾斜角度 ϑ_i は、固有時刻 ξ_i におけるロブのアリスに対する速度を v_i としたとき、 $\tan \vartheta_i = v_i/c$ で与えられる．

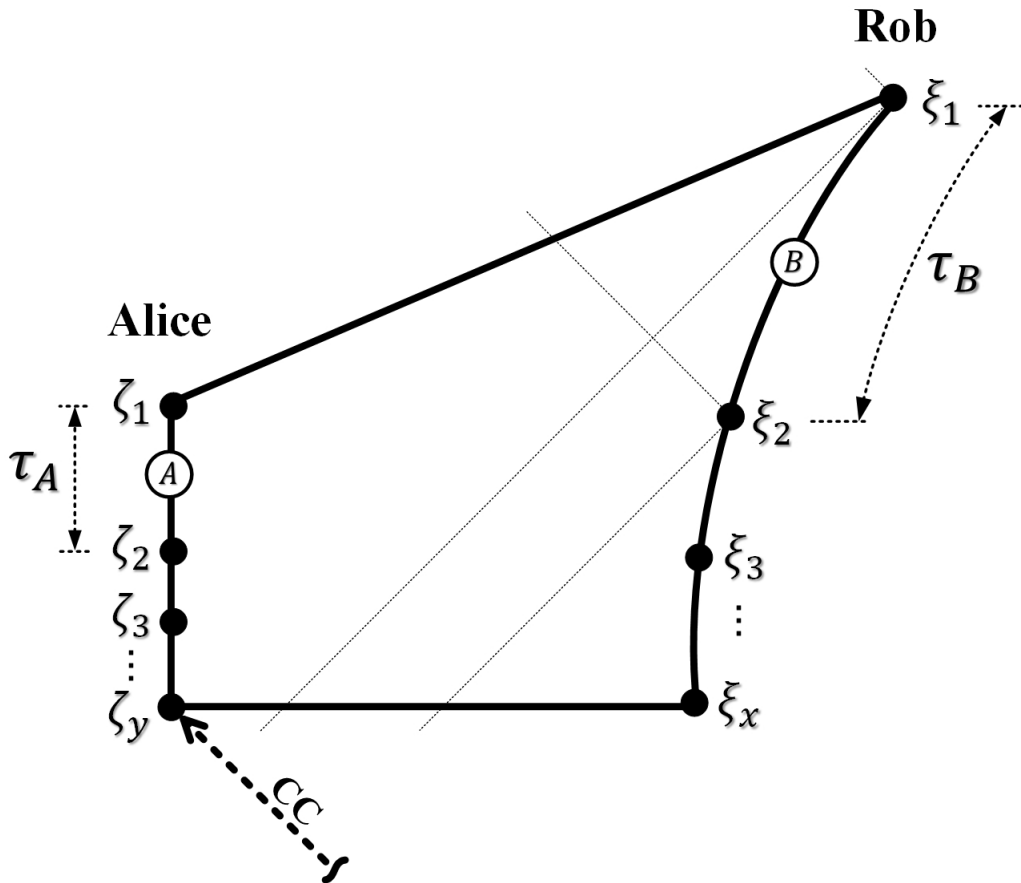


図 6.9: 共通場の CTC においてスペースライクに離間した 2 準位系 A と B. 固有時刻 ξ_1 における POVM 測定 “ $\langle n|_F$ ” で 2 準位系 A と B がエンタングル状態に射影される.

Step 1.

まず、ロブは、アリスに対し、恒等チャンネル \hat{I} を形成するための逆ユニタリー変換 \hat{G}^\dagger の操作を行うべき旨のメッセージを、アリスの固有時刻 ζ_y に間に合うように、古典通信 (CC: Classical Communication) により通知する. 図 6.4 及び図 6.9 に示す “CC” は、この古典通信の世界線を示す.

また、そのメッセージには、2 準位系 A をモード $M1$ と相互作用させる期間が ζ_2 から ζ_1 までであることを示す情報も含まれている.

なお、ロブは、アリスの x 軸上の位置を予め知っているものとする. このため、ロブは、自己の固有加速度と、POVM 測定を行う予定の固有時刻 ξ_1 とに基づいて、波束の収縮がアリスにとっての固有時刻 $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_y$ で生じることを特定できる.

Step 2.

次に、アリスは、ロブから受けた上記メッセージに従って、固有時刻 ζ_y 以前に逆ユニタリー変換 \hat{G}^\dagger の操作を行う. この操作によって、恒等チャンネル \hat{I} が構成される. アリスは、恒等チャンネル \hat{I} を固有時刻 ζ_1 まで維持する.

Step 3.

次に、アリスは、2 準位系 A を、始状態としての基底状態 $|\downarrow\rangle_A$ に準備する。そして、アリスは、その 2 準位系 A を、時刻 ζ_2 から時刻 ζ_1 までの期間長 τ_A にわたり、共通場のモード $M1$ と相互作用させる。

一方、ロブは、2 準位系 B を、始状態としての励起状態 $|\uparrow\rangle_B$ に準備する。そして、ロブは、その 2 準位系 B を、時刻 ξ_2 から時刻 ξ_1 までの期間長 τ_B にわたり、共通場のモード R と相互作用させる。

なお、期間 τ_A と τ_B の各々は、2 準位系 A と B とが因果的に断絶される程度に、十分に短い期間であるとする。つまり、世界点 ξ_1 と ζ_2 はスペースライクに離間しており、かつ世界点 ξ_2 と ζ_1 もスペースライクに離間している。

Step 4.

次に、ロブは、上述した POVM 測定 “ $\langle\psi_m|$ ” として、POVM $\{|m\rangle\langle m|\}$ で記述される粒子数測定を固有時刻 ξ_1 に行う。そして、ロブは、この POVM 測定で測定結果 “ $m = n$ ” を得たとする。すると、既述のメカニズムで、フォック状態 $|n\rangle$ によって共通場の CTC が構成される。なお、共通場のモード R と $M1$ とは恒等チャンネル \hat{I} でつながれているので、以下では、両モード $R, M1$ に対して共通の添え字 F を用いて、両モード $R, M1$ を CTC 場 F と表記する。

また、ロブが行う POVM 測定により、時を遡って、**Step 3.** において 2 準位系 A, B との相互作用前の CTC 場 F 及びモード L の始状態が $\hat{G}|n, n\rangle_{FL}$ に確定する。また、この POVM 測定により、2 準位系 A, B との相互作用後の CTC 場 F 及びモード L の終状態も $\hat{G}|n, n\rangle_{FL}$ に確定する。

以下、2 準位系 A, B の各々と CTC 場 F との相互作用による各系の時間発展を具体的に調べる。時間発展はユニタリー演算子で定義され、そのユニタリー演算子の生成子となるのがハミルトニアンである。そこで、まずハミルトニアンについて述べる。

全系 A, B, F のハミルトニアン \hat{H}_{ABF} は、2 準位系 A, B と CTC 場 F との相互作用を表すハミルトニアン $\hat{H}_{ABF}^{\text{int}}$ と、相互作用を含まない自由ハミルトニアン $\hat{H}_{ABF}^{\text{free}}$ との和である：

$$\hat{H}_{ABF} = \hat{H}_{ABF}^{\text{free}} + \hat{H}_{ABF}^{\text{int}} \quad (6.3.1)$$

このうち、自由ハミルトニアン $\hat{H}_{ABF}^{\text{free}}$ は、次のように書ける。

$$\hat{H}_{ABF}^{\text{free}} = \frac{\hbar\Omega}{2}\hat{Z}_A + \frac{\hbar\Omega}{2}\hat{Z}_B + \hbar\omega\hat{c}_F^\dagger\hat{c}_F \quad (6.3.2)$$

ここで、 Ω は、2 準位系 A と B の各々の基底状態 $|\downarrow\rangle$ と励起状態 $|\uparrow\rangle$ との間の遷移周波数を表す。即ち、基底状態 $|\downarrow\rangle$ と励起状態 $|\uparrow\rangle$ のエネルギーギャップは $\hbar\Omega$ である。また、 ω は、シングルモード近似 (SMA) した CTC 場 F の周波数を表す。また、 \hat{Z} は、パウリ行列のうちの z -要素である。

また、 \hat{c} は、CTC 場 F におけるウンルー粒子の消滅演算子であり、 \hat{c}^\dagger は、生成演算子である。上述した **Step 2.** 以降、モード R と $M1$ は、恒等チャンネル \hat{I} でつながれているので、第 4 章の式 (4.2.11) に示した $\hat{a}_R(\hat{a}_R^\dagger)$ と $\hat{b}_M(\hat{b}_M^\dagger)$ を共通の記号 $\hat{c}_F(\hat{c}_F^\dagger)$ に置き換えた。

一方、相互作用ハミルトニアン $\hat{H}_{ABF}^{\text{int}}$ は、2 準位系 A と CTC 場 F との相互作用を表すハミルトニアン $\hat{H}_{AF}^{\text{int}}$ と、2 準位系 B と CTC 場 F との相互作用を表すハミルトニアン $\hat{H}_{BF}^{\text{int}}$ との和として次のように書ける。

$$\hat{H}_{ABF}^{\text{int}} = \hat{H}_{AF}^{\text{int}} + \hat{H}_{BF}^{\text{int}}, \quad (6.3.3)$$

$$\hat{H}_{AF}^{\text{int}} = \hbar g \left(\hat{\sigma}_A^+ \hat{c}_F + \hat{\sigma}_A^- \hat{c}_F^\dagger + \hat{\sigma}_A^+ \hat{c}_F^\dagger + \hat{\sigma}_A^- \hat{c}_F \right), \quad (6.3.4)$$

$$\hat{H}_{BF}^{\text{int}} = \hbar g \left(\hat{\sigma}_B^+ \hat{c}_F + \hat{\sigma}_B^- \hat{c}_F^\dagger + \hat{\sigma}_B^+ \hat{c}_F^\dagger + \hat{\sigma}_B^- \hat{c}_F \right). \quad (6.3.5)$$

ここで、 g は、相互作用の強さを表すパラメータである。また、 $\hat{\sigma}^+ := |\uparrow\rangle\langle\downarrow|$ は、基底状態の 2 準位系を励起状態へ遷移させる昇演算子であり、 $\hat{\sigma}^- := |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$ は、励起状態の 2 準位系を基底状態へ遷移させる降演算子である。なお、既述のように、 τ_A と τ_B はそれぞれ十分に短い期間であるため、ここでは回転波近似を採用しなかった。

以上、式 (6.3.1)–(6.3.5) において、シュレーディンガー描像によるハミルトニアンを示した。以下では、計算の簡便化のために、相互作用描像に移行する。相互作用描像による相互作用ハミルトニアン $\hat{H}_{ABF}^{\text{int}}(t)$ は、次のように書ける。

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ABF}^{\text{int}}(t) &= e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{ABF}^{\text{free}} t} \hat{H}_{ABF}^{\text{int}} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{ABF}^{\text{free}} t} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{ABF}^{\text{free}} t} \hat{H}_{AF}^{\text{int}} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{ABF}^{\text{free}} t} + e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{ABF}^{\text{free}} t} \hat{H}_{BF}^{\text{int}} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{ABF}^{\text{free}} t}. \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

上式 (6.3.6) の第 1 項を $\hat{H}_{AF}^{\text{int}}(t)$ と置き、第 2 項を $\hat{H}_{BF}^{\text{int}}(t)$ と置く。 $\hat{H}_{AF}^{\text{int}}(t)$ と $\hat{H}_{BF}^{\text{int}}(t)$ は、次のように書ける¹³。

$$\begin{aligned} \hat{H}_{AF}^{\text{int}}(t) &= \hbar g \left[e^{i(\Omega-\omega)t} \hat{\sigma}_A^+ \hat{c}_F + e^{-i(\Omega-\omega)t} \hat{\sigma}_A^- \hat{c}_F^\dagger \right. \\ &\quad \left. + e^{i(\Omega+\omega)t} \hat{\sigma}_A^+ \hat{c}_F^\dagger + e^{-i(\Omega+\omega)t} \hat{\sigma}_A^- \hat{c}_F \right], \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{BF}^{\text{int}}(t) &= \hbar g \left[e^{i(\Omega-\omega)t} \hat{\sigma}_B^+ \hat{c}_F + e^{-i(\Omega-\omega)t} \hat{\sigma}_B^- \hat{c}_F^\dagger \right. \\ &\quad \left. + e^{i(\Omega+\omega)t} \hat{\sigma}_B^+ \hat{c}_F^\dagger + e^{-i(\Omega+\omega)t} \hat{\sigma}_B^- \hat{c}_F \right]. \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

既述のように、2 準位系 A, B は、図 6.9 に示す各々の相互作用期間 τ_A, τ_B にわたって、スペースライクに離間しており、互いに因果的に断絶されている。そこで、任意の時刻において、 $\hat{H}_{AF}^{\text{int}}(t)$ と $\hat{H}_{BF}^{\text{int}}(t)$ とが交換することを仮定する：

$$[\hat{H}_{AF}^{\text{int}}(t), \hat{H}_{BF}^{\text{int}}(t)] = 0 \quad (6.3.9)$$

この交換関係 (6.3.9) を用いると、相互作用描像による全系 ABF の時間発展を表すユニ

¹³ 式 (6.3.7) と (6.3.8) の導出には、オペレータ関数の定義 (例えば文献 [42] の第 75 ページを参照。) と、公式 $e^{\zeta \hat{A}} \hat{A} e^{-\zeta \hat{A}} = \hat{A} + \zeta [\hat{A}, \hat{A}] + \frac{\zeta^2}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{A}]] + \dots$ にボース粒子の生成・消滅演算子の交換関係を適用して導かれる、 $e^{i\omega \hat{n}} \hat{c} e^{-i\omega \hat{n}} = \hat{c} e^{-i\omega}$ なる関係とを用いる。

タリー演算子 $\hat{U}_{ABF}^{\text{int}}(\tau)$ は、次のようにテンソル積で書ける:

$$\hat{U}_{ABF}^{\text{int}}(\tau) = \mathcal{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^\tau \hat{H}_{ABF}^{\text{int}}(t) dt \right] \quad (6.3.10)$$

$$= \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^\tau \hat{H}_{AF}^{\text{int}}(t) + \hat{H}_{BF}^{\text{int}}(t) dt \right] \quad (6.3.11)$$

$$= \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^{\tau_A} \hat{H}_{AF}^{\text{int}}(t) dt \right] \otimes \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^{\tau_B} \hat{H}_{BF}^{\text{int}}(t) dt \right] \quad (6.3.12)$$

$$\approx \left[\hat{I} - \frac{i}{\hbar} \int_0^{\tau_A} \hat{H}_{AF}^{\text{int}}(t) dt \right] \otimes \left[\hat{I} - \frac{i}{\hbar} \int_0^{\tau_B} \hat{H}_{BF}^{\text{int}}(t) dt \right] \quad (6.3.13)$$

ここで、式 (6.3.10) から式 (6.3.11) への移行において、式 (6.3.9) より $\hat{H}_{ABF}^{\text{int}}(t)$ が異なる時刻の自身と交換するため、式 (6.3.10) の時間順序演算子 \mathcal{T} を無視した。また、式 (6.3.11) から式 (6.3.12) への移行においては、Baker-Campbell-Hausdorff の定理に式 (6.3.9) を適用した。

数式の簡潔化のために、次の u_j^\pm と v_j^\pm を定義する ($j = A, B$):

$$u_j^\pm := \int_0^{\tau_j} e^{\pm i(\Omega - \omega)t} dt, \quad (6.3.14)$$

$$v_j^\pm := \int_0^{\tau_j} e^{\pm i(\Omega + \omega)t} dt. \quad (6.3.15)$$

すると、式 (6.3.13) のユニタリー演算子 $\hat{U}_{ABF}^{\text{int}}(\tau)$ は次のように書ける。

$$\hat{U}_{ABF}^{\text{int}}(\tau) \approx \left[\hat{I} - ig \left(u_A^- \hat{\sigma}_A^- \hat{c}_F^\dagger + v_A^- \hat{\sigma}_A^- \hat{c}_F \right) \right] \otimes \left[\hat{I} - ig \left(u_B^+ \hat{\sigma}_B^+ \hat{c}_F + v_B^+ \hat{\sigma}_B^+ \hat{c}_F^\dagger \right) \right]. \quad (6.3.16)$$

この $\hat{U}_{ABF}^{\text{int}}(\tau)$ が全系 $ABFL$ の始状態に作用する。既述のとおり、2準位系 A と B の始状態は、 $|\uparrow\downarrow\rangle_{AB}$ である。また、CTC 場 F 及びモード L の始状態は、 $\hat{G}_{FL}|n, n\rangle_{FL}$ である。即ち、全系 $ABFL$ の始状態は、 $\hat{G}_{FL}|\uparrow\downarrow; n, n\rangle_{AB; FL}$ である。

そして、その合成系 FL のうちの CTC 場 F と、2準位系 A, B とがユニタリー演算子 $\hat{U}_{ABF}^{\text{int}}(\tau)$ に従って相互作用する。その後、ロブが固有時刻 ξ_1 に POVM 測定 “ $\langle n|_F$ ” を行う。この POVM 測定に伴ってモード L の状態も $|n\rangle_L$ に確定する。

