

三角形の合同条件に対する中学生の捉えに関する一考察

天野 秀樹 ・ 北基 如法*

1 研究の目的と方法

中学校第2学年の図形領域で証明学習が始まる。この学習では、まず、三角形の合同条件を学ぶ。そしてその後に、三角形の合同条件などをもとにして三角形や平行四辺形の基本的な性質を論理的に確かめる授業が展開される(文部科学省, 2018)。本稿では、これら20~30の授業時間での学びを、中学校第2学年の証明学習と呼ぶことにする。教科書の内容によれば、三角形の合同条件などをもとにして二等辺三角形の性質、直角三角形の合同条件、平行四辺形の性質、平行四辺形になるための条件、正方形・長方形・ひし形の性質を論理的に確かめる授業が展開される(藤井斉亮や天野秀樹ほか, 2015)。図1は、そのうちの1時間である実践「四角形の各辺の中点を結んでできる図形」の板書である。

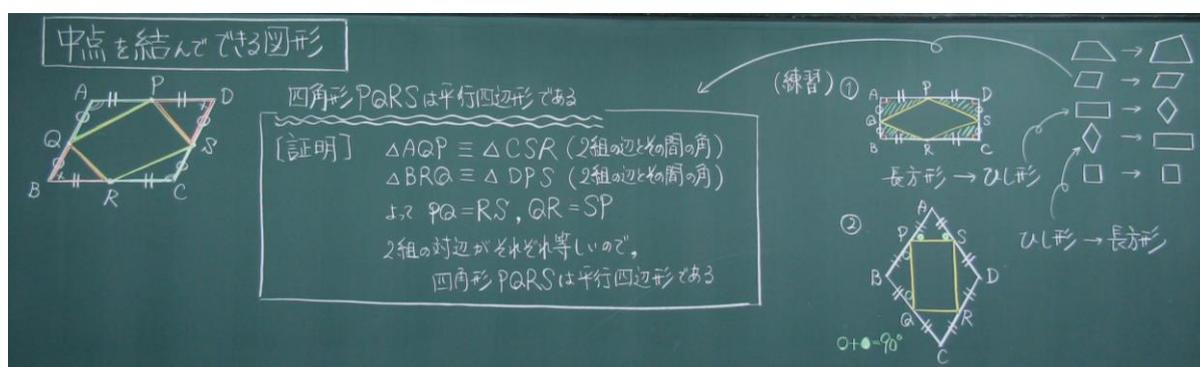


図1 板書：実践「四角形の各辺の中点を結んでできる図形」

筆者はこの証明学習の進め方に疑問をもつ。学問としての数学においては、基本的な性質を論理的に確かめる手段として、既習の内容である三角形の合同条件を利用することには、何ら問題がない。しかしながら、学校数学の現場において、子どもたちが抱いている三角形の合同条件に対する捉えを無視し、完全無欠な道具として三角形の合同条件を扱う授業が展開されたとする。そうすれば、子どもたちの図形感覚や論理性を伸ばし損ねることにつながってしまう。例えば、「小学校で学んでいる性質“二等辺三角形の底角は等しい”は、三角形の合同条件を利用して確かめることで、すべての二等辺三角形について成り立つことが言える」と授業を展開したとする。しかし、そもそも三角形の合同条件に対する概念が定着していない子どもは困難を示すことが予想される。その結果、三角形の合同条件をとにかく暗記して使える道具にしようとする子どもたちが増えるように思われる。実際の教科書の内容によれば、16ある性質を確かめる手段として、三角形の合同条件は13回利用される^註(藤井斉亮や天野秀樹ほか, 2015)。このような利用頻度からしても、子どもたちの三角形の合同条件に対する概念形成の変容は無視できないと考える。そこで筆者は、三角形の合同条件に対する子どもたちの捉えを、証明学習における中学2年生の意識の一端と考え、本稿における研究の問いを、三角形の合同条件に対する理解の様相を把握することとした。

