広島大学附属中・高等学校中等教育研究紀要
〈第 67 号　2020〉

図形指導における問いの工夫

橋　本　三　嗣

本研究では中学２年の図形指導に関して，問いを工夫し３つの授業を設計し，実践を行った。その結果，中学２年段階では，記号表現から図表現への変換に困難がある生徒がいること，命題の逆の真偽判断には図表現による豊富な経験が必要になること，座標や式を用いないで軌跡を考察することで図形の考察が深まりうることが示され，成果と問題点が明らかになった。

１．はじめに

中高の図形指導の系統は，戦前・後の経緯を経て，「系統化」学習指導要領下で，一つの枠ができた。その後，多くの実践記録が提出されて，その困難性や指導の工夫も報告されているが，未だ十分であるとは言い難い。特に，中学２年の図形指導では，図形の性質とともに，証明のしくみの理解が求められる。数学そのものの理解に限らず，論理的思考の基礎となる力を育てる重要な時期であるといえる。そのため，生徒の状況を把握するとともに，理解を促すための問いの工夫を検討することが重要であると考える。本稿では，吉田（1985）における「発問」の定義「学習指導の中で，意図的に設けられる生徒への問いかけを」一括したものを援用し，チェックポイントとして挙げられた①生徒に何かをしゃべらせる，②学習過程の適切な局面に位置づける，③生徒の反応を予測する，を問いの工夫の視点とする。中学２年の図形指導の実践の考察・検討を行い，生徒の図形認識の諸相や傾向を探る。

２．授業設計

対象は国立大学附属中学校２年生１クラス (44 名) として，筆者が授業を計画・実施した。

(1) 三角形の合同条件（2020 年 9 月）

４名ずつのグループを作り，最初にその中の１名が△ ABC を紙にかく。かいた△ ABC の条件をできるだけ少ないことばにして他の３名に伝え，３名はその条件をもとにその三角形をかく。三角形には，辺と角の条件があることを確認し，生徒は図形をかくときには目盛りつきの定規，コンパス，分度器を使用してよいものとする。目盛りつきの定規を用いることで，直線をかく，辺の長さをはかることができ，コンパスを用いることで円をかくことができ，分度器を用いることで角の大きさをはかることができる。３名が与えられた条件をもとにして図形をかいた後に、互いに見せ合い、もとの三角形と合同なものがかけているかどうかを図形を重ねることで確認する。その後，グループ内で役割を変えて同じことを繰り返す。この活動は，条件を基にして三角形をかくことで，三角形の決定条件を考えることを可能にする。△ ABC を紙にかくときには，無地の紙を準備し，底辺や高さに着目させないようにする。罫線があると，その罫線を使って底辺をかく傾向があるためである。生徒ができるだけ少ないことばにして他の生徒に伝える活動の中でいつも，必ずその三角形に決まるのかが問いの工夫である。

(2) 命題の逆（2020 年 10 月）

中学２年の図形指導では，命題という表現は紹介されず，証明の進め方を指導する中で，仮定と結論を入れかえた関係を逆ということにしている。例えば，△ ABC と△ DEF で，「△ ABC ≡△ DEF ならば，AB=DE，BC=EF，CA=FD である」の逆は，△ ABC と△ DEF で，「AB=DE，BC=EF，CA=FD ならば，△ ABC ≡△ DEF である」となる。カンマ記号（,）はまたは（or）とかつ（and）という意味があるが，この場合はかつ（and）を表すこと，「正しい／正しくない」という真偽の判断の際には，条件を満たす図形すべてについて考えることを指導した上で，命題の逆の真偽判断を行う。この例の場合，逆も正しいといえる。しかし，△ ABC と△ DEF で，「△ ABC ≡△ DEF ならば，∠ A= ∠ D，∠ B= ∠ E，∠ C= ∠ F である」という命題の場合，もとの命題は正しいが，その逆，△ ABC と△ DEF で，「∠ A= ∠ D，∠ B= ∠ E，∠ C= ∠ F ならば，△ ABC ≡△ DEF である」は正しくない。△ ABC と△ DEF が相似でも成り立つためである。授業ではもと

Mitsugu HASHIMOTO：Ingenuity of Questions in Figure Instruction

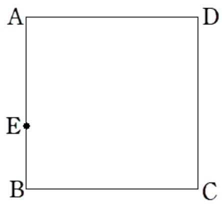
の命題が正しくても，その逆が常に正しいとは限らないということに関して図形を題材として扱う。「逆は正しいといえますか」という点が問いの工夫である。数を題材にすると，整数の和や差の偶奇に関して真偽を判断することもできるが，今回は図形を題材とした際の生徒の反応を調べることに限定した。命題の逆の真偽判断を指導する際に，図形の題材を使用するか，数の題材を使用するかの議論については，別の機会に行うことにする。

(3) 軌跡（2020 年 11 月）

軌跡は，式を用いて考察する方法は高等学校の数学で扱うが，中学校の数学において扱うこともできる。風間（2019）は，式を用いずに軌跡を中学校の数学で扱うことで，図形学習によい効果を与えることを指摘している。授業では，風間（2019）の調査問題を援用する。調査問題は次の通りである。