以上より、POVM 測定後の 2準位系 A, B の状態 $|\Phi(n)\rangle_{A, B}$ は、次のように書ける:

$$|\Phi(n)\rangle_{A, B} = {}_{FL}\langle n, n | \hat{U}_{ABF}^{\text{int}}(\tau) \otimes \hat{G}_{FL} |\uparrow\downarrow; n, n\rangle_{AB; FL} \quad (6.3.17)$$

上式 (6.3.17) において、ウンルー効果を表す演算子 \hat{G}_{FL} は、CTC 場 F を熱状態へと近づけるため、CTC 場 F と相互作用する 2準位系 A, B にデコヒーレンス [3] をもたらす要因となるようにみえる。即ち、仮に 2準位系 A, B に量子エンタングルメントが形成されとしても、演算子 \hat{G}_{FL} は、その量子エンタングルメントのエンタングル量を低下させる要因となるようにみえる。以下、この点について調べる。

デコヒーレンス回避のメカニズム

まず、式 (6.3.17) の右辺における、演算子 \hat{G}_{FL} によるフォック状態 $|n, n\rangle_{FL}$ の時間発展を調べる。演算子 \hat{G}_{FL} は、第 4 章の式 (4.2.9) に示したとおり、 $\hat{G}_{FL} = \exp[\theta(\hat{c}_F^\dagger \hat{c}_L^\dagger - \hat{c}_F \hat{c}_L)]$ と書ける。これは、Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) の公式を用いて示される disentangling 定理 [32][33][34] により、次のように展開される：

$$\begin{aligned}\hat{G}_{FL} &= \exp\left[\theta\left(\hat{c}_F^\dagger \hat{c}_L^\dagger - \hat{c}_F \hat{c}_L\right)\right] \\ &= \exp\left[\Gamma \hat{c}_F^\dagger \hat{c}_L^\dagger\right] \exp\left[-\Lambda\left(\hat{c}_F^\dagger \hat{c}_F + \hat{c}_L^\dagger \hat{c}_L + 1\right)\right] \exp\left[\Gamma \hat{c}_F \hat{c}_L\right], \quad (6.3.18) \\ \text{where } \Gamma &= \tanh \theta, \\ \Lambda &= \ln(\cosh \theta).\end{aligned}$$

上式 (6.3.18) を展開すると、 \hat{G}_{FL} は、粒子数演算子 $\hat{n}_F = \hat{c}_F^\dagger \hat{c}_F$ と $\hat{n}_L = \hat{c}_L^\dagger \hat{c}_L$ との少なくとも一方のみからなる項及び恒等演算子 \hat{I} のみからなる項をまとめた演算子関数 f と¹⁴,

$$\hat{G}_{FL} = f(\hat{n}_F, \hat{n}_L) + g(\hat{c}_F^\dagger, \hat{c}_F, \hat{c}_L^\dagger, \hat{c}_L) \quad (6.3.19)$$

式 (6.3.17) の右辺において、演算子 \hat{G}_{FL} が作用するフォック状態 $|n, n\rangle_{FL}$ は、上式 (6.3.19) に示す演算子関数 $f(\hat{n}_F, \hat{n}_L)$ の固有状態に相当する。従って、演算子関数 $f(\hat{n}_F, \hat{n}_L)$ はフォック状態 $|n, n\rangle_{FL}$ を変化させず、式 (6.3.17) の左辺の $|\Phi(n)\rangle_{A,B}$ に対しては、物理的な意味を持たないグローバル位相をもたらすのみである。このため、演算子関数 $f(\hat{n}_F, \hat{n}_L)$ は、フォック状態 $|n, n\rangle_{FL}$ への作用においては、恒等演算子 \hat{I}_{FL} とみなしてよい。

一方、演算子関数 $g(\hat{c}_F^\dagger, \hat{c}_F, \hat{c}_L^\dagger, \hat{c}_L)$ は、 \hat{c}_F^\dagger と \hat{c}_F との次数が異なり、かつ \hat{c}_L^\dagger と \hat{c}_L との次数が異なる項をまとめたものであり、フォック状態 $|n, n\rangle_{FL}$ を、これとは直交するフォック状態に変化させる。従って、演算子関数 $g(\hat{c}_F^\dagger, \hat{c}_F, \hat{c}_L^\dagger, \hat{c}_L)$ は、フォック状態 $|n, n\rangle_{FL}$ への作用において恒等演算子 \hat{I} とはみなせない。

しかし、式 (6.3.17) 中の射影子 $\langle n|_L$ の作用を考慮すると、演算子関数 $g(\hat{c}_F^\dagger, \hat{c}_F, \hat{c}_L^\dagger, \hat{c}_L)$ を無視できる。この理由は次のとおりである。左リンドラーくさび状領域のモード L は、右リンドラーくさび状領域のモード R とは事象の地平面を隔てて存在するため、フォック状態 $|n\rangle_L$ は、 $\hat{U}_{ABF}^{\text{int}}(\tau)$ の作用を受けない。従って、式 (6.3.17) において、射影子 $\langle n|_L$ が $g(\hat{c}_F^\dagger, \hat{c}_F, \hat{c}_L^\dagger, \hat{c}_L)|n, n\rangle_{FL}$ にダイレクトに作用する。しかも、演算子関数 $g(\hat{c}_F^\dagger, \hat{c}_F, \hat{c}_L^\dagger, \hat{c}_L)$ は、左リンドラー領域のモード L の粒子数を変化させる。従って、射影子 $\langle n|_L$ と、状態 $g(\hat{c}_F^\dagger, \hat{c}_F, \hat{c}_L^\dagger, \hat{c}_L)|n, n\rangle_{FL}$ との内積はゼロである： ${}_L\langle n|g(\hat{c}_F^\dagger, \hat{c}_F, \hat{c}_L^\dagger, \hat{c}_L)|n, n\rangle_{FL} = 0$ 。

このため、式 (6.3.17) を計算するうえでは、演算子関数 $g(\hat{c}_F^\dagger, \hat{c}_F, \hat{c}_L^\dagger, \hat{c}_L)$ を無視してよく、上式 (6.3.19) において $g(\hat{c}_F^\dagger, \hat{c}_F, \hat{c}_L^\dagger, \hat{c}_L) = 0$ と置いて差し支えない。仮に、射影子 $\langle n|_L$ の作用がないとすると、 ${}_F\langle n|\hat{U}_{ABF}^{\text{int}}(\tau) \otimes g(\hat{c}_F^\dagger, \hat{c}_F, \hat{c}_L^\dagger, \hat{c}_L)|n, n\rangle_{FL} \neq 0$ なので、演算子関数 $g(\hat{c}_F^\dagger, \hat{c}_F, \hat{c}_L^\dagger, \hat{c}_L)$ を無視できない。

¹⁴ 式 (6.3.18) を展開して得られる多項式において、 \hat{c}_F^\dagger と \hat{c}_F との次数が等しく、かつ \hat{c}_L^\dagger と \hat{c}_L との次数が等しい項は、生成演算子と消滅演算子との交換関係を用いると、 \hat{n}_F 及び \hat{n}_L 又はこれらと恒等演算子 \hat{I} とからなる項として書き改めることができる。そのような項をまとめたもので演算子関数 f が構成される。

なお、演算子関数 $g(\hat{c}_F^\dagger, \hat{c}_F, \hat{c}_L^\dagger, \hat{c}_L)$ は、CTC 場 F の粒子数も変化させる。このため、演算子関数 $g(\hat{c}_F^\dagger, \hat{c}_F, \hat{c}_L^\dagger, \hat{c}_L)$ を無視することは、結果として、CTC 場 F の粒子数が n から変化する項、即ち、ウンルー粒子数の熱ゆらぎを表す項を無視することでもある。これがウンルー放射に起因するデコヒーレンスを回避できる理由である。

結局、デコヒーレンスの原因となりうる \hat{G}_{FL} を \hat{I}_{FL} とみなしてよく、式 (6.3.17) は、改めて次のように書ける：

$$\begin{aligned} |\Phi(n)\rangle_{A,B} &= {}_{FL}\langle n, n | \hat{U}_{ABF}^{\text{int}}(\tau) |\uparrow\downarrow; n, n\rangle_{AB;FL} \\ &= {}_F\langle n | \hat{U}_{ABF}^{\text{int}}(\tau) |\uparrow\downarrow; n\rangle_{AB;F} \\ &\propto |\uparrow\downarrow\rangle_{AB} - g^2 (u_A^- u_B^+ + v_A^- v_B^+) n |\downarrow\uparrow\rangle_{AB}. \end{aligned} \quad (6.3.20)$$

式 (6.3.20) において、2 準位系 A と B との間に量子エンタングルメントが存在する条件は、 $|g^2 (u_A^- u_B^+ + v_A^- v_B^+) n| \neq 0$ である。この条件の成立の可能性について検討する。相互作用の強さを表す g は、ゼロでない。また、 $u_A^-, u_B^+, v_A^-, v_B^+$ の各々は、殊に回転波近似が使えない程に相互作用期間が短い場合には、ノンゼロの値をとり得る。従って、2 準位系 A と B の間に量子エンタングルメントが存在し得る。

以上のように、CTC 場 F を、純粋状態であるエンタングル状態 $|\Phi(n)\rangle_{A,B}$ の形成に活用できた。純粋状態のエンタングル状態 $|\Phi(n)\rangle_{A,B}$ を形成できた理由は、CTC 場 F が、ユニタリー演算子 $\hat{U}_{ABF}^{\text{int}}(\tau)$ に従って時間発展した後、POVM 測定によって、状態 $|n\rangle_F$ に射影されるからである。

つまり、仮に状態 $|n\rangle_F$ への射影がないとすると、ユニタリー演算子 $\hat{U}_{ABF}^{\text{int}}(\tau)$ に従って時間発展した後の 2 準位系 A と B の状態は、全系 ABF から場 F の自由度をトレースアウトすることにより特定される： $\hat{\rho}_{AB} = \sum_m {}_F\langle m | \hat{U}_{ABF}^{\text{int}}(\tau) |\uparrow\downarrow; n\rangle_{AB;F} \langle \uparrow\downarrow; n | \hat{U}_{ABF}^{\text{int}}(\tau) | m \rangle_F$ 。この状態 $\hat{\rho}_{AB}$ は混合状態を表す。

同様の理由で、文献 [64] の手法では、混合状態の量子エンタングルメントしか得ることができない。つまり、文献 [64] で得られるエンタングル状態は、確率的にエンタングルしているに過ぎない。これに対し、本プロトコルでは、ロブが行う POVM 測定によって CTC 場 F が状態 $|n\rangle_F$ に射影される結果、純粋状態の量子エンタングルメントが得られる。この点は、本プロトコルの特徴の 1 つである。

最大エンタングル状態への移行

本プロトコルのもう 1 つの特徴は、ロブが POVM 測定の結果 n を知っているのもので、形成されたエンタングル状態 $|\Phi(n)\rangle_{A,B}$ のシュミット係数 $f(n) := g^2 (u_A^- u_B^+ + v_A^- v_B^+) n$ を特定し得るということである。但し、 τ_A と τ_B は予め定められているものとする。

従って、ロブは、彼の手元にある 2 準位系 B に対して、エンタングル状態 $|\Phi(n)\rangle_{A,B}$ を確率的に最大エンタングル状態 $|\Psi\rangle_{AB} := (|\uparrow\downarrow\rangle_{AB} + |\downarrow\uparrow\rangle_{AB})/\sqrt{2}$ へと移行させることが可能な確率的局所操作をいつでも施すことができる。具体的には、ロブは、シュミット係数 $f(n)$ に依存する演算子 $\hat{M}_B = |\downarrow\rangle_B \langle \downarrow| + 1/f(n) |\uparrow\rangle_B \langle \uparrow|$ によって定義される POVM $\{\hat{M}_B^\dagger \hat{M}_B, \hat{I}_B - \hat{M}_B^\dagger \hat{M}_B\}$ を構成することができる。

この確率的局所操作は、局所フィルタリングとして知られている [57]. POVM 要素 $\hat{M}_B^\dagger \hat{M}_B$ は、2 準位系 B がフィルターを通過する事象を表し、残りの POVM 要素 $\hat{I}_B - \hat{M}_B^\dagger \hat{M}_B$ は、2 準位系 B がフィルターを通過しない事象を表す [13].

ロブは、この確率的局所操作により、確率 $2/(1 + f^2(n))$ で最大エンタングル状態 $|\Psi\rangle_{AB}$ を得ることに成功する：

$$(\hat{I}_A \otimes \hat{M}_B)|\Phi(n)\rangle_{A,B} \langle \Phi(n)|(\hat{I}_A \otimes \hat{M}_B^\dagger) = \frac{2}{1 + f^2(n)} |\Psi\rangle_{AB} \langle \Psi| \quad (6.3.21)$$

なお、文献 [64] が開示するプロトコルでは、エンタングル状態を抽出することはできるとしても、抽出されたエンタングル状態を特徴付けるパラメータまでは知り得ない。また、一般にそのパラメータを調べることで、量子エンタングルメントは破壊される。従って、エンタングル量を高めるための POVM を構成し得ないので、確率的局所操作を行いたいようがない。

つまり、エンタングル状態を抽出することができるのみならず、抽出されるエンタングル状態の Schmidt 係数 $f(n)$ をロブが把握しうることは、文献 [64] の手法に対する本プロトコルの有利な点である。

6.3.3 アリスが逆変換の操作を行わない場合

図 6.6 に示したように波束の収縮がフォック空間 \mathcal{F}_I と \mathcal{F}_{II} との間を往復する原因は、ウンルー効果を表す演算子 \hat{G} がフォック空間 \mathcal{F}_I と \mathcal{F}_{II} とをつないでいることにある。このため、アリスが逆変換の操作を行わなくても、波束の収縮の連鎖それ自体は生じる。

図 6.10 に、アリスが逆変換の操作を行わない場合の波束の収縮の様子を示す。

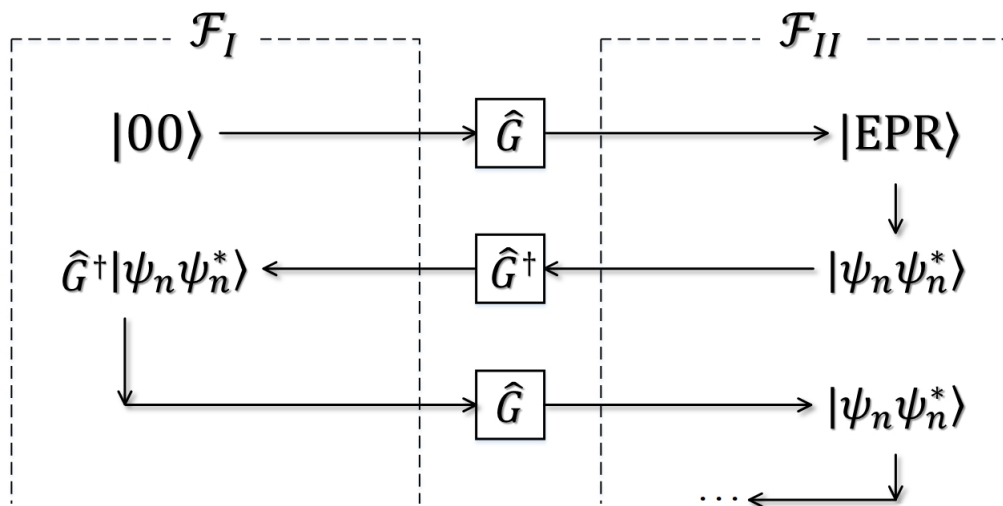


図 6.10: アリスが逆変換の操作を行わない場合の波束の収縮を示す概念図。

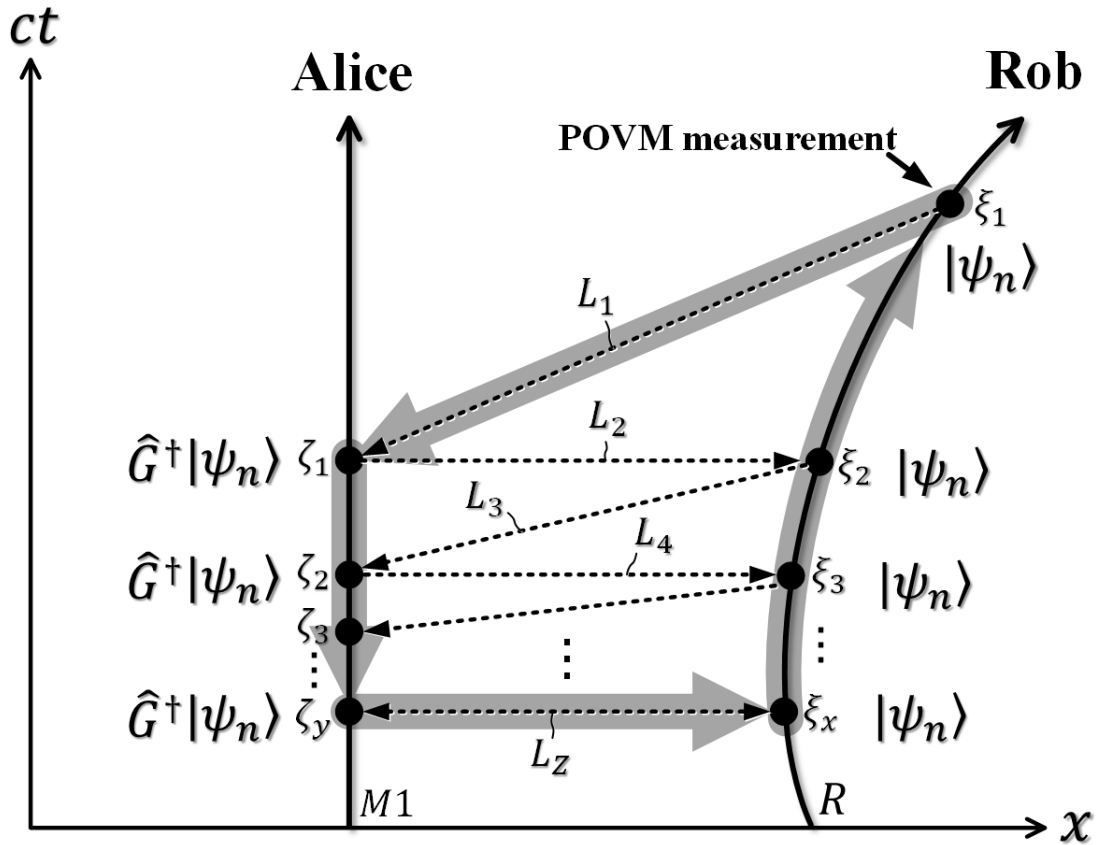


図 6.11: アリスが逆変換の操作を行わない場合の波束の収縮の連鎖を示す概念図.