先行研究において de Villiers (1990) は、証明学習が果たす役割や機能について論じている。また、わが国においても、子どもたちの理解を促進する証明学習について述べられている(小関(1987)など)。証明学習に関する子どもたちの理解の実態や指導法については、これまでの数学教育研究で数多く示されてきている。しかしながら、証明学習を進めている際に、そのもとになる三角形の合同条件に対する理解の様相を明らかにする研究は管見の限り見られない。

*広島大学大学院人間社会科学部研究科

Hideki AMANO, Yukinori KITADAI

Attitude survey of the junior high student for the triangular congruent condition

そこで、本研究では、中学2年生の子どもたちが証明学習を進めている段階で、頻繁に利用している三角形の合同条件に対する捉えを明確にすることを目的とする。そのために、中学2年生に実態調査を実施する。このことによって、証明学習を進める際の中学生の意識の一端を明らかにできると考える。

2 実態調査の設計

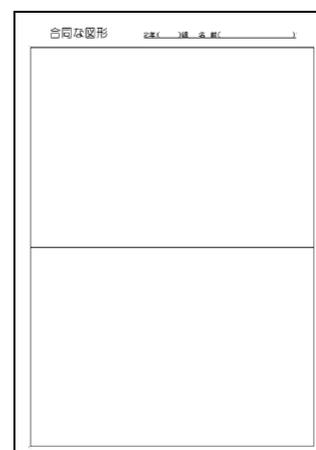
中学校第2学年の証明学習がすべて終了した段階において、三角形の合同条件に対する捉えを把握できるように、次のように設計した。

期 日	令和2年2月4日(火)
対 象	広島大学附属東雲中学校2年生 80名(男子40名,女子40名)
調査者	筆者
内 容	授業中 ①「伝達ゲーム」 ②全体質問 放課後 ③焦点を当てた生徒に対するインタビュー

第一に、三角形の合同条件に対する捉えが表出するような活動である「伝達ゲーム」を設定した。これは、自分で描いた三角形と合同な三角形を、仲間に描かせるゲームである。

〔準備〕準備物は、生徒全員にコンパス、定規、分度器、右に提示したワークシートを準備した。まず、2人組のペアを作らせ、机を向かい合わせにさせて、お互いに相手のワークシートが見えないように教科書をつい立てとして立てさせた。そして、ゲームの準備として、片方の生徒が上側に、もう一方の生徒が下側に、2分30秒で思うがままに三角形を描かせる。

〔ゲーム〕上側に三角形を描いた生徒に自分が描いた三角形を伝達させ、もう一方の生徒にワークシートの上側に伝えられた情報から三角形を描かせる。時間は2分30秒で、ジェスチャーはさせず、すべて言語情報でお互いにやり取りさせる。その後、下側に三角形を描いた生徒から2分30秒で同様にやり取りさせる。なお、これらのやり取りは、ボイスレコーダー10台をランダムに設置し、20名分のやり取りを音声記録として残した。



第二に、伝達ゲームの後、全体質問を実施した。まず、やり取りをふり返って、合同な三角形の伝達に対する自信度合いを挙手させた。また、ペア同士でワークシートを重ね合わせることで、合同な三角形が伝達できたか相互評価させた。そして、その評価をワークシートに○、△、×として記入させた。さらに、伝達した事柄をワークシートに記入させたうえで、三角形の6つの要素(辺の長さ3つと角の大きさ3つ)のうち、いくつの要素を伝えたかを記入させた。

第三に、本実態調査の信頼性を高めるため、トライアングレーション(関口, 2013)の視点からインタビュー調査を実施した。三角形の6つの要素のうち4つ以上伝達した生徒の中から、ランダムに設置したボイスレコーダーの音声記録に残された生徒4名に対して、焦点を当てた生徒としてインタビューを行った。実際は放課後に1名ずつ実施し、伝達ゲームで使用したワークシートを持たせたうえで、伝えた内容を確認するインタビューを実施した。なお、この調査においても、ボイスレコーダーを設置し、音声記録を残している。