図 6.11 には、アリスが逆変換の操作を行わない場合の、波束の収縮のタイミングを示している。この場合でも、世界点 ξ_1 の状態 $|\psi_n\rangle$ から発して、同じ世界点 ξ_1 の状態 $|\psi_n\rangle$ に戻る疑似的な CTC, $\xi_1 \rightarrow \zeta_1 \rightarrow \zeta_y \rightarrow \xi_x \rightarrow \xi_1$ が構成される。

既述のとおり、ロブは、2 準位系 B を時刻 ξ_2 から ξ_1 までにわたり、共通場のモード R と相互作用させる。ロブにとって、共通場のモード R 及びモード L の始状態及び終状態は $|\psi_n, \psi_n^*\rangle$ である。一方、アリスは、2 準位系 A を時刻 ζ_2 から ζ_1 までにわたり共通場のモード $M1$ と相互作用させる。アリスにとっての共通場のモード $M1$ 及びモード $M2$ の始状態及び終状態は、 $|\psi_n, \psi_n^*\rangle$ ではなく、 $\hat{G}^\dagger|\psi_n, \psi_n^*\rangle$ である。

但し、 \hat{G} が $\hat{U}_{ABF}^{\text{int}}(\tau)$ と交換するという近似の下では、POVM 測定後の 2 準位系 A, B の状態 $|\Phi\rangle_{A,B}$ は、アリスにとってもロブにとっても、次のように書ける：

$$|\Phi\rangle_{A,B} = {}_F\langle\psi_n | \hat{U}_{ABF}^{\text{int}}(\tau) |\uparrow\downarrow; \psi_n\rangle_{AB;F}. \quad (6.3.22)$$

以下、POVM $\{ |\psi_m\rangle\langle\psi_m| \}$ の要素が、コヒーレント状態、スクイーズド状態である場合について、上式 (6.3.22) に示す状態 $|\Phi\rangle_{A,B}$ を具体的に調べる。

6.3.4 CTC がコヒーレント状態よりなる場合

前節 6.3.2 では、CTC 場 F を形成するための POVM 測定が粒子数測定である場合を述べた。その場合、CTC 場 F がフォック状態 $|n\rangle_F$ で構成された。フォック状態 $|n\rangle_F$ は、そのウィグナー関数が負になりうることから、非古典的性質の度合いである非古典度の高い状態と言える [40]。

本節では、非古典度の低い状態で構成された CTC 場 F であっても量子エンタングルメントの形成に活用できるか否かを調べる。そのために、CTC 場 F を、コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ で構成する。コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ は、古典的なレーザー光の状態に対応するものとみなされており、コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ のウィグナー関数は正であることから、コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ は、フォック状態 $|n\rangle$ よりも、非古典度が低いと言える。

コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ よりなる CTC 場 F を形成するための POVM 測定について述べる。離散的な POVM において測定演算子に課される要件は、(i) ポジティブ演算子であること、及び (ii) 完全性を満たすことである [42]¹⁵。この点、コヒーレント状態 $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ は、明かにエルミートであり、かつ任意の状態 $|\chi\rangle$ に対して、 $\langle\chi|\alpha\rangle\langle\alpha|\chi\rangle = |\langle\chi|\alpha\rangle|^2 \geq 0$ より、上記要件 (i) を満たす。また、コヒーレント状態 $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ は、下式 (6.3.23) に示すように、過剰ではあるが、完全性 (ii) を満たす。

$$\int d^2\alpha \frac{|\alpha\rangle\langle\alpha|}{\pi} = \hat{I} \quad (6.3.23)$$

そこで、離散的な POVM の自然な拡張として、連続的な集合 $\left\{\frac{|\alpha\rangle\langle\alpha|}{\pi}\right\}$ を POVM とみなす¹⁶。この POVM で記述される量子測定を、図 6.11 の世界点 ξ_1 でロブが行うことにより、コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ を含む CTC 場 F が形成される。そして、既述の式 (6.3.22) より、2 準位系 A, B は、POVM 測定 “ $\langle\alpha|_F$ ” によって次の状態 $|\Phi(\alpha)\rangle_{AB}$ に射影される：

$$\begin{aligned} |\Phi(\alpha)\rangle_{AB} &= {}_F\langle\alpha| \hat{U}_{ABF}^{\text{int}}(\tau) |\uparrow\downarrow\rangle_{ABF} \\ &\propto |\uparrow\downarrow\rangle_{AB} - ig(u_A^-\alpha^* + v_A^-\alpha) |\downarrow\downarrow\rangle_{AB} - ig(u_B^+\alpha + v_B^+\alpha^*) |\uparrow\uparrow\rangle_{AB} \\ &\quad - g^2 \left[(u_A^-u_B^+ + v_A^-v_B^+) |\alpha|^2 + v_A^-v_B^+\alpha^2 + u_A^-u_B^+\alpha^{*2} \right] |\downarrow\uparrow\rangle_{AB} \end{aligned} \quad (6.3.24)$$

そして、この状態 $|\Phi(\alpha)\rangle_{AB}$ は次のように直積の形に因数分解できる：

$$|\Phi(\alpha)\rangle_{AB} = \left[|\uparrow\rangle_A - ig(u_A^-\alpha^* + v_A^-\alpha) |\downarrow\rangle_A \right] \otimes \left[|\downarrow\rangle_B - ig(u_B^+\alpha + v_B^+\alpha^*) |\uparrow\rangle_B \right] \quad (6.3.25)$$

このように、2 準位系 A と B はセパラブルとなる。即ち、非古典度の低いコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ の CTC 場 F によっては、量子エンタングルメントが形成されないことが分かった。

¹⁵測定演算子がポジティブ演算子であることは、確率が正であることを保証し、測定演算子が完全性を満たすことは、確率の和が 1 であることを保証する。

¹⁶文献 [58] の第 103 ページにも、コヒーレント状態の密度演算子を測定演算子と捉える旨の記載ある。このような量子測定は、量子光学ではヘテロダイン測定として実現される。

なお、この結果は、古典ビットの量子テレポーテーションで構成される CTC はエンタングル状態の形成に活用できないという、第 6.2.3 節の考察 3. と整合する。

6.3.5 CTC がスクイーズド状態よりなる場合

前節 6.3.4 では、CTC 場 F を形成するための POVM 測定として、コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ への射影を行った。これに代えて、スクイーズド状態への射影を行うことにより、スクイーズド状態によって CTC 場 F を構成することもできる。

スクイーズド状態は、互いに共役な振幅成分のうち一方の量子ゆらぎが、コヒーレント状態が示す標準量子限界を下回りうる等の点で、フォック状態ほどではないが、コヒーレント状態よりも高い非古典深度を達成しうる。また、スクイーズド状態は、その非古典度を、量子ゆらぎの圧搾の度合いを表すスクイージングパラメータで調整できる [59]。

そこで、スクイーズド状態で CTC 場 F が構成された状況を考察することで、CTC 場 F によって形成できるエンタングル状態のエンタングル量と、その CTC 場 F の非古典度との関係を可視化できることが期待される。以下、その具体例について述べる。

スクイージングパラメータ r によって特徴付けられるスクイーズド状態 $|r\rangle$ は、次のように、量子ゆらぎの圧搾の過程を表すユニタリー演算子 $\hat{S}(r)$ によって、コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ を発展させたものとして定義される [60] [61] :

$$\begin{aligned} |r\rangle &:= \hat{S}(r)|\alpha\rangle, \\ \hat{S}(r) &= \exp\left[\frac{r}{2}(\hat{b}\hat{b} - \hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger)\right] \end{aligned} \quad (6.3.26)$$

但し、ここでは簡単のため r は実数とする。スクイーズド状態 $|r\rangle$ よりなる CTC 場 F を形成するための POVM 測定の、正值値と完全性に関して述べておく。スクイーズド状態 $\hat{S}(r)|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{S}^\dagger(r)$ は、明かにエルミートであり、かつ任意の状態 $|\chi\rangle$ に対して、 $\langle\chi|\hat{S}(r)|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{S}^\dagger(r)|\chi\rangle = |\langle\chi|\hat{S}(r)|\alpha\rangle|^2 \geq 0$ より、ポジティブである。また、スクイーズド状態 $\hat{S}(r)|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{S}^\dagger(r)$ は、式 (6.3.23) を用いて示される下式のように、過剰ではあるが、完全性を満たす。

$$\int d^2\alpha \frac{\hat{S}(r)|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{S}^\dagger(r)}{\pi} = \hat{S}(r) \left\{ \int d^2\alpha \frac{|\alpha\rangle\langle\alpha|}{\pi} \right\} \hat{S}^\dagger(r) = \hat{I} \quad (6.3.27)$$

そこで、離散的な POVM の自然な拡張として、連続的な集合 $\left\{ \frac{\hat{S}(r)|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{S}^\dagger(r)}{\pi} \right\}$ を POVM とみなす¹⁷。この POVM で記述される量子測定を、図 6.11 の世界点 ξ_1 でロブが行うことにより、スクイーズド状態 $|r\rangle = \hat{S}(r)|\alpha\rangle$ よりなる CTC 場 F が形成される。

¹⁷文献 [58] の第 103 ページにも、スクイーズド状態の密度演算子を測定演算子と捉える旨の記載ある。このような量子測定は、量子光学ではホモダイン測定として実現される

そして、既述の式 (6.3.22) より、2 準位系 A, B は、POVM 測定 “ $\langle r|_F$ ” によって次の状態 $|\Phi(\alpha)\rangle_{AB}$ に射影される：

$$\begin{aligned}
 |\Phi(r, \alpha)\rangle_{AB} &= {}_F\langle r | \hat{U}_{ABF}^{\text{int}}(\tau) | \uparrow\downarrow r \rangle_{ABF} \\
 &\propto | \uparrow\downarrow \rangle_{AB} - ig \left(\langle r | \hat{c}^\dagger | r \rangle u_A^- + \langle r | \hat{c} | r \rangle v_A^- \right) | \downarrow\downarrow \rangle_{AB} \\
 &\quad - ig \left(\langle r | \hat{c} | r \rangle u_B^+ + \langle r | \hat{c}^\dagger | r \rangle v_B^+ \right) | \uparrow\uparrow \rangle_{AB} \\
 &\quad - g^2 \left[\langle r | \hat{c}^\dagger \hat{c} | r \rangle (u_A^- u_B^+ + v_A^- v_B^+) \right. \\
 &\quad \quad \left. + \langle r | \hat{c} \hat{c} | r \rangle v_A^- u_B^+ + \langle r | \hat{c}^\dagger \hat{c}^\dagger | r \rangle u_A^- v_B^+ \right] | \downarrow\uparrow \rangle_{AB} \quad (6.3.28)
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\langle r | \hat{c} | r \rangle = \alpha \cosh(r) - \alpha^* \sinh(r) \quad (6.3.29)$$

$$\langle r | \hat{c}^\dagger | r \rangle = \langle r | \hat{c} | r \rangle^* \quad (6.3.30)$$

$$\langle r | \hat{c} \hat{c} | r \rangle = \alpha^2 \cosh^2(r) + \alpha^{*2} \sinh^2(r) - \frac{2|\alpha|^2 + 1}{2} \sinh(2r) \quad (6.3.31)$$

$$\langle r | \hat{c}^\dagger \hat{c}^\dagger | r \rangle = \langle r | \hat{c} \hat{c} | r \rangle^* \quad (6.3.32)$$

$$\langle r | \hat{c}^\dagger \hat{c} | r \rangle = |\alpha|^2 \cosh(2r) + \sinh^2(r) - \frac{(\alpha^2 + (\alpha^*)^2)}{2} \sinh(2r) \quad (6.3.33)$$

である。以上の式 (6.3.29)–(6.3.33) を式 (6.3.28) に代入し、式 (6.3.28) の右辺の、スクイーミングパラメータ r に対する依存性を調べる。ここで知りたいことは、スクイーミングパラメータ r に対する依存性だけである。そこで、理解を容易にするため、スクイーミングパラメータ r に依存しない定数 g, f_A^-, f_B^+, α をすべて実数 1 と置く。

すると、あらためて規格化された式 (6.3.28) の右辺が表す 2 準位系 A と B の状態 $|\Psi(r, \alpha = 1)\rangle_{AB}$ は、次のように書ける。

$$|\Phi(r, \alpha = 1)\rangle_{AB} = \frac{| \uparrow\downarrow \rangle_{AB} - i2e^{-r} (| \uparrow\uparrow \rangle_{AB} + | \downarrow\downarrow \rangle_{AB}) - (5e^{-2r} - 1) | \downarrow\uparrow \rangle_{AB}}{\sqrt{1 + 8e^{-2r} + (5e^{-2r} - 1)^2}} \quad (6.3.34)$$

この式 (6.3.34) より、 r の増大と共に、 $|\Phi(r, \alpha = 1)\rangle_{AB}$ が、最大エンタングル状態であるベル状態 $|\text{Bell}\rangle = (| \uparrow\downarrow \rangle + | \downarrow\uparrow \rangle)/\sqrt{2}$ に近づくとみられる。そこで、 $|\Phi(r, \alpha = 1)\rangle_{AB}$ のエンタングル量は、 $|\Phi(r, \alpha = 1)\rangle_{AB}$ と、ベル状態 $|\text{Bell}\rangle$ との内積 $\langle \text{Bell} | \Phi(r, \alpha = 1) \rangle$ を用いて評価できると考えられる。

但し、スクイーミングパラメータ r がゼロの場合は、式 (6.3.26) に示す $\hat{S}(r)$ が恒等演算子 \hat{I} となり、CTC 場 F はコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ で構成されることとなる。そして、その場合は、前節 6.3.4 で述べたように、CTC 場 F から取り出されるエンタングル量はゼロであった。

そこで、内積 $\langle \text{Bell} | \Phi(r, \alpha = 1) \rangle$ を、 $r = 0$ でゼロとなるように $\langle \text{Bell} | \Phi(r = 0, \alpha = 1) \rangle$ だけオフセットし、かつ $r \rightarrow \infty$ の場合の最大値が 1 になるように規格化した次の関数 $E(r)$

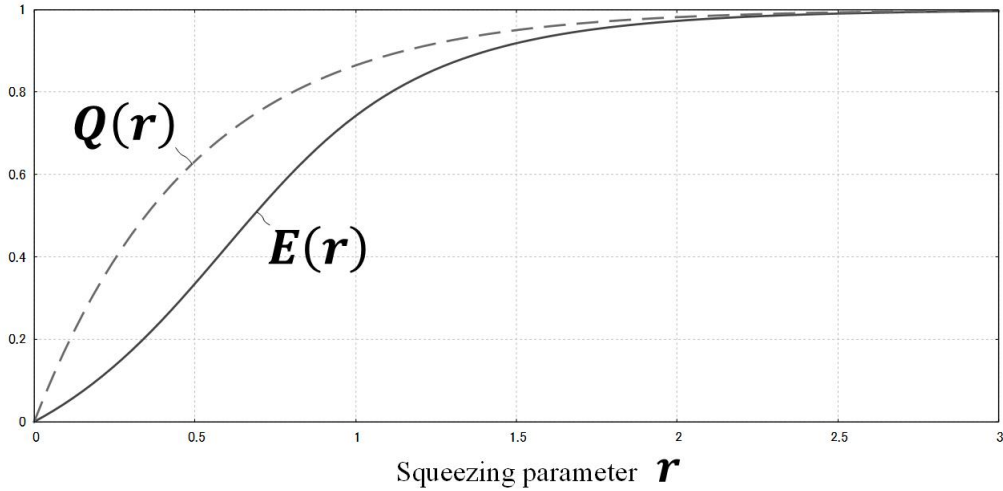


図 6.12: CTC 場 F の非古典性の度合いを表す非古典度 $Q(r)$ と、その CTC 場 F を用いて形成されるエンタングル状態のエンタングル量 $E(r)$ とのグラフ。

を、CTC 場 F から取り出せるエンタングル量を定義する:

$$E(r) := \frac{\langle \text{Bell} | \Phi(r, \alpha = 1) \rangle - \langle \text{Bell} | \Phi(r = 0, \alpha = 1) \rangle}{\langle \text{Bell} | \Phi(r = \infty, \alpha = 1) \rangle - \langle \text{Bell} | \Phi(r = 0, \alpha = 1) \rangle} \quad (6.3.35)$$

一方、スクイーミングパラメータが r のスクイズド状態 $|r\rangle = \hat{S}(r)|\alpha\rangle$ の非古典度 $Q(r)$ は、次式で定義される [59].

$$Q(r) = \frac{\tanh(r)}{1 + \tanh(r)} \propto (1 - e^{-2r}) \quad (6.3.36)$$

図 6.12 に、 $E(r)$ と非古典度 $Q(r)$ のグラフを示す。図示のように、非古典度 $Q(r)$ の増大に伴って、 $E(r)$ も増大する。つまり、CTC 場 F を構成する量子状態が非古典的である程、CTC 場 F を用いて形成されるエンタングル状態のエンタングル量が増大することが確認された。なお、この結果は、図 6.3 で、量子テレポーテーションの CTC の非古典度を表すコヒーレンス強度 $Q(|a|^2)$ が大きい程、形成されるエンタングル状態のフォンノイマンエントロピー $E(|\alpha|^2)$ が増大する結果と整合する。

6.4 まとめ

1. 以上説明したように、量子テレポーテーションの状況下のみならず、慣性系のアリスと一様加速運動系のロブとが共通の量子場内に存する状況下においても、CTC が構成されうる。前者の状況下では、量子ビットを媒体とした CTC が構成され、後者の状況下では、量子場を媒体とした CTC が構成される。

2. 量子テレポーテーションの CTC と、CTC 場 F とのいずれも、エンタングル状態の形成に活用することができる。但し、量子テレポーテーションの CTC と、CTC 場 F とのいずれも、非古典的であることを要する。古典的な CTC、具体的には、古典ビットの量子テレポーテーションで構成される CTC、及びコヒーレント状態よりなる CTC 場 F は、エンタングル状態の形成に活用することができない。
3. 図 6.3 に示したように、量子テレポーテーションの CTC の非古典度を表すコヒーレンス強度 $Q(|a|^2)$ が大きい程、形成されるエンタングル状態のエンタングル量を表すフォンノイマンエントロピー $E(|a|^2)$ が増大する。量子テレポーテーションの CTC の非古典度は、テレポートする状態のコヒーレンスの強さに依存する。同様に、図 6.12 に示したように、CTC 場 F の非古典度 $Q(r)$ が高い程、形成されるエンタングル状態のエンタングル量 $E(r)$ が増大する。CTC 場 F の非古典度は、ロブが行う POVM 測定 of POVM 要素 $\frac{\hat{S}(r)|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{S}^\dagger(r)}{\pi}$ のスキューニングパラメータ r によって調整できる。
4. スペースライクに離間した 2 準位系 A, B の各々に対する局所操作で、エンタングル状態を形成することができる。一般にエンタングル状態は局所操作では生成され得ないから、量子テレポーテーションの CTC 及び CTC 場 F は、それが非古典的である場合には、スペースライクに離間した 2 準位系 A, B を直接に相互作用させる大局操作の役割を果たすと考えられる。
5. CTC 場 F の形成には、第 1 に、アリスにとっての場とロブにとっての場との一方を他方と同じ状態に収縮させる恒等チャンネル \hat{I} が必要である。また、第 2 に、アリスにとっての場とロブにとっての場との各々の収縮を過去に遡及させるための、アリスに対するロブの相対運動が必要である。つまり、CTC 場 F の形成においては、収縮を過去に遡及させるために、ロブにとっての同時刻線がアリスにとって過去に向かう方向に傾斜するという相対論的な効果を利用した。
 量子テレポーテーションにおいても同様に CTC が構成されるのであるから、量子テレポーテーションにおいては、資源としての量子エンタングルメントが、上述した恒等チャンネル \hat{I} の役割と、波束の収縮を過去に遡及させる役割とを果たしたのではないと思われる。
6. 2 準位系 B は、一様加速運動しながら右リンドラーくさび領域のモード R と相互作用する。それにも関わらず、CTC 場 F をフォック状態で構成する場合には、左リンドラー領域のモード L の存在により、デコヒーレンスが回避される。その結果、純粋状態のエンタングル状態が得られる。
7. また、CTC 場 F をフォック状態で構成する場合には、ロブが、エンタングル状態のシュミット係数 $S(n)$ を知りうるため、最大エンタングル状態を確率的に得る局所操作の遂行が可能である。

第7章 ウンルー効果を利用した量子テレポーテーション

本章では、ウンルー効果の他の活用事例として、右リンドラーくさび状領域のモード R と左リンドラーくさび状領域のモード L とのエンタングル状態 $|\text{EPR}\rangle_{L,R}$ を、量子テレポーテーションの資源として用いる手法を述べる。

7.1 量子テレポーテーションの手順

図 7.1 に、量子テレポーテーションのスキームを示す。前章で述べた手順で、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I とリンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} とをつなぐ恒等チャンネル $\hat{I} = \hat{G}\hat{G}^\dagger$ がアリスによって構成されていることを前提とする。

以下、図 7.1 を参照しつつ、一様加速運動しているロボから、慣性系に静座しているアリスに対して、場の任意の量子状態 $|\psi\rangle$ を量子テレポーテーションで転送する手順を述べる。

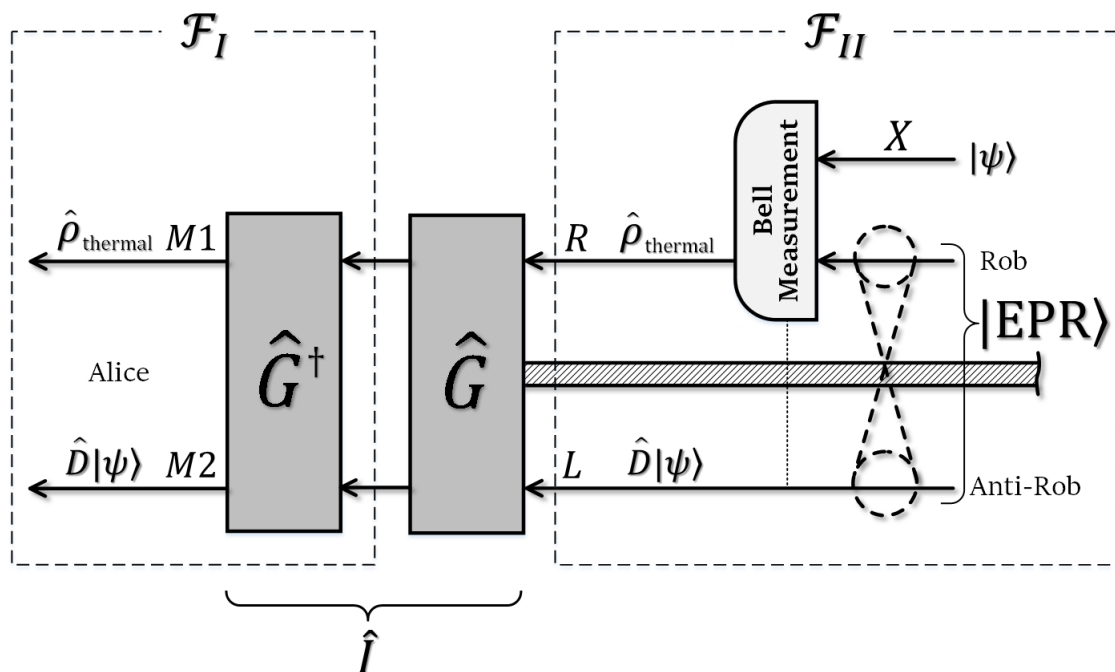


図 7.1: リンドラー時空の量子エンタングルメントを用いた量子テレポーテーション。

量子テレポーテーションは、第 6 章の図 6.5 に示した POVM 測定 “ $\langle \psi_n |_R$ ” をベル測定 (Bell measurement) に置き換えることにより達成される。

具体的には、まず、一様加速運動中のロブが、右リンドラーくさび状領域の熱状態 $\hat{\rho}_{\text{thermal}}$ にあるモード R と、モード R とは別のモード X の任意の量子状態 $|\psi\rangle_X$ とを、ベル測定に供する。なお、2つの場のベル測定については、文献 [65] の教示に基づいて行われるものとする¹。ベル測定により、モード R と X とは、次のベル状態 $|\beta\rangle_{R,X}$ に射影される [40]。下式 (7.1.1) で、 $\hat{D}_X(\beta)$ は、ベル測定結果 β に依存する変位演算子 (displacement operator) である。

$$|\beta\rangle_{R,X} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{D}_X(\beta) |n, n\rangle_{R,X} \quad (7.1.1)$$

式 (7.1.1) に示すように、ベル測定によってモード R がモード X とエンタングルされる。但し、式 (7.1.1) からモード X をトレースアウトすると、熱状態 $\hat{\rho}_{\text{thermal}}$ が得られる。つまり、モード R は、ベル測定の前後を通じて熱状態 $\hat{\rho}_{\text{thermal}}$ のままである。

一方、左リンドラーくさび状領域の場における熱状態にあったモード L は、上記ベル測定により、次の状態に射影される：

$${}_{XR}\langle \beta | \psi; \text{EPR} \rangle_{X;RL} \propto \hat{D}_L(\beta) |\psi\rangle_L \quad (7.1.2)$$

つまり、モード L は、ベル測定結果 β に依存する変位演算子 $\hat{D}_L(\beta)$ によって、転送したい状態 $|\psi\rangle$ をユニタリー発展させた状態 $\hat{D}_L(\beta) |\psi\rangle_L$ に射影される。

ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I は、恒等チャンネル \hat{I} でリンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} とつながれているので、アリスは、モード L とつながれたモード $M2$ において、状態 $\hat{D}_L(\beta) |\psi\rangle_{M2}$ を得る。なお、モード R とつながれたモード $M1$ は、ウンルー放射を表す熱状態 $\hat{\rho}_{\text{thermal}}$ となり、この状態は使用しない。

次に、ロブからアリスに対してベル測定結果 β を古典通信で通知する。ベル測定結果 β は、モード $M2$ の状態 $\hat{D}_L(\beta) |\psi\rangle_{M2}$ を、転送したい状態 $|\psi\rangle_{M2}$ に変換するのに必要な情報である。アリスは、アリスからベル測定の結果 β を古典通信によって取得することで、逆変換 $\hat{D}^\dagger(\beta)$ を特定できる。アリスは、恒等チャンネル \hat{I} を保ったままで、逆変換 $\hat{D}^\dagger(\beta)$ をモード $M2$ の状態 $\hat{D}_L(\beta) |\psi\rangle_{M2}$ に施すことにより、状態 $|\psi\rangle_{M2}$ を得る。以上で、量子テレポーテーションの完了である。

なお、上記の説明では、予め恒等チャンネル \hat{I} が形成されていることを前提としたが、恒等チャンネル \hat{I} の形成とベル測定との順番は任意である。例えば、アリスは、ロブからのベル測定結果 β の通知の際に、恒等チャンネル \hat{I} を形成してもよい。

また、上式 (7.1.2) は、モード R と L との状態 $|\text{EPR}\rangle_{L,R}$ が十分に最大エンタングル状態に近いことを仮定しているが、本手法では、ロブの固有加速度 a が大きいほど、モード R と L との間のエンタングル量が高まり、量子テレポーテーションのフィデリティが向上する。

¹ 具体的なベル測定の実現方法は今後の課題とする。

7.2 量子複製不可能定理に関する考察

以上説明した量子テレポーテーションの過程において、アリスが行うべき逆変換 $\hat{D}^\dagger(\beta)$ は、いつでもベル測定結果 β によって特定できるから、状態 $\hat{D}(\beta)|\psi\rangle$ は、実質的には転送したい状態 $|\psi\rangle$ と同じものとみてもよい。そこで、以下、 $\hat{D}(\beta) = \hat{I}$ とおく。

そうすると、図7.1にも示したように、転送したい状態である未知の状態 $|\psi\rangle$ は、ベル測定で消滅したのち、モード $M2$ のみならず、モード L にも再現されたことになる。このことは、量子複製不可能定理 (no-cloning theorem) に抵触しないだろうか? この点については、次のように考えられる。

恒等チャンネル \hat{I} を形成することができるのは、アリスがロブと共通の場をみているとき、即ち、アリスが右リンドラーくさび状領域 R に居るときである。つまり、量子テレポーテーションによる状態 $|\psi\rangle$ の転送は、アリスとロブとの両者が右リンドラーくさび状領域 R 内に居るときに完結する。

そして、アリスとロブとが存する右リンドラーくさび状領域 R は、状態 $|\psi\rangle$ が再現される左リンドラーくさび状領域 L とは、事象の地平面によって因果的に断絶されている。しかも、左リンドラーくさび状領域 L のモード L とは、第3の第3.7節で定義した反ロブにとつてのモードであり、反ロブとは、第3の図3.2に示したように時間をさかのぼって運動するような仮想的な量子系である。従って、誰もモード L の状態 $|\psi\rangle$ にはアクセスすることができない²。つまり、モード L の状態 $|\psi\rangle$ は利用することができない。

それゆえ、モード $M2$ のみならずモード L にも未知の状態 $|\psi\rangle$ が再現されることは、量子複製不可能定理には抵触しないと考えられる。

7.3 まとめ

以上説明したように、ウンルー効果によって生じる、右リンドラーくさび状領域のモード R と左リンドラーくさび状領域のモード L とのエンタングル状態 $|\text{EPR}\rangle_{L,R}$ を、量子テレポーテーションの資源として用いることができる。

未知の状態 $|\psi\rangle$ がモード X からモード $M2$ に転送される過程でモード L にも状態 $|\psi\rangle$ が再現されることは、量子複製不可能定理には抵触しない。

² 敢えて言えば、これまで述べた“反ロブ”はモード L の状態 $|\psi\rangle$ にアクセスすることができるが、勿論、“反ロブ”は仮想上の人物である。

第8章 結論

8.1 提案事項のまとめ

ウンルー放射の熱揺らぎは、量子論に特有の重ね合わせ状態を古典的な状態へと劣化させるデコヒーレンスの原因となる。このため、ウンルー効果は、常識的には、量子情報処理を遂行するうえで回避すべきものとされる。しかし、その一方で、ウンルー効果は、量子情報処理において必須と言えるほど重要な操作であるパラメトリック増幅と物理的に等価である。本研究では、この事実に着目し、ウンルー効果には量子情報処理に有効活用できる可能性が秘められていると推察した。本論文は、その推察に基づいて、ウンルー効果の活用方法を模索した結果を述べたものである。

本論文では、まず、第2章から第4章にわたってウンルー効果のメカニズムを数学的に調べた。そして、その数学的メカニズムに基づいて、残りの第5章から第7章でウンルー効果を有効活用する事例を提示した。具体的には、本論文では、ウンルー効果の活用方法として、以下の3つの事項を示した。

- (1) 第5章の第5.3節では、ウンルー効果そのものを表す、左リンドラーくさび状領域と右リンドラーくさび状領域との間の量子エンタングルメントを、アリスが利用可能な形態のエンタングル状態 $|EPR\rangle_{M1,M2}$ として、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I に取り出すことを示した。
- (2) 第6章では、ウンルー効果を CTC の形成に活用し、かつその CTC を、アリスが保有する2準位系 A とロブが保有する2準位系 B との間の量子エンタングルメントの形成に活用する手法を述べた。この手法で得られるエンタングル状態 $|\Phi(n)\rangle_{A,B}$ は、アリスとロブとに共有される。
- (3) 第7章では、ウンルー効果そのものを表す、左リンドラーくさび状領域と右リンドラーくさび状領域との間の量子エンタングルメントを、ロブからアリスへの量子テレポーテーションの資源として用いることを示した。

上述した提案事項 (1) 及び (2) で得られる量子エンタングルメントは、あらゆる量子情報処理の資源として用いることができる。また、上述した提案事項 (3) で実現される量子テレポーテーションは、ロブからアリスへの量子通信の手段としてのみならず、量子情報処理の一部を構成する基本的な操作の1つとしても用いられ得る。即ち、上述した提案事項 (1)–(3) によれば、量子情報処理の資源又は基本的な量子操作が提供される。

以上のとおり、上述した提案事項 (1)–(3) を示したことをもって、ウンルー効果の量子情報処理への活用手法を示すという、所期の目的が達成された。

8.2 本研究の着眼点及び貢献的意義

第1章で述べたとおり、これまでウンルー効果が活用に使されなかった理由は、それがデコヒーレンスの原因となることだけでなく、ウンルー効果をもたらす量子エンタングルメントの一方の片割れが、原理的にアクセス不可能なモード L に存在することにもあると思われる。即ち、量子エンタングルメントは、他方の片割れにしかアクセスできないのであれば、それは単なる熱浴を表すものに過ぎず、利用価値はない。

本研究では、この難点を、第5章で述べたとおり、ウンルー効果を表すユニタリー演算子 \hat{G} がミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I とリンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} とをつなぐ量子チャンネルの役割を果たしていることに着眼して解決した。つまり、本論文で“ウンルー効果を活用する”とは、具体的には、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I とリンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} との数学的なつながり \hat{G} を活用することを指す。具体的には、逆変換 \hat{G}^\dagger の操作によって、量子チャンネル \hat{G} を恒等チャンネル \hat{I} に変換することが原理的には可能である。そして、恒等チャンネル \hat{I} によれば、アクセス不可能なモード L が、アクセス可能なモード $M2$ とつながれる。このため、モード L の量子状態をモード $M2$ に取り出せる。つまり、モード $M2$ を通じて、間接的にモード L にアクセスすることが可能となる。