〔補足〕本実態調査の妥当性を検証するために、実態調査の前に予備調査を行った。この調査は、令和元年12月12日に広島県内のF中学校2年生5名に対して実施した。学習時期は、三角形の合同条件と二等辺三角形の性質を学習した後の段階であった。調査方法は、上述した「伝達ゲーム」と同じ方法で行った。その結果、三角形に対して伝達した内容について、1名は3つの要素(2組の辺とその間の角)であった。そして、残りの生徒4名は、4つの要素を伝達したことがわかった。したがって、本研究の想定通り、三角形の合同条件に対する捉えは多様で、証明学習を進める中でも変化すると判断した。すなわち、ある程度の妥当性があると判断して、本実態調査を実施した。

3 実態調査の結果

調査対象の生徒80名のうち、合同な三角形を仲間に描かせるために、3つの要素を伝達した生徒は61名(約76.2%)であった。4つの要素を伝達した生徒は14名(約17.5%)であり、5つの要素は3名(約3.8%)、6つの要素は2名(約2.5%)であった。また、3つの要素を伝達した生徒61名のうち、「3組の辺」を伝達した生徒は15名(約24.6%)であり、「2組の辺とその間の角」は29名(約47.5%)、「1組の辺とその両端の角」は17名(約27.9%)であった。伝達ゲームの自信度合いは、評価○の生徒は72名(90%)であり、△が7名(約8.8%)、×が1名(約1.3%)であった。

焦点を当てた生徒としてインタビュー調査を実施した4名の生徒のうち、紙面の都合上、三角形の要素を4つ伝達した生徒2名(生徒Se, 生徒Hi)についてあげる。

まず、生徒Seである。生徒Seは数学学習に意欲をもって取り組み、定期テストでは高得点をとる。また、図形学習も得意であると感じている。伝達ゲームのペア生徒Yaも定期テストで高得点をとる生徒であり、伝達ゲームでは「2組の辺とその間の角」による3つの要素を伝達した。生徒Seが伝達ゲームで伝えた三角形は、**図2**である。また、伝達ゲームにおける生徒Seと生徒Yaのペアによる音声記録は、**図3**である。

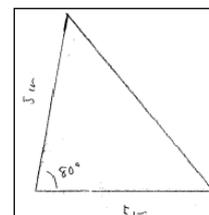


図2 生徒Seが伝えた三角形

1	Se	二等辺三角形を書いてください。
2	Ya	どこを底辺にしますか？
3	Se	底辺を5cmで書いてください。
4	Ya	待ってよ。 [間] はい、書きましたよ。
5	Se	書いたら、その底辺の右側と左側は、左の方が右の角より大きくて。
6	Ya	左の方が角が大きいよね。
7	Se	そう。5cmの左側の角が80度になっています。
8	Ya	なるほど。待って。 [間] 分度器で一、80度とったよ。 長さも教えてほしいねー。
9	Se	そう。その長さは5cmです。
10	Ya	また？ [間] 5cmとったよ。なるほど。待ってよ。 二等辺三角形って、5cmと5cm？
11	Se	そう。底辺の5cmと左側の5cm。
12	Ya	それなら、本当は底辺という言葉は使わないよ。
13	Se	えー、どう言えば良い？
14	Ya	えっ、下の辺とか言えば良いのではない？
15	Se	わかった。
16	Ya	もう、これで完璧？
17	Se	えー、もう一つの辺が6.4cmから6.5cmの間くらいに なっているか測ってみて。
18	Ya	あー、 [間] 6.5弱。なってるねー。
19	Se	なら、それなら、完璧だと思う。
20	Ya	OK。