このようにして、本研究では、ウンルー効果をもたらすモード R, L 間の量子エンタングルメントの利用を可能とした。モード R, L 間の量子エンタングルメントが利用可能となった以上、ウンルー効果を、パラメトリック下方変換と同様の使い方で活用できる。上述した提案事項 (1) 及び (3) は、まさにこのことを示す。

さらに、モード L への間接的なアクセスを可能とする恒等チャンネル \hat{I} は、波束の収縮の双方向的な伝播を許す可逆性をもつ。この可逆性をも利用することで、パラメトリック下方変換では実現し得ない、ウンルー効果に特有の活用形態が実現された。そのことを示すのが提案事項 (2) である。つまり、ウンルー効果では、ロブが一様加速運動していることが原因で、波束の収縮が恒等チャンネル \hat{I} を往復しつつ過去へと遡及し、その結果として、疑似的に CTC が形成される。そして、その CTC が、アリスーロブ間の量子エンタングルメントの形成に利用される。このように、提案事項 (2) は、恒等チャンネル \hat{I} の可逆性と、ロブの一様加速運動とが相まって実現されたものである。

以上のとおり、本研究は、これまで活用されることのなかったウンルー効果が活用可能であることを理論的にはあるが示したという点で、貢献的意義を有する。さらに、提案事項 (2) に関しては、CTC の利用方法を示したという点でも貢献的意義を有すると考える。第6章の第6.1節で述べたとおり、これまで CTC の存在そのものは指摘されていたが、その利用方法までは提案されていないからである。

8.3 発見事項のまとめ

上述した提案事項 (2) 及び (3) の創出過程で見い出されたことについてまとめる。

- 提案事項 (2) では、第6章の第6.3.5節で述べたとおり、CTC を構成する量子状態の非古典度が大きいほど、得られる量子エンタングルメントの量が大きい。従って、CTC

を形成するための POVM 測定の基底には、フォック基底又はスクイーミングパラメータ r が十分に大きいスクィーズド基底を用いることが有利である。

- 提案事項 (2) では、第 6 章の第 6.3.2 節で述べたとおり、POVM 測定にフォック基底を用いる場合、モード L の存在により、2 準位系 A, B のデコヒーレンスが回避される。具体的には、2 準位系 A, B と因果的に断絶されているモード L が POVM 測定で特定のフォック状態 $|n\rangle$ に射影されることにより、モード L とエンタングルしたモード R の熱揺らぎが抑え込まれる。これにより、2 準位系 A, B が熱揺らぎの影響を受けることが回避されるので、2 準位系 A, B のデコヒーレンスが回避される。
- 提案事項 (3) では、第 7 章の第 7.2 節で述べたとおり、モード L への直接的なアクセスが原理的に不可能であるということが、量子複製不可能定理を保証する。

8.4 今後の課題

現状、量子状態を担持する媒体としては光子、電子等の粒子を用いることが一般的である。これに対し、本研究では、場を、量子状態を担持する媒体として用いた。場に対する各種量子操作の具体的な方法は、まだ十分に確立されているとは言えない。

本研究では、場に対してユニタリー変換 \hat{G}^\dagger を具体的にどのようにして実現するかということ、及び 2 つの場に対するベル測定を具体的にどのようにして実現するかということが今後の課題である。

付録 A 正準交換関係からの不確定性関係の導出

本付録 A では，正準交換関係 $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ から不確定性関係 $\delta q \delta p \geq \hbar/2$ が導出されることを確認する．ここで δq は，一般化座標 q の測定値の標準偏差 $\delta q := \sqrt{\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2}$ である．また， δp は，一般化運動量 p の測定値の標準偏差 $\delta p := \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$ である．

まず，任意の状態 $|\psi\rangle$ に対して，次のように演算子 $\Delta\hat{q}$ 及び $\Delta\hat{p}$ を定義する：

$$\Delta\hat{q} := \hat{q} - \langle \psi | \hat{q} | \psi \rangle = \hat{q} - \langle \hat{q} \rangle \quad (\text{A.0.1})$$

$$\Delta\hat{p} := \hat{p} - \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle = \hat{p} - \langle \hat{p} \rangle \quad (\text{A.0.2})$$

正準交換関係 $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ を用いると，演算子 $\Delta\hat{q}$ と $\Delta\hat{p}$ との交換関係が次のように求まる：

$$[\Delta\hat{q}, \Delta\hat{p}] = i\hbar \quad (\text{A.0.3})$$

一方，任意の実数 λ に対して， $(\Delta\hat{q} + i\lambda\Delta\hat{p})|\psi\rangle$ は状態ベクトルである．そのノルムの 2 乗は，次のように計算される：

$$\begin{aligned} \|(\Delta\hat{q} + i\lambda\Delta\hat{p})|\psi\rangle\|^2 &= \langle \psi | (\Delta\hat{q} - i\lambda\Delta\hat{p})(\Delta\hat{q} + i\lambda\Delta\hat{p}) | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | (\Delta\hat{q})^2 + i\lambda[\Delta\hat{q}, \Delta\hat{p}] + \lambda^2(\Delta\hat{p})^2 | \psi \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.0.4})$$

$$= \langle \psi | (\Delta\hat{p})^2 | \psi \rangle \lambda^2 - \hbar\lambda + \langle \psi | (\Delta\hat{q})^2 | \psi \rangle \quad (\text{A.0.5})$$

但し，式 (A.0.4) から式 (A.0.5) への移行において，式 (A.0.3) を用いた．

状態ベクトルのノルムは非負なので，式 (A.0.5) の左辺の値もまた非負である．従って，いかなる実数 λ に対しても式 (A.0.5) の右辺の値は非負でなければならない．即ち，式 (A.0.5) を未知数 λ の 2 次方程式とみたとき，その判別式はゼロ又は負でなければならない：

$$\begin{aligned} \hbar^2 - 4\langle \psi | (\Delta\hat{q})^2 | \psi \rangle \langle \psi | (\Delta\hat{p})^2 | \psi \rangle &\leq 0 \\ \therefore \langle \psi | (\Delta\hat{q})^2 | \psi \rangle \langle \psi | (\Delta\hat{p})^2 | \psi \rangle &\geq \frac{\hbar^2}{4} \end{aligned} \quad (\text{A.0.6})$$

上式 (A.0.6) の左辺の $\langle \psi | (\Delta\hat{q})^2 | \psi \rangle$ は，式 (A.0.1) を用いると，次のとおり，既述の標準偏

差 δq の 2 乗，即ち分散に他ならない：

$$\begin{aligned}\langle \psi | (\Delta \hat{q})^2 | \psi \rangle &= \langle \psi | \hat{q}^2 - 2\hat{q}\langle \hat{q} \rangle + \langle \hat{q} \rangle^2 | \psi \rangle \\ &= \langle \hat{q}^2 \rangle - \langle \hat{q} \rangle^2 \\ &= \delta q^2\end{aligned}\tag{A.0.7}$$

同様に，上式 (A.0.6) の左辺の $\langle \psi | (\Delta \hat{p})^2 | \psi \rangle$ は，式 (A.0.2) を用いると，標準偏差 δp の 2 乗，即ち分散に他ならない：

$$\begin{aligned}\langle \psi | (\Delta \hat{p})^2 | \psi \rangle &= \langle \psi | \hat{p}^2 - 2\hat{p}\langle \hat{p} \rangle + \langle \hat{p} \rangle^2 | \psi \rangle \\ &= \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 \\ &= \delta p^2\end{aligned}\tag{A.0.8}$$

そこで，式 (A.0.7) と式 (A.0.8) とを式 (A.0.6) に代入すると，次式を得る：

$$\begin{aligned}\delta q^2 \delta p^2 &\geq \frac{\hbar^2}{4} \\ \therefore \delta q \delta p &\geq \frac{\hbar}{2}\end{aligned}\tag{A.0.9}$$

上式 (A.0.9) は，不確定性関係に他ならない。

以上のとおり，正準交換関係 $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ から不確定性関係 $\delta q \delta p \geq \hbar/2$ が導出されることが確認された。

付録B ウンルー効果をもたらすユニタリー演算子 \hat{G} の作用の確認

第4章で示した式(4.2.9)を以下に再掲する。但し、第4章で述べたとおり、特定のモード k に着目するため、添え字 k の表記は取り除く。

$$\hat{G} = \exp \left[-\theta \left(\hat{a}_R^\dagger \hat{a}_L^\dagger - \hat{a}_R \hat{a}_L \right) \right] \quad (\text{B.0.1})$$

この演算子 \hat{G} は、次のとおりユニタリー条件を充足するため、ユニタリー演算子である：

$$\hat{G}^\dagger \hat{G} = \exp \left[-\theta \left(\hat{a}_R \hat{a}_L - \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_L^\dagger + \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_L^\dagger - \hat{a}_R \hat{a}_L \right) \right] = \hat{I} \quad (\text{B.0.2})$$

以下、このユニタリー演算子 \hat{G} の作用を確認する。

B.1 リンドラーラダー演算子の時間発展の確認

まず、ユニタリー演算子 \hat{G} によるリンドラーラダー演算子 \hat{a}_R , \hat{a}_L^\dagger の時間発展を確認する。具体的には、第4章の式(4.2.11)が同章の式(4.2.7)等しいことを確認する。そのために、以下に示すアダマールの公式[31]を用いる：

$$e^{\theta \hat{B}} \hat{A} e^{-\theta \hat{B}} = \hat{A} + \theta [\hat{B}, \hat{A}] + \frac{\theta^2}{2!} [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]] + \frac{\theta^3}{3!} [\hat{B}, [\hat{B}, [\hat{B}, \hat{A}]]] + \dots \quad (\text{B.1.1})$$

このアダマールの公式(B.1.1)において、 $\hat{A} = \hat{a}_R$, $\hat{B} = \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_L^\dagger - \hat{a}_R \hat{a}_L$ と置くと、次式を得る：

$$\begin{aligned} \hat{G}^\dagger \hat{a}_R \hat{G} &= \hat{a}_R + \theta \left(-\hat{a}_L^\dagger \right) + \frac{\theta^2}{2!} \hat{a}_R + \frac{\theta^3}{3!} \left(-\hat{a}_L^\dagger \right) + \dots \\ &= \hat{a}_R \left(1 + \frac{\theta^2}{2!} + \dots \right) - \hat{a}_L^\dagger \left(\theta + \frac{\theta^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \hat{a}_R \cosh \theta - \hat{a}_L^\dagger \sinh \theta \end{aligned} \quad (\text{B.1.2})$$

但し、ボース粒子の交換関係 $[\hat{a}_R, \hat{a}_R^\dagger] = 1$, 及び $[\hat{a}_L, \hat{a}_L^\dagger] = 1$ を用いた。

同様に、アダマールの公式(B.1.1)において、 $\hat{A} = \hat{a}_L^\dagger$, $\hat{B} = \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_L^\dagger - \hat{a}_R \hat{a}_L$ と置くと、次式を得る：

$$\begin{aligned}
 \hat{G}^\dagger \hat{a}_L^\dagger \hat{G} &= \hat{a}_L^\dagger + \theta(-\hat{a}_R) + \frac{\theta^2}{2!} \hat{a}_L^\dagger + \frac{\theta^3}{3!} (-\hat{a}_R) + \cdots \\
 &= \hat{a}_L^\dagger \left(1 + \frac{\theta^2}{2!} + \cdots \right) - \hat{a}_R \left(\theta + \frac{\theta^3}{3!} + \cdots \right) \\
 &= \hat{a}_L^\dagger \cosh \theta - \hat{a}_R \sinh \theta
 \end{aligned} \tag{B.1.3}$$

上式 (B.1.2) 及び (B.1.3) を行列の形にまとめると、次式を得る：

$$\hat{G}^\dagger \begin{bmatrix} \hat{a}_R \\ \hat{a}_L^\dagger \end{bmatrix} \hat{G} = \begin{bmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_R \\ \hat{a}_L^\dagger \end{bmatrix} \tag{B.1.4}$$

これより、第 4 章の式 (4.2.11) が同章の式 (4.2.7) 等しいことが確認された。

B.2 リンドラー真空の時間発展の確認

次に、上式 (B.0.1) に示すユニタリー演算子 \hat{G} によるリンドラー真空 $|0, 0\rangle_{R,L}$ の時間発展を確認する。具体的には、第 4 章の式 (4.4.2) を確認する。

上式 (B.0.1) に示すユニタリー演算子 \hat{G} は、Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) の公式を用いて示される disentangling 定理 [32][33][34] により、次のように展開される：

$$\begin{aligned}
 \hat{G} &= \exp \left[-\theta \left(\hat{a}_R^\dagger \hat{a}_L^\dagger - \hat{a}_R \hat{a}_L \right) \right] \\
 &= \hat{G}a \cdot \hat{G}b \cdot \hat{G}c, \\
 \hat{G}a &= \exp \left[-\tanh \theta \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_L^\dagger \right],
 \end{aligned} \tag{B.2.1}$$

$$\hat{G}b = \exp \left[-\ln(\cosh \theta) \left(\hat{a}_R^\dagger \hat{a}_R + \hat{a}_L^\dagger \hat{a}_L + 1 \right) \right], \tag{B.2.2}$$

$$\hat{G}c = \exp \left[\tanh \theta \hat{a}_R \hat{a}_L \right]. \tag{B.2.3}$$

消滅演算子 \hat{a}_R と \hat{a}_L の各々は、リンドラー真空 $|0, 0\rangle_{R,L}$ を消す作用をもつ。

このため、式 (B.2.2) に示す演算子 $\hat{G}b$ は、リンドラー真空 $|0, 0\rangle_{R,L}$ への作用においては、 $\hat{G}b = \exp[-\ln(\cosh \theta)] \hat{I} = \hat{I}/\cosh \theta$ とみなせる。

同様に、式 (B.2.3) に示す演算子 $\hat{G}c$ のマクローリン展開の第 2 項以降は、リンドラー真空 $|0, 0\rangle_{R,L}$ を消す。このため、リンドラー真空 $|0, 0\rangle_{R,L}$ への作用においては、演算子 $\hat{G}c$ は、そのマクローリン展開の第 1 項のみに着目すればよい。即ち、 $\hat{G}c = \hat{I}$ とみなせる。

従って、ユニタリー演算子 \hat{G} をリンドラー真空 $|0,0\rangle_{R,L}$ に作用させると、次式を得る：

$$\begin{aligned}
 |0\rangle_M &= \hat{G} |0,0\rangle_{R,L} \\
 &= \hat{G}a \cdot \hat{G}b \cdot \hat{G}c |0,0\rangle_{R,L} \\
 &= \hat{G}a \cdot \frac{\hat{I}}{\cosh \theta} \cdot \hat{I} |0,0\rangle_{R,L} \\
 &= \frac{1}{\cosh \theta} \exp \left[-\tanh \theta \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_L^\dagger \right] |0,0\rangle_{R,L} \\
 &= \frac{1}{\cosh \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\tanh \theta \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_L^\dagger \right)^n |0,0\rangle_{R,L} \\
 &= \frac{1}{\cosh \theta} \sum_{n=0}^{\infty} (-\tanh \theta)^n \frac{(\hat{a}_R^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\hat{a}_L^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0,0\rangle_{R,L} \\
 &= \frac{1}{\cosh \theta} \sum_{n=0}^{\infty} (-\tanh \theta)^n |n,n\rangle_{R,L} \tag{B.2.4}
 \end{aligned}$$

以上より、第 4 章の式 (4.4.2) が確認された¹。

¹ 第 4 章の式 (4.2.9) 及び上式 (B.0.1) において、ユニタリー演算子 \hat{G} の指数部分 $[-\theta(\hat{a}_R^\dagger \hat{a}_L^\dagger - \hat{a}_R \hat{a}_L)]$ は、より一般的には、 $\Theta = \theta e^{i\varphi}$ として、 $[-\Theta \hat{a}_R^\dagger \hat{a}_L^\dagger + \Theta^* \hat{a}_R \hat{a}_L]$ と書ける。ハイパボリックタンジェントは奇関数であるため、その位相 φ の選び方によっては、第 4 章の式 (4.4.2) 及び上式 (B.2.4) 中の $(-\tanh \theta)^n$ の括弧内の負号が取れて $(\tanh \theta)^n$ となる定義もあり得る。本論文では、位相 $\varphi = 0$ を選んでいる結果、エンタングル状態 $|EPR\rangle_{R,L}$ の定義において $(-\tanh \theta)^n$ のように負号が付く。本論文のこの定義と整合する定義を示した文献として、文献 [18] の第 4 章、文献 [32] の第 5 章の第 5.2.2 節、文献 [35] の第 2 章の第 2.5 節が挙げられる。

付録C 熱状態からのプランクの放射式の導出

本付録Cでは、第4章の式(4.4.4)に示した熱状態が、黒体放射の状態と等価であることを確認する。そのために、熱状態(4.4.4)から、黒体放射の特徴を表現するプランクの放射式(Planck's formula of radiation)が導出されることを示す。

プランクの放射式は、黒体から放射される電磁波のエネルギー分布を表す。ここでいうエネルギー分布とは、黒体から放射される電磁波のエネルギー密度の、その電磁波に含まれる角振動数 ω に対する依存性を意味する。具体的には、電磁場を量子化して光子の集まりとして捉えたうえで、プランクの放射式は、[角振動数 ω のエネルギー固有状態の数密度] \times [1つのエネルギー固有状態を占める平均光子数] \times [1光子あたりのエネルギー($=\hbar\omega$)], で表される、角振動数 ω の関数である。