図3 生徒Seと生徒Yaのペアによる伝達ゲームの音声記録

伝達ゲームをふり返って生徒Seは、自らの伝達内容を**図4**のように、ワークシートに記した。

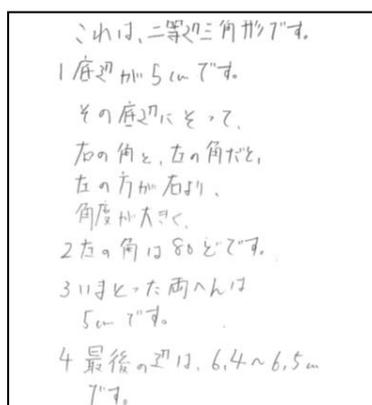


図4 生徒Seがワークシートに記した伝達ゲームで伝えた内容

さらに、筆者が実施した生徒Seへのインタビュー調査における音声記録は、図5である。

1	T(筆者) この図を、どのように伝えましたか?
2	Se はい。最初に二等辺三角形という言葉伝えました。
3	T なぜ、最初に二等辺三角形と伝えたのですか?
4	Se 最初に大きな方向性を伝えておくと、相手が私の形をイメージしやすいと思ったからです。
5	T わかりました。次に、どのように伝えましたか?
6	Se 5cmを言って、左側の80度を言って、さらに左側の5cmの辺を伝えました。
7	T なるほど。それで終了しましたか?
8	Se えっつ、いいえ。
9	T まだ他に、伝えたことはありますか?
10	Se はい。もう一つの辺を確認するようにお願いしました。
11	T なるほど。なぜ、その確認のお願いをしたのですか?
12	Se 私の形が本当に確実に伝わっているか、けっこう不安でした。なので、確実性を増すためにも6.4cmと少しぐらいの辺の長さになっているかを聞いて、確認をとりました。
13	T なるほど。その確認で伝わったかどうかの確実性は変わりましたか?
14	Se はい、不安だったのが、ものすごく確信をもてました。
15	T わかりました。これで伝えたことは全てですか?
16	Se はい。

図5 生徒Seへのインタビュー調査の音声記録

次に、生徒Hiである。生徒Hiは数学学習に意欲をもって取り組むものの、表現力をはじめ学力はあまり高くない。伝達ゲームのペア生徒Kuも学力はあまり高くない生徒であり、伝達ゲームでは6つすべての要素を伝達した。生徒Hiが伝達ゲームで伝えた三角形は、図6である。また、伝達ゲームにおける生徒Hiと生徒Kuのペアによる音声記録は、図7である。

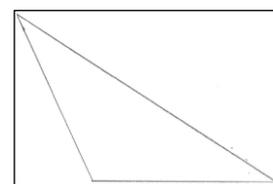


図6 生徒Hiが伝えた三角形

1	Hi ブーメランみたいで、二等辺っぽいけど、二等辺三角形ではないもの行きます。
2	Ku はい。どうぞ。
3	Hi まず、底辺を5cm引いて。
4	Ku はい、5cmね。 [間] 引いたよ。
5	Hi そしたら、左側に115度測ってとっというて。
6	Ku 分度器で?
7	Hi うん、もちろん、分度器でしょ。
8	Ku 115度ってー? 外側にそれるっていうこと?
9	Hi 外側って? 外側でしょ。
10	Ku あっ、だから、鋭角側ではなくて、鈍角になるっていうことね。
11	Hi そういうこと、外側に115度お願いします。
12	Ku はい、115度、とったけど。
13	Hi そしたら、これ5.1cm左側の辺につけ足しましょー。
14	Ku 待ってよ。定規で5.1cm測れば良いんよね。 [間] OKです。
15	Hi そしたら、底辺の右端とさっきの左上を結んで。
16	Ku 結んだよ。
17	Hi そしたら、次は底辺の5cmの右端の角度が33度を測ります。
18	Ku えっ、測ればいいの?
19	Hi うん、測って。
20	Ku 確かに、33度になっとる。
21	Hi うん、よし。ぴったり合同になったね。
22	Ku はい。なったんかねー。

図7 生徒Hiと生徒Kuのペアによる伝達ゲームの音声記録

伝達ゲームをふり返って生徒Hiは、自らの伝達内容を図8のように、ワークシートに記した。

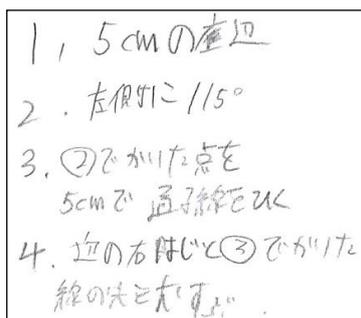


図8 生徒Hiがワークシートに記した伝達ゲームで伝えた内容

さらに、筆者が実施した生徒Hiへのインタビュー調査における音声記録は、図9である。

1	T(筆者)	この図を、どのように伝えましたか？
2	Hi	まず、5cmの底辺を引いてって伝えました。
3	T	次に、どんなことを伝えましたか？
4	Hi	えっと、左側に115度とって一、5.1cmとるように伝えました。
5	T	なるほど。次に、どんなことを伝えましたか？
6	Hi	えっ。えっ。結んでって。三角形になるように結んでって伝えました。
7	T	なるほど。次に、どんなことを伝えましたか？
8	Hi	えーっと、5cmの底辺の右側の角度を測ってって伝えました。
9	T	なるほど。角度を測るように言ったんですね。
10	Hi	あっ、はい。あっ、右側は33度か測ってって伝えました。
11	T	なるほど。もうすでに、三角形になるように結んでいるのにさらに右側が33度かどうか測るのはどうしてですか？
12	Hi	それはですねー。 [間] 5cmと115度、5.1cmで2辺とその間の角で行けるじゃないですか。それに、5cm、115度、33度で1辺とその両端の角もあれば一、さらに無敵で強くなるじゃないですか。
13	T	無敵で強くなるということは、合同になるということですか？
14	Hi	はい、よりぴったり合同になるということです。
15	T	なるほど。2辺とその間の角と1辺とその両端の角の2つの合同条件がそろったから、より合同になるということですか？
16	Hi	はい、そうです。
17	T	ちなみに、3組の辺は確認しないで良いのですか？
18	Hi	あー、合同条件2つもそろえば、もう十分です。
19	T	わかりました。これで伝えたことは全てですか？
20	Hi	はい。

図9 生徒Hiへのインタビュー調査の音声記録

4 考察

(1) 三角形の合同条件に1つ要素を加えた方が確実とする捉え

調査で実施した伝達ゲームにおいて、合同条件である3つの要素を伝達した生徒は、約76.2%しかいなかった。この情報からは、中学校第2学年の証明学習がすべて終了した段階において、「合同条件である3つの要素で2つの三角形が合同になる」捉えを大勢が有しているかは特定できない。そこで、焦点を当てた生徒Seの音声記録(図3)及び生徒Seが活動をふり返って記したワークシート(図4)、調査後の生徒Seへのインタビュー記録(図5)の一部を、再掲する。

〔図3より〕

17 Se えー,もう一つの辺が6.4cmから6.5cmの間くらいになっているか測ってみて。

〔図4より〕

4 最後の辺は、6.4～6.5cm
T T.

〔図5より〕

- 9 T(筆者) まだ他に、伝えたことはありますか？
10 Se はい。もう一つの辺を確認するようにお願いしました。
11 T なるほど。なぜ、その確認のお願いをしたのですか？
12 Se 私の形が本当に確実に伝わっているか、けっこう不安でした。なので、確実性を増すためにも6.4cmと少しくらいの辺の長さになっているかを聞いて、確認をとりました。
13 T なるほど。その確認で伝わったかどうかの確実性は変わりましたか？
14 Se はい、不安だったのが、ものすごく確信をもてました。

これらの結果から、合同条件である3つの要素を伝達した後、4つ目の要素を伝えたことがわかる。また、インタビュー記録(図5)における「12:私の形が本当に確実に伝わっているか、けっこう不安でした。なので、確実性を増すためにも6.4cmと少しくらいの辺の長さになっているかを聞いて、確認をとりました。」「14:はい、不安だったのが、ものすごく確信をもてました。」から、「合同条件である3つの要素にもう1つ要素を加えることで、2つの三角形が確実に合同になる」捉えがうかがえる。

(2) 三角形の合同条件を2つ組み合わせた方が確実とする捉え

上述した通り、証明学習終了時点において、「合同条件である3つの要素で2つの三角形が合同になる」捉えを大勢が有しているかは特定できない。そこで、焦点を当てた生徒Hiの音声記録(図7)及び調査後の生徒Hiへのインタビュー記録(図9)の一部を、再掲する。