以下、上記電磁場を右円筒くさび状領域の量子場 R に置き換え、かつ上記光子をウンルー粒子に置き換えても¹、プランクの放射式が導出されることを示す。そのために、まず、第C.1節で、熱状態(4.4.4)を用いて、[1つのエネルギー固有状態を占める平均粒子数]を求める。次に、第C.2節で、[角振動数 ω のエネルギー固有状態の数密度]を求める。次に、第C.3節で、第C.1節及び第C.2節の結果を用いて、プランクの放射式を得る。

C.1 ボース・アインシュタイン分布関数の導出

黒体から放射される電磁波のエネルギー分布は、その黒体の温度 T に依存する。一方、第4章で示した熱状態(4.4.4)には、温度の情報が含まれていない。そこで、熱状態(4.4.4)をプランクの放射式と関係付けるために、次式によって温度 T を仮定する：

$$e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} := \tanh^2 \theta \quad (\text{C.1.1})$$

但し、 k_B はボルツマン定数である。

なお、上式(C.1.1)と、第4章の式(4.2.5)とによれば、温度 T は、具体的には、

$$T = \frac{a\hbar}{2\pi k_B} \quad (\text{C.1.2})$$

と表される。ここで a は、ロブの固有加速度である。

¹ なお、光子もウンルー粒子も共にボース粒子である。

まず、上式 (C.1.1) と、 $1/\cosh^2 \theta = 1 - \tanh^2 \theta$ なる関係式とを用いて、第 4 章で示した熱状態 (4.4.4) を次のように書き改める：

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\text{thermal } R} &= \frac{1}{\cosh^2 \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^{2n} \theta |n\rangle_R \langle n| \\ &= (1 - \tanh^2 \theta) \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^{2n} \theta |n\rangle_R \langle n| \\ &= \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n \frac{\hbar\omega}{k_B T}} |n\rangle_R \langle n| \end{aligned} \quad (\text{C.1.3})$$

そして、上式 (C.1.3) で表される熱状態の量子場 R に対し、ウンルー粒子の粒子数を観測する粒子数測定を行った場合、測定結果が m 個である確率 p_m は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} p_m &= \text{Tr} \left[|m\rangle_R \langle m| \cdot \hat{\rho}_{\text{thermal } R} \right] \\ &= \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right) e^{-m \frac{\hbar\omega}{k_B T}} \end{aligned} \quad (\text{C.1.4})$$

従って、式 (C.1.3) で表される熱状態における平均粒子数 $\langle n \rangle$ は、

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot p_m \\ &= \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right) \sum_{m=0}^{\infty} m e^{-m \frac{\hbar\omega}{k_B T}} \\ &= \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right) \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}{\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right)^2} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \end{aligned} \quad (\text{C.1.5})$$

である²。なお、式 (C.1.1) を用いると、平均粒子数 $\langle n \rangle$ は、 $\langle n \rangle = \sinh^2 \theta$ とも書ける。

以下、上式 (C.1.5) が表す平均粒子数 $\langle n \rangle$ の物理的意味について考察する。一般に、粒子のエネルギー固有状態は、その粒子の波動的側面を表す波動³の属性毎に存在する。属性は、波動の伝播方向、角振動数 ω 、及び偏波方向の組み合わせで指定される。

このことを踏まえたうえで、式 (C.1.5) の根拠とした、第 4 章の式 (4.4.4) に示す熱状態の導出過程を再確認する。第 4 章の第 4.4 節の冒頭では、特定の波数 k に着目し、波数 k の表記を止めると述べた。このことは、ウンルー粒子の波動的側面の属性のうち、伝播方向及び角振動数 ω について、それぞれ或る特定のものに着目したことを意味する。角振動数 ω の値は、分散関係 $\omega = ck$ により波数 k の値と 1 対 1 に対応し、かつ 1 次元空間では、波数 k の符号が伝播方向を表すからである。

² 無限級数の公式、 $\sum_{m=0}^{\infty} m r^m = r/(1-r)^2$ を使った。

³ ここでいう波動とは、粒子が光子である場合は、電磁波そのものを指し、粒子がウンルー粒子である場合には、第 3 章の式 (3.5.5) で定義したリンドラーモード関数を指す。

また、第 3 章の式 (3.5.5) に示すリンドラーモード関数の定義においては、偏波の自由度が捨象されている。このことは、ウンルー粒子の波動的側面の属性のうち、偏波方向についても或る特定のものに着目したことを意味する。

従って、熱状態 (C.1.3) は、右リンドラーくさび状領域の場に存在する様々なウンルー粒子の集まりのうち、或る特定の 1 のエネルギー固有状態に属するウンルー粒子群が織り成す量子状態を表したものである。それゆえ、式 (C.1.5) に示す平均粒子数 $\langle n \rangle$ は、或る特定の 1 つのエネルギー固有状態を占める平均粒子数を表す。

実際、上式 (C.1.5) は、化学ポテンシャルがゼロ⁴ のボース粒子に対するボース・アインシュタイン分布関数 (Bose-Einstein distribution function) と同じ形をしている。ボース・アインシュタイン分布関数とは、相互作用のないボース粒子群よりなる系において、或る特定の 1 つのエネルギー固有状態を占める平均粒子数を与える理論式である [36]。

C.2 エネルギー固有状態の数密度の導出

以上説明したように、第 4 章では、ウンルー粒子の、特定の 1 つのエネルギー固有状態だけに着目した。次に、ウンルー粒子がとり得るエネルギー固有状態の数を調べるために、熱状態の量子場 R が 3 次元に広がっている状況を考察する。その場合、ウンルー粒子を表す波動は 3 次元的にあらゆる方向に伝播しうる。以下、その場合における、角振動数が ω から $\omega + d\omega$ までの区間に存在するエネルギー固有状態の数を求める。

まず、3次元の k 空間に視点を移し、1つのエネルギー固有状態が k 空間で占める体積を求める。熱状態の量子場 R が、一辺の長さ L の立方体状の空洞に画定されているとする。その空洞の x 方向に波動の定在波が立つために、 k 空間は、波数の x 方向成分を表す k_x 軸方向に間隔 π/L で量子化される。同様に、 k 空間は、 k_y 軸方向及び k_z 軸方向にも間隔 π/L で量子化される。従って、1つのエネルギー固有状態が k 空間で占める体積は π^3/L^3 である。これより、波数 $k = |\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ が、 k から $k + dk$ までの区間に存在するエネルギー固有状態の数 $g(k)dk$ が次のように計算される：

$$g(k)dk = 2 \cdot \frac{k \text{ 空間における内径 } k \text{ 厚さ } dk \text{ の球殻の体積の } 1/8}{1 \text{ つのエネルギー固有状態が } k \text{ 空間において占める体積}} \quad (\text{C.2.1})$$

$$= 2 \cdot \frac{(1/8) \cdot 4\pi k^2 dk}{\pi^3/L^3} = \frac{L^3 k^2}{\pi^2} dk \quad (\text{C.2.2})$$

上式 (C.2.1) で分子の体積を 1/8 倍した理由は、 $k_x \geq 0$, $k_y \geq 0$, かつ $k_z \geq 0$ であるため、3次元の k 空間の第 1 象限のみに着目したためである。また、式 (C.2.1) で全体を 2 倍した理由は、偏波方向の自由度 2 を加味したことによる。

⁴ 力学では、ポテンシャルの勾配が力を表す。このこととのアナロジーで言えば、熱力学では、自由エネルギーがポテンシャルに相当する役割を果たし、化学ポテンシャルが自由エネルギーの勾配 (物質に関する偏微分) に相当する役割を果たす。熱力学第 2 法則より、自由エネルギーが減少する方向の“力”が系に作用すると解すれば、化学ポテンシャルがゼロであるということは、系 (量子場 R ; 電磁場) の物質 (ウンルー粒子数; 光子数) に制限がないため、そのような“力”がゼロである、ということの意味する。なお、ウンルー粒子の粒子数に制限がないことは、ロブにとってのフォック空間が無限次元であることと対応する。

次に、式 (C.2.2) に示す $g(k)dk$ の k を、分散関係 $\omega = ck$ を用いて角振動数 ω に換算すると、次式を得る：

$$g(\omega)d\omega = \frac{L^3\omega^2}{\pi^2c^3}d\omega \quad (\text{C.2.3})$$

この $g(\omega)d\omega$ は、角振動数が ω から $\omega + d\omega$ までの区間に存在するエネルギー固有状態の数を表す。

C.3 プランクの放射式の導出

熱状態の量子場 R においては、角振動数が ω から $\omega + d\omega$ の区間に上式 (C.2.3) で示す数のエネルギー固有状態が存在しており、それらエネルギー固有状態の各々を、平均で式 (C.1.5) に示す個数のウンルー粒子が占めており、かつ個々のウンルー粒子のエネルギーが $\hbar\omega$ という訳である。従って、角振動数が ω から $\omega + d\omega$ までの区間における、単位体積あたりのエネルギー $E(\omega)d\omega$ は、次式で与えられる：

$$\begin{aligned} E(\omega)d\omega &= \frac{g(\omega)d\omega \cdot \langle n \rangle \cdot \hbar\omega}{L^3} \\ &= \frac{\hbar\omega^3d\omega}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \end{aligned} \quad (\text{C.3.1})$$

この式 (C.3.1) は、まさにプランクの放射式 (Planck's formula of radiation) [36] と同じ形をしている。即ち、式 (4.4.4) に示した熱状態からプランクの放射式が導出された。

C.4 まとめ

以上説明したように、式 (C.1.2) によって量子場 R の温度 T を仮定すると、第 4 章で示した熱状態 (4.4.4) から、温度 T の黒体放射を表すプランクの放射式と同じ式が得られる。

このため、第 4 章で示した熱状態 (4.4.4) は、式 (C.1.2) で定義される温度 T をもつ黒体放射の状態と等価であると言える。ロブは、一様加速運動をしつつ、そのような温度 T の黒体放射をみる。ロブが感知する温度 T は、式 (C.1.2) より、ロブの固有加速度 a に比例する。

C.5 付言：ロブの固有加速度 a の具体値の見積もり

式 (C.1.2) で光速 c を明示すると、ウンルー放射の温度 T は、 $T = (a\hbar)/(2\pi ck_B)$ と書ける。これに、プランク定数 $\hbar \doteq 1.054571 \times 10^{-34}$ [J·s]、ボルツマン定数 $k_B = 1.380649 \times 10^{-23}$ [J/K]、光速 $c = 299792458$ [m/s] を代入する。すると、 $T = 100[^\circ\text{C}] (= 373.15[\text{K}])$ であるためには、ロブの固有加速度 a は、約 $9.2 \times 10^{22}[\text{m/s}^2]$ であることが必要であると見積もられる。また、 $T = 50[^\circ\text{C}] (= 323.15[\text{K}])$ であるためには、ロブの固有加速度 a は、約 $7.9 \times 10^{22}[\text{m/s}^2]$ であることが必要であると見積もられる。

付録D フォック空間 \mathcal{F}_I と \mathcal{F}_{II} とのユニタリー非同値性について

第4章で述べたように、本研究では、場における特定の波数 k の成分だけに着目できるというシングルモード近似を採用する。本論文の第5章以降では、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I とリンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} とがユニタリー演算子 \hat{G} でつながれていることを前提として議論を展開しており、この前提は、シングルモード近似が根拠となっている。

本付録Dでは、本研究におけるシングルモード近似の重要性を示すために、シングルモード近似を採用しない場合はどうなるのかを論ずる。結論から言うと、シングルモード近似を採用しない場合には、場の自由度が無限大であることに起因して、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I とリンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} とがユニタリー同値でなくなる。本付録Dでは、文献[37]の教示に沿って、このことを述べる。

なお、第4章の第4.4節の冒頭では、添え字 k の表記を止めると述べたが、以下、本付録Dでは、議論を明確化するために添え字 k を明示することとする。

D.1 ミンコフスキー真空の展開

まず、自由度とは何かを確認しておく。物理系の自由度とは、その物理系の状態を指定するのに必要な基本変数の組の数をいう。具体的には、ハミルトン形式で物理系を記述する場合は、正準交換関係を満たす一般化座標演算子 \hat{q}_k と一般化運動量演算子 \hat{p}_k との組 $\{\hat{q}_k, \hat{p}_k\}$ の数をいう。例えば、 $k = 1, 2, \dots, N$ であれば、自由度は N である。

物理系が場である場合には、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I 上で正準変数の組 $\{\hat{q}_{k,M}, \hat{p}_{k,M}\}$ はラダー演算子の組 $\{\hat{a}_{k,M}, \hat{a}_{k,M}^\dagger\}$ と1対1に対応する。従って、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I が表す場の自由度とは、ラダー演算子の組 $\{\hat{a}_{k,M}, \hat{a}_{k,M}^\dagger\}$ の数である。シングルモード近似を採用する場合は、特定の k だけに着目するので、自由度は1とみなされる。

一方、本来は、ラダー演算子の組 $\{\hat{a}_{k,M}, \hat{a}_{k,M}^\dagger\}$ の数、即ち波数 k の数は無限大である。具体的には、第2章の式(2.2.1)に示す、 k に関する積分の範囲には制限がない。このため、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I が表す場の自由度は、本来、無限大である。当然ではあるが、リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} が表す場の自由度も無限大である。

以上のように、場の自由度は無限大である。但し、場の量子化の過程で定在波が立つ条件を課すので、波数 k の集合は、無限集合ではあるが可付番集合である。そこで、以下、波数 k の全体に順番をつけ、波数 k の集合を $\{k1, k2, k3, \dots, kN\}$ と表記する。このように、場の自由度を N とおいて、最後に $N \rightarrow \infty$ とした場合の問題点を調べる。

ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I において、真空は波数 kj 毎に $|0_{kj}\rangle_M$ として定義される。従って、ミンコフスキー真空は、本来、それらの直積として定義される：

$$|\mathbf{0}\rangle_M := |0_{k1}\rangle_M |0_{k2}\rangle_M |0_{k3}\rangle_M \cdots |0_{kN}\rangle_M \quad (\text{D.1.1})$$

リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} においても同様に、真空は波数 kj 毎に $|0_{kj}\rangle_{\mathbf{R}} := |0_{kj}, 0_{kj}\rangle_{R,L}$ として定義される。従って、リンドラー真空は、本来、それらの直積として定義される：

$$|\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{R}} := |0_{k1}\rangle_{\mathbf{R}} |0_{k2}\rangle_{\mathbf{R}} |0_{k3}\rangle_{\mathbf{R}} \cdots |0_{kN}\rangle_{\mathbf{R}} \quad (\text{D.1.2})$$

次に、第 4 章の式 (4.2.10) に示すハイゼンベルグ表示を、シングルモード近似を用いることなしに、リンドラー真空 $|\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{R}}$ を時間発展させるものとしてシュレーディンガー表示する。その結果は次のとおりである：

$$|\mathbf{0}\rangle_M = \hat{V}|\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{R}} \quad (\text{D.1.3})$$

$$\begin{aligned} &= \prod_{j=1}^N \hat{G}_{kj} |\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{R}} \\ &= \hat{G}_{k1} |0_{k1}\rangle_{\mathbf{R}} \hat{G}_{k2} |0_{k2}\rangle_{\mathbf{R}} \hat{G}_{k3} |0_{k3}\rangle_{\mathbf{R}} \cdots \hat{G}_{kN} |0_{kN}\rangle_{\mathbf{R}} \\ &= \prod_{j=1}^N \left[\frac{1}{\cosh \theta_{kj}} \sum_{n=0}^{\infty} (-\tanh \theta_{kj})^n |n_{kj}\rangle_{\mathbf{R}} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.1.4})$$

但し、上式 (D.1.4) において、 $|n_{kj}\rangle_{\mathbf{R}}$ は、 $|n_{kj}\rangle_{\mathbf{R}} := |n_{kj}, n_{kj}\rangle_{R,L}$ で定義される。

一方、リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} においては、リンドラー真空 $|\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{R}}$ に対して生成演算子 $\hat{a}_{kj,R}^\dagger, \hat{a}_{kj,L}^\dagger$ を任意回作用させたものの 1 次結合の集合によって完全系が構成される。そこで、その完全系によって、ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I の状態ベクトル、例えば、ミンコフスキー真空 $|\mathbf{0}\rangle_M$ を展開できる：

$$|\mathbf{0}\rangle_M = C|\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{R}} + \sum_{j=1}^N D_j \cdot \hat{a}_{kj,R}^\dagger |\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{R}} + \sum_{j=1}^N E_j \cdot \hat{a}_{kj,L}^\dagger |\mathbf{0}\rangle_{\mathbf{R}} + \cdots \quad (\text{D.1.5})$$

ここで、 C, D_j, E_j, \cdots は、展開係数である。例えば、 C の値は、上式 (D.1.4) 及び (D.1.5) を用いて、次のように計算される：

$$\begin{aligned} C &= {}_{\mathbf{R}}\langle \mathbf{0} | \cdot | \mathbf{0} \rangle_M \\ &= {}_{\mathbf{R}}\langle \mathbf{0} | \hat{V} | \mathbf{0} \rangle_{\mathbf{R}} \\ &= \prod_{j=1}^N \frac{1}{\cosh \theta_{kj}} \\ &= \exp \left[- \sum_{j=1}^N \log \cosh \theta_{kj} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.1.6})$$

D.2 演算子 \hat{V} の性質

上式 (D.1.6) に示す C の値を評価する. 第 4 章の式 (4.2.5) より, $\tanh \theta_{kj} > 0$ であり, 従って $\theta_{kj} > 0$ である. このため, $\cosh \theta_{kj} > 0$ であるから, 上式 (D.1.6) に示す C は, $N \rightarrow \infty$ で $C \rightarrow 0$ となってしまう. 他の展開係数 D_j , E_j 等についても全く同様のことが成り立ち, 式 (D.1.5) のすべての展開係数は, $N = \infty$ で消えてしまう.

つまり, 自由度 N が無限大のとき, ミンコフスキー真空 $|0\rangle_{\text{M}}$ は, リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} の基底では展開が不可能である. 言い換えれば, 自由度 N が無限大のとき, ミンコフスキー真空 $|0\rangle_{\text{M}}$ は, リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} に属さない.

このことは, 第 4 章の式 (4.2.8) 及び上式 (D.1.3) に示す演算子 \hat{V} は形式的にはユニタリーであっても, 実はそうではないことを意味する. 具体的には, ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I の基底と, リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} の基底とをつなぐべき演算子 \hat{V} は, $N = \infty$ では, ユニタリーどころか, その行列要素がすべてゼロになる.

以上のような, $N = \infty$ におけるミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I とリンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} との関係をユニタリー非同値 (unitarily inequivalent) という [37][38].

D.3 まとめ

以上説明したように, 場の自由度 N は無限大であるため, 本来, ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I とリンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} とはユニタリー非同値である.

これに対し, 本研究では, 特定の波数 k の成分だけに着目するシングルモード近似を採用することにより, 自由度 N を 1 とみなしている. あるいは, 必ずしもシングルモード近似を採用しなくとも, ウンルー効果としての熱放射を記述できる範囲で波数 k に適当な端点を設定することにより, 自由度 N を有限に抑え込む近似が可能であろう.

いずれにしても, 自由度 N が有限の場合には, 式 (D.1.6) に示す C はゼロにはならない. 他の展開係数 D_j , E_j 等についても同様である. 従って, ミンコフスキー真空 $|0\rangle_{\text{M}}$ の, リンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} の基底での展開が可能となる.

つまり, 自由度 N が有限の場合には, ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I とリンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} は, 互いに基底の取り方が異なるだけの関係となる. 言い換えれば, 自由度 N が有限の場合には, 2つのフォック空間 \mathcal{F}_I と \mathcal{F}_{II} は, 基底の変換を行う演算子 \hat{V} でつなぐられ, かつ演算子 \hat{V} は, ユニタリー演算子となる. このような, 自由度 N が有限の場合におけるフォック空間 \mathcal{F}_I と \mathcal{F}_{II} の関係をユニタリー同値 (unitarily equivalent) という [37][38].

なお, 自由度 N が有限の場合に, ミンコフスキーフォック空間 \mathcal{F}_I とリンドラーフォック空間 \mathcal{F}_{II} とがユニタリー同値となり, 互いにユニタリー演算子で結ばれることは, フォン・ノイマン (von Neumann) の一意性定理によって保証される [39].

付録E 電磁場の量子化

第5章では、アリス及びロブにとっての場のアナロジーとして、光の場について言及した。本付録Eでは、この光の場が、アリス及びロブにとっての場と同様に、フォック状態 $|n\rangle$ とラダー演算子 \hat{a} 、 \hat{a}^\dagger とで表されることを確認する。

E.1 一般化座標・一般化運動量演算子を用いた光の表現

光は、電場と磁場とから成る。電場の、特定の偏光かつ特定の波数の成分¹ $\mathbf{E}(r, t)$ の大きさは、次のように三角関数によって実フーリエ級数展開できる：

$$|\mathbf{E}(r, t)| = E(r, t) = x \cdot f_1 \cos(kr - \omega t) + p \cdot f_2 \sin(kr - \omega t) \quad (\text{E.1.1})$$

ここで、 f_1 と f_2 は、時間及び空間に依存しない実数係数である。また、電場 $E(r, t)$ の \cos 成分の大きさを表す物理量 x は、一般化座標に相当する。電場 $E(r, t)$ の \sin 成分の大きさを表す物理量 p は、一般化運動量に相当する。

電場の量子化は、式 (E.1.1) 中の一般化座標 x と一般化運動量 p とを、

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \quad (\text{E.1.2})$$

なる正準交換関係を満たすエルミート演算子に置き換えることで達成される：

$$\hat{E}(r, t) = \hat{x} \cdot f_1 \cos(kr - \omega t) + \hat{p} \cdot f_2 \sin(kr - \omega t) \quad (\text{E.1.3})$$

次に、磁束密度の大きさを表す演算子 $\hat{B}(r, t)$ を求める。磁束密度の、特定の偏光かつ特定の波数の成分 $\mathbf{B}(r, t)$ は、ファラデーの法則 $\text{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ を用いて、 $\mathbf{E}(r, t)$ から求まる： $\mathbf{B}(r, t) = -\int \text{rot}\mathbf{E}(r, t) dt$ 。これより、 $\mathbf{B}(r, t)$ の大きさに対応するエルミート演算子 $\hat{B}(r, t)$ が次のように求まる：

$$\begin{aligned} \hat{B}(r, t) &= -\int |\text{rot}\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)| dt \\ &= -\int \frac{d}{dr} \hat{E}(r, t) dt \\ &= \frac{1}{c} \hat{E}(r, t) \end{aligned} \quad (\text{E.1.4})$$

¹ 簡単のため、ここでは、理想的なレーザ光、即ちシングルモードの光を考察の対象とする。

次に、電磁場のエネルギーを表すハミルトニアンを求める。まず、上式 (E.1.4) を用いて、電磁場の、特定の偏光かつ特定の波数の成分のエネルギー密度を表す演算子 $\hat{\mathcal{H}}(r, t)$ を求める。電磁気学によれば、 $\hat{\mathcal{H}}(r, t)$ が次のように求まる：

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}(r, t) &= \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 \hat{E}^2(r, t) + \frac{1}{\mu_0} \hat{B}^2(r, t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 + \frac{1}{\mu_0 c^2} \right) \hat{E}^2(r, t) \\ &= \epsilon_0 \hat{E}^2(r, t)\end{aligned}\tag{E.1.5}$$

ここで、 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ の関係を用いた。

電磁場のハミルトニアンを表す演算子は、上式 (E.1.5) のように表されるエネルギー密度演算子 $\hat{\mathcal{H}}(r, t)$ を体積 V の空間にわたって積分することにより求まる。但し、その体積 $V = L^3$ は、1 辺の長さ L が $E(r, t)$ の波長の整数倍の立方体によって画定されるものとする。演算子化されたハミルトニアンは、次のように書ける：

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \int_V \hat{\mathcal{H}}(r, t) dV = \int_V \epsilon_0 \hat{E}^2(r, t) dV \\ &= \epsilon_0 L^2 \int_0^L \left[\hat{x} \cdot f_1 \sin(kr - \omega t) + \hat{p} \cdot f_2 \cos(kr - \omega t) \right]^2 dr\end{aligned}\tag{E.1.6}$$

$$= \epsilon_0 \left[\hat{x}^2 \cdot (f_1)^2 \frac{V}{2} + \hat{p}^2 \cdot (f_2)^2 \frac{V}{2} \right]\tag{E.1.7}$$

ここで、式 (E.1.6) から式 (E.1.7) への移行には、 \sin 関数と \cos 関数との正規性及び直交性を用いた。

これまで、式 (E.1.1) で導入した f_1 と f_2 の具体的な表式を示さなかった。実は、 f_1 と f_2 は、式 (E.1.7) に示すハミルトニアン \hat{H} が、下記のように単位質量の調和振動子のハミルトニアンと一致するように定められたものである。

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\omega^2 \hat{x}^2 + \hat{p}^2)\tag{E.1.8}$$

具体的には、 f_1 と f_2 の定義は、次のとおりである。

$$f_1 = \frac{\omega}{\sqrt{\epsilon_0 V}}\tag{E.1.9}$$

$$f_2 = \frac{-1}{\sqrt{\epsilon_0 V}}\tag{E.1.10}$$

つまり、式 (E.1.8) に示すハミルトニアン \hat{H} の形より、光の一般化座標演算子 \hat{x} と一般化運動量演算子 \hat{p} は、調和振動子におけるおもりの位置と運動量の関係を満たすように振る舞う。従って、光の特定の偏光かつ特定の波数の成分は、1 つの調和振動子と数学的に等価である。

以上、一般化座標演算子 \hat{x} と一般化運動量演算子 \hat{p} とを基本変数に選んだハミルトン形式で、電場演算子 $\hat{E}(r, t)$ 、磁束密度演算子 $\hat{B}(r, t)$ 、及びハミルトニアン \hat{H} を記述した。

E.2 生成・消滅演算子を用いた光の表現

次に、上述した調和振動子におけるエネルギー準位の増減を記述できるようにするために、基本変数を選び直して、電磁場を記述する。

そのために、式 (E.1.1) に示した電場の大きさ $E(r, t)$ を、今度は、指数関数で複素フーリエ級数展開する：

$$\hat{E}(r, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} (\hat{a} \cdot e^{i(kr-\omega t)} + \hat{a}^\dagger \cdot e^{-i(kr-\omega t)}) \quad (\text{E.2.1})$$

演算子 \hat{a} 及び \hat{a}^\dagger は、上式 (E.2.1) を、式 (E.1.3)、式 (E.1.9)、及び式 (E.1.10) と比較することにより、演算子 \hat{x}, \hat{p} を用いて次のように表される：

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}} (\omega\hat{x} + i\hat{p}) \quad (\text{E.2.2})$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}} (\omega\hat{x} - i\hat{p}) \quad (\text{E.2.3})$$

なお、式 (E.2.1) において、演算子 \hat{a} は、 $E(r, t)$ の $e^{i(kr-\omega t)}$ 成分の大きさを表すように見え、演算子 \hat{a}^\dagger は、 $e^{-i(kr-\omega t)}$ 成分の大きさを表すようにみえる。しかし、式 (E.2.2) 及び (E.2.3) から分かるように、 \hat{a}_k 及び \hat{a}^\dagger はエルミート演算子ではないことに注意を要する。 \hat{a} 及び \hat{a}^\dagger は、直接的な実測にかからない複素振幅を表す。

また、式 (E.2.2) 及び (E.2.3) の定義を一般化座標演算子 \hat{x} 及び一般化運動量演算子 \hat{p} について解き直すことにより、次の関係を得る：

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (\text{E.2.4})$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (\text{E.2.5})$$

また、式 (E.2.2) 及び (E.2.3) の定義と、正準交換関係 (E.1.2) とを用いることにより、演算子 \hat{a} と \hat{a}^\dagger の交換関係が次のように求まる：

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} \\ &= \frac{1}{2\hbar\omega} \left(-i\omega[\hat{x}, \hat{p}] - i\omega[\hat{x}, \hat{p}] \right) \\ &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{x}, \hat{p}] \\ &= 1\hat{I} \end{aligned} \quad (\text{E.2.6})$$

また、式 (E.2.4) 及び式 (E.2.5) を用いることにより、式 (E.1.8) に示したハミルトニアン \hat{H} を、 \hat{a} と \hat{a}^\dagger を用いて表すことができる：

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{1}{2}(\omega^2 \hat{x}^2 + \hat{p}^2) \\ &= \frac{1}{2}\left[\omega^2 \frac{\hbar}{2\omega}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 + \left(-\frac{\hbar\omega}{2}\right)(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2\right] \\ &= \frac{\hbar\omega}{4}\left[(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 - (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2\right] \\ &= \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a})\end{aligned}\tag{E.2.7}$$

$$= \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)\tag{E.2.8}$$

ここで、式 (E.2.7) から式 (E.2.8) への移行において、交換関係 (E.2.6) より、 $\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1$ と書けることを利用した。

E.3 演算子 $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ の物理的意味

上式 (E.2.8) 中の $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ の物理的意味を解釈するために $\hat{n} := \hat{a}^\dagger\hat{a}$ とおくと、演算子 \hat{n} は明らかにエルミートな可観測量を表す。そこで、演算子 \hat{n} の固有状態を $|n\rangle$ 、固有値を n とおく。

まず、固有方程式 $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$ の左側から $\langle n|$ を掛けることにより、 $n = \|\hat{a}|n\rangle\|^2$ という関係式が得られ、これより固有値 n が非負であることが分かる。

次に、交換関係 (E.2.6) を用いると、次の関係式が得られる：

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle\tag{E.3.1}$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle\tag{E.3.2}$$

そして、上式 (E.3.1) 及び (E.3.2) における演算子 \hat{a} 及び \hat{a}^\dagger の作用と、固有値 n が非負である条件とを考慮すると、 n は整数であることが結論付けられる。そうすると、ハミルトニアン \hat{H} がエネルギーを表すことと、アインシュタインの光量子仮説とにより、式 (E.2.8) 中の演算子 $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ は、エネルギー量子としての光子の個数を表すと解される。

E.4 まとめ

つまり、 $|n\rangle$ は光子が n 個存在する状態を表すと解釈され、これをフォック状態という。また、演算子 \hat{a} は、光子を 1 つ消滅させる消滅演算子であり、演算子 \hat{a}^\dagger は、光子を 1 つ生成する生成演算子である。演算子 \hat{a} と \hat{a}^\dagger をラダー演算子と総称する。

なお、フォック状態はエルミート演算子 $\hat{n} := \hat{a}^\dagger\hat{a}$ の固有状態であるため正規直交基底をなす。このフォック状態とそれらの線形結合とから成るヒルベルト空間をフォック空間という。

以上のように、光の場が、フォック空間において、フォック状態 $|n\rangle$ とラダー演算子 \hat{a} 、 \hat{a}^\dagger とで表されることが確認された。

付録F 量子力学における時間反転

物理法則を表す方程式が或る変換で形を変えないとき、その物理法則は、その変換の下で対称性をもつという。対称性を要請しつつ理論を定式化することは、物理法則のあるべき姿を探求するうえで重要である。なぜならば、多くの対称性を示す物理法則ほど普遍性が高いと言え、かつそのような普遍性の高い物理法則を見出すことこそが、物理学の使命だからである。アインシュタインが、対称性としての一般相対性原理 (general principle of relativity) — 慣性系と非慣性系とを問わずいかなる座標変換に対しても物理法則は形を変えないという原理 — を要請して相対論の完成に至ったことは有名である。

本付録Fでは、対称性のうち、時間反転に対して方程式が形を変えないという、時間反転対称性 (T-symmetry) について述べる。エントロピー増大則が表す時間の不可逆性は、散逸による2次的効果だと考え、散逸が無い場合の自然法則は、時間反転に対して対象であると考えられる。以下では、エネルギーの散逸が無い状況に着目する。

F.1 古典力学の場合

古典力学では、時間に依存しないポテンシャル $V(x)$ 中におかれた質量 m の質点の、散逸が無い場合の運動を記述するニュートンの運動方程式、

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = - \frac{d}{dx} V(x) \quad (\text{F.1.1})$$

が、時間に関して2階微分を含む。従って、式中の変数 t を $-t$ に置き換えても、 $d^2/d(-t)^2 = d^2/dt^2$ より、運動方程式 (F.1.1) が形を変えない：

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(-t) = - \frac{d}{dx} V(x)$$

つまり、運動方程式 (F.1.1) は、時間反転対称性の要請を満たす。このことは、時間反転した運動 $x(-t)$ も同じ物理法則に従うことを意味する。即ち、質点の散逸のない運動 $x(t)$ を撮影した動画を、コマを逆送りにすることで時間反転した運動 $x(-t)$ を表すものとして再生しても、コマが順送りではないことに原理的に気付けない。

F.2 量子力学の場合

F.2.1 時間反転状態

それでは、量子力学ではどうだろうか。これを調べるために、量子系の波動関数 $\psi(x, t)$ の時間変化を記述するシュレーディンガー方程式に、時間反転対称性を要請してみる。シュレーディンガー方程式が時間反転に対して形を変えないためには、式中の t を $-t$ に置き換えることのみならず、両辺の複素共役をとることも必要である：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x, t) \quad (\text{F.2.1})$$

$$\Downarrow t \rightarrow -t$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial(-t)} \psi(x, -t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x, -t) \quad (\text{F.2.2})$$

$$\Downarrow \psi \rightarrow \psi^*$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(x, -t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi^*(x, -t) \quad (\text{F.2.3})$$

つまり、式 (F.2.1) 中の t を $-t$ に置き換えるだけでは、式 (F.2.2) に示すように、左辺に負号が付くので、式の形が式 (F.2.1) から変わってしまう。これは、ニュートンの運動方程式 (F.1.1) に含まれる時間微分の階数が 2 階であるのに対し、シュレーディンガー方程式に含まれる時間微分の階数が 1 階であることの帰結である。そこで、式 (F.2.2) からさらに両辺の複素共役をとると、式 (F.2.3) に示すように、式 (F.2.1) と同じ形が得られる。

以上のように、シュレーディンガー方程式に対して時間反転不変性を要請した結果、波動関数 $\psi(x, t)$ を時間反転したもののあるべき姿が $\psi^*(x, -t)$ であることが分かった。つまり、量子系の時間反転した状態は $\psi^*(x, -t)$ と表される。