〔図7より〕

- 17 Hi そしたら、次は底辺の5cmの右端の角度が33度を測ります。
18 Ku えっ、測ればいいの？
19 Hi うん、測って。
20 Ku 確かに、33度になっとる。
21 Hi うん、よし。ぴったり合同になったね。
22 Ku はい。なったんかねー。

〔図9より〕

- 7 T(筆者) なるほど。次に、どんなことを伝えましたか？
8 Hi えーっと、5cmの底辺の右側の角度を測ってって伝えました。
9 T なるほど。角度を測るように言ったんですね。
10 Hi あっ、はい。あっ、右側は33度が測ってって伝えました。
11 T なるほど。もうすでに、三角形になるように結んでいるのにさらに右側が33度かどうか測るのはどうしてですか？
12 Hi それはですねー。[間] 5cmと115度、5.1cmで2辺とその間の角で行けるじゃないですか。それに、5cm、115度、33度で1辺とその両端の角もあれば、さらに無敵で強くなるじゃないですか。
13 T 無敵で強くなるということは、合同になるということですか？
14 Hi はい、よりぴったり合同になるということです。
15 T なるほど。2辺とその間の角と1辺とその両端の角の2つの合同条件がそろったから、より合同になるということですか？
16 Hi はい、そうです。

インタビュー記録(図9)における「12:5cmと115度、5.1cmで2辺とその間の角で行けるじゃないですか。それに、5cm、115度、33度で1辺とその両端の角もあれば、さらに無敵で強くなる」から、「三角形の合同条件は1つよりも2つ成立した方が、2つの三角形が確実に合同になる」捉えがうかがえる。

(3) 三角形の合同条件に対して抱く不安や自信

調査で実施した伝達ゲームの自信度合いは、評価○の生徒が90%であった。このことから、自分の捉える三角形の合同条件に対して、おおむね自信をもっていることがわかる。

また、焦点を当てた生徒Seへのインタビュー記録(図5)における「12:私の形が本当に確実に伝わっているか、けっこう不安でした。」「14:不安だったのが、ものすごく確信をもてました。」、生徒Hiへのインタビュー記録(図9)における「12:さらに無敵で強くなる」から、三角形の合同条件に対して不安や自信を抱いている様子がうかがえる。

5 まとめと今後の課題

本研究の目的は、中学2年生の三角形の合同条件に対する捉えを明らかにすることであった。そのために本稿では、実態調査を実施した。

結果として、中学校第2学年の証明学習がすべて終了した段階において、「合同条件である3つの要素で2つの三角形が合同になる」捉えを大勢が有しているかは特定できない。しかしながら、次の3つの意識を有する子どもたちがいることが明らかになった。

- (1) 三角形の合同条件に1つ要素を加えた方が確実にする捉え
- (2) 三角形の合同条件を2つ組み合わせた方が確実にする捉え
- (3) 三角形の合同条件に対して抱く不安や自信

今後は、証明学習における子どもの意識に関して、質の違いを把握するための枠組みについて研究を進めたい。また、証明学習において子どもたちの意識を向上させる指導法を提案したい。

[註 について]

教科書(T社)中学校第二学年「新編新しい数学2」(藤井斉亮ほか,2015)の112頁から147頁における問題(実際には「Q」及び「例」)を数えている。また、練習問題(実際には「たしかめ」及び「問」,「基本の問題」)は数えていない。

【 引用・参考文献 】

文部科学省, 中学校学習指導要領(平成29年告示)解説 数学編, 日本文教出版, 2018.

藤井斉亮ほか, 中学校第二学年「新編新しい数学2」, 東京書籍, 2015.

de Villiers, M. (1990). THE ROLE AND FUNCTION OF PROOF IN MATHEMATICS. *Pythagoras*, 24, 17-24.

小関熙純編, 図形の論証指導, 明治図書, 1987.

関口靖広, 教育研究のための質的研究法講座, 北大路書房, 2013.