波動関数 $\psi(x, t)$ は、状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ を基底ベクトル $|x\rangle$ で展開したときの展開係数 $\langle x|\psi(t)\rangle$ である。従って、状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ に対して時間反転をもたらす演算子 \hat{T} を定義したとき、演算子 \hat{T} の作用は次のとおりと考えられる。

$$\hat{T}|\psi(t)\rangle = \hat{T} \left[\int \langle x|\psi(t)\rangle |x\rangle dx \right] = \int \langle x|\psi(-t)\rangle^* |x\rangle dx = \int \psi^*(x, -t) |x\rangle dx \quad (\text{F.2.4})$$

このように、演算子 \hat{T} は、状態ベクトルを基底ベクトルで展開したときの展開係数に対して、複素共役をとり、かつ t を $-t$ に置き換える働きをする。また、その展開係数が時間に依存しない場合は、演算子 \hat{T} は、その展開係数を複素共役におきかえる働きのみをする と解される。

なお、 $\psi(x, t)$ から $\psi^*(x, -t)$ への移行において、変数 x は不変のままであるから、演算子 \hat{T} は、基底ベクトル $|x\rangle$ に対しては恒等演算子として作用するものとした。但し、状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ にはグローバル位相 $e^{i\theta}$ が付いてもよいから、演算子 \hat{T} が基底ベクトル $|x\rangle$ を $e^{i\theta}|x\rangle$ に変換することも数学的には許容される。

F.2.2 遷移確率の不変性

次に、演算子 \hat{T} が状態ベクトルの内積をどのように変換するかを調べる。内積として、任意の量子系の始状態 $|i\rangle$ から終状態 $|f\rangle$ への遷移の確率振幅 $\langle f|i\rangle$ を考える。演算子 \hat{T} は、確率振幅 $\langle f|i\rangle$ を次のように変換する：

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}f|\hat{T}i\rangle &= \left[\int (\langle x'|f\rangle)^* \langle x'|dx' \right] \left[\int \langle x|i\rangle^* |x\rangle dx \right] \\ &= \iint \langle x'|f\rangle \langle x'|x\rangle \langle i|x\rangle dx' dx \\ &= \int \langle i|x\rangle \langle x|f\rangle dx \\ &= \langle i|f\rangle \quad (= \langle f|i\rangle^*) \end{aligned} \quad (\text{F.2.5})$$

このように、時間反転の演算子 \hat{T} は、内積をその複素共役に変換する。これは、遷移 $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ が時間反転によって遷移 $|f\rangle \rightarrow |i\rangle$ に置き換えられるため当然である。しかし、時間反転を行った場合でも、観測可能な物理量である遷移確率は不変である：

$$|\langle \hat{T}f|\hat{T}i\rangle|^2 = |\langle f|i\rangle|^2 \quad (\text{F.2.6})$$

従って、遷移の時間反転は観測にかからない。この意味で、観測可能な物理的内容は変わらないままである。なお、式 (F.2.6) は、或る遷移過程の時間を逆向きに進めた過程も、その或る遷移過程と同じ確率で生起することを表している。

F.2.3 複素共役の意義

既述のように、時間反転対称性の要請を満たすためには、時間反転した状態は、その波動関数の複素共役で表すことが必要である。では、この複素共役をとることの物理的意味は何だろうか。これについて検討するために、空間依存を担う関数 $F(x) = \exp[ipx/\hbar]$ と、時間依存を担う関数 $G(t) = \exp[-iEt/\hbar]$ との積に比例する形で表される波動関数 $\psi(x,t) \propto F(x)G(t)$ を考える。この波動関数の時間反転は、次のとおりである：

$$\psi(x,t) \propto F(x)G(t) \quad \mapsto \quad \psi^*(x,-t) \propto F^*(x)G^*(-t) \quad (\text{F.2.7})$$

空間依存を担う関数 $F(x) = \exp[ipx/\hbar]$ に着目すると、この関数 $F(x)$ は時間反転によって、 $F^*(x) = \exp[-ipx/\hbar] = \exp[i(-p)x/\hbar]$ へと変換される。これより、波動関数の複素共役をとることは、粒子の運動量 p の符号を変えるという物理的意味を有する。

このことは、運動の向きを反転させること、つまり、古典力学とのアナロジーで言えば¹、コマを逆送りにすることに対応する。

¹ 量子力学では、粒子の運動量 p が定まっている場合、その粒子の位置 x は不定であるから、コマの逆送りはあくまでもイメージである。

なお、時間依存を担う関数 $G(t) = \exp[-iEt/\hbar]$ に着目すると、この関数 $G(x)$ は時間反転によって、 $G^*(-t) = \exp[iE(-t)/\hbar] = \exp[-iE(t)/\hbar] = G(t)$ のままである。即ち、時間反転によってエネルギー $E(t)$ は変化しない。 $\psi(x, t)$ が粒子の状態であるならば、 $\psi^*(x, -t)$ は、同じエネルギー $E(t)$ で時間を遡る反粒子の状態を表す。

F.2.4 量子テレポーテーションの転送状態 $|\psi\rangle$ の時間反転

最後に、第 6 章の第 6.2.1 節で述べた量子テレポーテーションで転送する状態 $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ の時間反転について述べる。

本付録 F の第 F.2.1 節で述べたように、状態ベクトルを基底ベクトルで展開したときの展開係数 a, b が時間に依存しない場合は、演算子 \hat{T} は、その展開係数を複素共役におきかえる働きのみをすると解される。従って、量子テレポーテーションで転送する状態 $|\psi\rangle$ を時間反転した状態は、

$$\hat{T}|\psi\rangle = \hat{T}(a|0\rangle + b|1\rangle) = a^*|0\rangle + b^*|1\rangle := |\psi^*\rangle \quad (\text{F.2.8})$$

となる。

そして、第 6 章の第 6.2.1 節で述べたように、量子テレポーテーションのスキームを示す図 6.1 において、量子ビット Y によって担持された状態は $|\psi^*\rangle_Y$ であると同定される。

つまり、量子ビット Y のふるまいは、時間反転の結果を表す。それゆえ、同図 6.1 において、状態 $|\psi^*\rangle_Y$ の量子ビット Y が時刻 t_0 から時刻 t_2 まで移動することは、状態 $|\psi\rangle_Y$ の量子ビット Y が時刻 t_2 から時刻 t_0 まで時をさかのぼることと等価である、という解釈が可能となる。

謝辞

指導教員の広島大学大学院先進理工系科学研究科 畠中 憲之 教授には，本論文の主査として，様々なご指導，ご助言を頂きました。厚く感謝申し上げます。また，長年にわたってお付き合い下さり，折に触れて励まして下さり，しかも，論文に関するご指導のみならず，取りまとめから提出に至るまで，様々なお気遣いを頂きました。改めて心より御礼申し上げます。

また，副指導教員を引き受けて下さいました，広島大学大学院先進理工系科学研究科 石坂 智 教授，稲垣 知宏 教授，及び荻田 典男 教授には，お忙しい中，論文の内容について議論させて頂くとともに，論文における不明確な点のご指摘，ご助言等を頂きました。ここに心より御礼申し上げます。

また，本論文の提出にあたり，事務的な面で多大なご支援を頂きました，広島大学総合科学系支援室の渡利 友亮 様をはじめとする，全ての方々に深く感謝申し上げます。

参考文献

- [1] Rolf Landauer, “*The physical nature of information*”, Phys. Lett. A **217**, 188-193 (1996).
- [2] W. G. Unruh, “*Notes on black-hole evaporation*”, Phys. Rev. D. **14**, 870 (1976) .
- [3] P. M. Alsing and G. J. Milburn, “*Teleportation with a Uniformly Accelerated Partner*”, Phys. Rev. Lett. **91**, 180404 (2003).
- [4] I. Fuentes-Schuller and R. B. Mann, “*Alice Falls into a Black Hole: Entanglement in Noninertial Frames*”, Phys. Rev. Lett. **95**, 120404 (2005).
- [5] Mi-Ra Hwang, DaeKil Park, and Eylee Jung, “*Tripartite entanglement in a noninertial frame*”, Phys. Rev. A **83**, 012111 (2011).
- [6] D. Ahn and M. S. Kim, “*Hawking-Unruh effect and the entanglement of two-mode squeezed states in Riemannian space-time*”, Physics Letters A 366 202-205 (2007).
- [7] D. Ahn, “*Unruh effect as a noisy quantum channel*”, Phys. Rev. A **98**, 022308 (2018).
- [8] P. D. Nation, J. R. Johansson, M. P. Blencowe, and Franco Nori, “*Colloquim: Stimulating uncertainty: Amplifying the quantum vacuum with superconducting circuits*”, Rev. Mod. Phys., Vol. 84, No.1 January - March (2012).
- [9] 添田 喬, 得丸 英勝, 中溝 高好, 岩井 善太, “*振動工学の基礎*”, 日新出版株式会社 (1992).
- [10] 戸田 盛和, “*振動論*”, 株式会社培風館 (1968).
- [11] A. Yariv and P. Yeh, “*原書 6 版 ヤリーヴ - イェー 光エレクトロニクス*”, 多田 邦雄 及び 神谷 武志 監訳, 丸善出版株式会社 (2014).
- [12] 服部 利明, “*非線形光学入門*”, 株式会社裳華房 (2009).
- [13] 石坂 智, 小川 朋宏 ら, “*量子情報科学入門*”, 共立出版株式会社 (2012). ; M. Hayashi, S. Ishizaka *et al.*, “*Intoroduction to Quantum Information Science*”, Springer (2015).
- [14] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crepeau, Richard Jozsa, Asher Peres, and William K. Wootters, “*Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*”, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993) .
- [15] S. J. van Enk, “*Discrete formulation of teleportation of continuous variables*”, Phys. Rev. A. **60**, 5095 (1999) .
- [16] Satoshi Iso, Rumi Tatsukawa, Kazushige Ueda, and Kazuhiro Yamamoto, “*Entanglement-induced quantum radiation*”, Phys. Rev. D **96**, 045001 (2017).

- [17] S. W. Hawking, “*Particle Creation by Black Holes*”, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [18] 磯 暁, “*KEK 物理学シリーズ第 4 巻 現代物理学の基礎としての場の量子論*”, 共立出版株式会社 (2015).
- [19] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, “*Quantum fields in curved space*”, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS (1982).
- [20] V. F. Mukhanov and S. Winitzki, “*Introduction to Quantum Effects in Gravity*”, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS (2007).
- [21] 坂本 眞人, “量子力学選書 場の量子論 —不変性と自由場を中心にして—”, 株式会社裳華房 (2014).
- [22] 川村 嘉春, “量子力学選書 相対論的量子力学”, 株式会社裳華房 (2012).
- [23] 日置 善郎, “量の量子論 —摂動計算の基礎— (改訂版)”, 株式会社吉岡書店 (2007).
- [24] 佐藤 勝彦, “相対性理論 岩波基礎物理シリーズ 9”, 株式会社岩波書店 (1996).
- [25] 内山 龍雄, “相対性理論 物理テキストシリーズ 8”, 株式会社岩波書店 (1977).
- [26] 戸田 盛和, “物理学 30 講シリーズ 7 相対性理論 30 講”, 株式会社朝倉書店 (1997).
- [27] S. M. Carroll, “*Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*”, Addison-Wesley (2004).
- [28] B. Brout, S. Massar, R. Parentani, and P. Spindel, “*A primer for black hole quantum physics*”, Phys. Rept. **260**, (1995) 329-454.
- [29] P. M. Alsing and I. Fuentes, “*Observer dependent entanglement*”, arXiv: quant-ph/1210.2223v1 (2012).
- [30] A. Iorio, G. Lambiase, and G. Vitiello, “*Entangled quantum fields near the event horizon and entropy*”, Annals of Physics **309** 151-165 (2004).
- [31] 中原 幹夫, “量子物理学のための線形代数 ベクトルから量子情報へ”, 株式会社培風館 (2016).
- [32] D.F.Walls and Gerard J.Milburn, “*Quantum Optics*”, 2nd Edition, Springer (2010).
- [33] M. J. Collett, “*Exact density-matrix calculations for simple open systems*”, Phys. Rev. A **38**, 2233 (1988).
- [34] D. R. Truax, “*Baker-Campbell-Hausdorff relations and unitarity of $SU(2)$ and $SU(1,1)$ squeeze operators*”, Phys. Rev. D **31**, 1988 (1985).
- [35] 高柳 匡, “ホログラフィー原理と量子エンタングルメント”, 株式会社サイエンス社 (2014).
- [36] 久保 亮五, “統計力学”, 共立出版株式会社 (1952).
- [37] 高橋 康, “物性研究社のための 場の量子論 I”, 株式会社培風館 (1974).
- [38] 大貫 義郎, “岩波講座 現代の物理学 第 5 巻 場の量子論”, 株式会社岩波書店 (1994).

- [39] ボゴリューボフ 他, 江沢 洋 他訳, “場の量子論の数学的方法”, 東京書籍株式会社 (1980).
- [40] 古澤 明, “量子光学と量子情報科学”, 株式会社数理工学社 (2005).
- [41] S. L. Braunstein and P. van Loock, “*Quantum information with continuous variables*”, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 513 (2005).
- [42] Michael A. Nielsen and Issac L. Chuang, “*Quantum Computation and Quantum Information*”, 10th Anniversary Edition, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS (2010).
- [43] M. Han, S. J. Olson, and J. P. Dowling, “*Generating entangled photons from the vacuum by accelerated measurements: Quantum-information theory and the Unruh-Davies effect*”, *Phys. Rev. A.* **78**, 022302 (2008).
- [44] D. C. M. Ostapchuk and R. B. Mann, “*Generating entangled fermions by accelerated measurements on the vacuum*”, *Phys. Rev. A.* **79**, 042333 (2009).
- [45] 佐藤 勝彦, 二間瀬 敏史 ら, “時間論の諸パラダイム”, 別冊・数理科学, サイエンス社 (2004).
- [46] David Deutsch, “*Quantum mechanics near closed timelike lines*”, *Phys. Rev. D.* **44**, 3197 (1991).
- [47] Hugu Everett III, “*Relative State Formulation of Quantum Mechanics*”, *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 29, 454 (1957).
- [48] C. H. Bennett, “*Simulated Time Travel, Teleportation without communication, and How to conduct a Romance with Someone who has fallen into a black hole*”, lecture at QUPON conference Vienna, Austria May 2005 (unpublished), <http://web.archive.org/web/20070206131550/http://www.research.ibm.com/people/b/bennetc/QUPONBshort.pdf>
- [49] S. Lloyd, L. Maccone, R. Garcia-Patron, V. Giovannetti, and Y. Shikano, “*Quantum mechanics of time travel through post-selected teleportation*”, *Phys. Rev. D.* **84**, 025007 (2011).
- [50] Seth Lloyd *et al.*, “*Closed Timelike Curves via Postselection: Theory and Experimental Test of Consistency*”, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 040403 (2011).
- [51] George Svetlichny, “*Effective Quantum Time Travel*”, arXiv: quant-ph/0902.4898 (2009).
- [52] J. Bub and A. Stairs, “*Quantum interactions with closed timelike curves and superluminal signaling*”, *Phys. Rev. A* **89**, 022311 (2014).
- [53] M. Bartkiewicz, A. Grudka, R. Horodecki, J. Łodyga, and J. Wychowaniec, “*Closed timelike curves and the second law of thermodynamics*”, *Phys. Rev. A* **99**, 022304 (2019).
- [54] M. Hiroishi and H. F. Hofmann, “*An investigation of the transfer dynamics of quantum teleportation by weak measurement statistics*”, *J. Phys. A: Math Theor.* **46**, 245302 (2013).
- [55] A. Peres and D. R. Terno, “*Quantum information and relativity theory*”, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 93 (2004).

- [56]] Asher Peres, “*Quantum Theory: Concepts and Methods*”, Kluwer Academic Publishers (1995). ; ペレス, “量子論の概念と手法”, 丸善株式会社 (2001).
- [57] N. Gisin, “*Hidden quantum nonlocality revealed by local filters*”, Phys. Lett. A **210**, 151 (1996).
- [58] 山本 喜久, 渡部 仁貴, “量子光学”, 株式会社培風館 (1994).
- [59] Ching Tsung Lee, “*Measure of nonclassicality of nonclassical states*”, Phys. Rev. A. **44**, R2775 (1991) .
- [60] 青木 隆朗, 石坂 智, 伊藤 公平 ら, “基礎からの量子光学—基礎理論から実用化に向けた取り組みまで”, 株式会社オプトロニクス社 (2009).
- [61] 松岡 正浩, “量子光学”, 東京大学出版会 (1996).
- [62] S. J. Olson and T. C. Ralph, “*Entanglement between the Future and the Past in the Quantum Vacuum*”, Phys. Rev. Lett. **106**, 110404 (2011).
- [63] Benni Reznik, “*Distillation of vacuum entanglement to EPR pairs*”, arXiv: quant-ph/0008006 (2000).
- [64] B. Reznik, “*Entanglement from the Vacuum*”, Found. Phys. **33**, 167-176 (2003).
- [65] L. Davidovich, N. Zagury, M. Brune, J.M. Raimond, and S. Haroche, “*Teleportation of an atomic state between two cavities using nonlocal microwave fields*”, Phys. Rev. A. **50**, R895 (1994).