【風間（2019）の調査問題】

正方形 ABCD があります。点 E は辺 BA 上を点 B を出発し点 A まで動く点です。点 F は辺 D A上にあり，BE = DF となる点です。また，点 P は線分 E F の中点です。



このことにもとづいて，次の①～④に答えなさい。

① 点 E が図の位置にあるとき，図に点 F をかき入れなさい。また，点 P もかき入れなさい。

② 点 E が点 B を出発し点 A まで動いていくと点 F はどのように動きますか。点Fの動きを説明しなさい。

③ 点 E が点 B を出発し点 A まで動いていくと点 P はどのように動きますか。また，なぜそのように動くのか，その理由を説明しなさい。

④ 点 G は辺 DC 上にあり BE = DG となる点です。点 Q は線分 EG の中点です。点 E が点 B を出発し点 A まで動いていくと点 Q はどのように動きますか。また，なぜそのように動くのか，その理由を説明しなさい。

この調査問題を扱うことで，生徒が点の動きをどのように認識しているかを把握し，説明する活動の中で，生徒のインフォーマルな知識や表現をもとにして記述表現力を高めることが期待できる。生徒の様々な表現を引き出す問いの工夫ができるか，授業者の力量が試される所である。

3．授業実践

(1) 三角形の合同条件（2020 年 9 月）

小学校の算数における図形学習では，与えられた図をもとにして考察することが多く，その意味で，図表現は考察の対象そのものであるともいえる。その経験をもとにして，記号表現への変換をスムーズに行うことが，中学２年の図形指導では求められる。授業で最初の１名が伝えた条件は，11 グループの 11 名が全員，３辺の長さを与えるものであった。授業者が「角度についての条件を入れるとどのようになるかな」と問うことにより，次の活動に多様性が生まれた。生徒の会話には次のようなものがあった。

S1「AB=8 で∠ A=45°。そして∠ C=70°」
S2「（∠ C=70° の代わりに）∠ B=75° と言ってくれた方が分かりやすいな。三角形の内角の和が 180° だから同じことになるでしょ。」
S1「測った順に発表したら，こうなったよ。」
S3「AB=8 で∠ A=45° からは，C がある直線は決まるけど，その条件だけではまだ点 C は正確には決まらないよ。∠ C=70° が追加されたから，点 C は２本の直線の交点だと分かったけど。」

【S1～ S3 は生徒，（　）内は筆者による】

この会話の内容は，△ ABC を決定するには，１辺とその両端の角が与えられるとよいという話になった。また，他のグループには次のような会話があった。

S4「AB=8 で AC=7 で∠ B=60°」
S5「かけたよ。こんな図かな？」
S6「あれ？私がかいた図と違うな。」
S4「私はこれ（S5 の図）を伝えようとしたのだけど・・・」
S7「けれどこの図（S6 の図）も条件に当てはまっているよ。」

・・・(中略)・・・

S4「さっきの条件では，図は１つに決まらないね。∠ A の大きさを言えばよかったな。」

【S4～ S7 は生徒，（　）内は筆者による】

このグループでは，２辺の長さとはさまない角の大きさを伝えたために，三角形が１つに定まらず，定めるためには，２辺の長さとはさむ角の大きさを伝えるとよいという話に収束した。このように，△ ABC の条件をできるだけ少ないことばにして伝える活動により，三角形の合同条件を導出することができた。この活動を通して，自分のかいた図をもとにして，辺の長さや角の大きさを測って伝えることは容易であるが，受け取った方の生徒が，記号表現から図表現に変換するのに時間がかかり，困難を示す生徒も少なからずいた。記述表現の変換は，理解の様相を示しているため，困難を示す生徒には慣れるまで丁寧に指導したい。

(2) 命題の逆（2020 年 10 月）

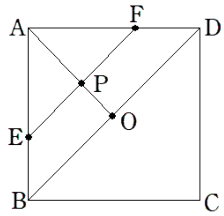
中学の図形指導において，逆を利用して，図形の

性質を紹介する例は少なくない。例えば中学２年では，平行四辺形の性質を導いた後に，その逆を考えることで，平行四辺形になるための条件を指導する。逆を理解していない生徒にとっては同じことの繰り返しと捉える危険性があるが，生徒が自然に思いつく発想でもないため，逆の利用は指導上有効な手立てであるといえる。また逆の利用は，高等学校の平面幾何の単元でも扱われる。授業では，すでに正しいと認められていることがらを根拠として，仮定から結論を導くことが証明であると指導し，仮定と結論を入れかえたときに，常に正しいといえるかを考えさせた。仮定と結論を明確に把握すること，逆が常に正しいとは限らないことを生徒に意識させることを授業の主たるねらいとした。中学の証明指導では，正しいと思われる結論に向かって根拠を与える活動を扱うため，生徒は条件を満たさない例（反例）を挙げる経験は少ない。また，条件を満たさない例は１つ挙げることで，正しくないと判断できる。これらのことに注意して指導を行った。

実際の授業では，図形に関して，仮定と結論を生徒に作らせ，それから逆が正しい／正しくないかを判断させた。ここで「三角形の内角の和は 180° である」などの記述をどのように，仮定と結論に表現するかという問題が出てくる。この場合，仮定を「ある図形が三角形」，結論を「その図形の内角の和は 180°」と記述することにした。この表現により，図形の性質を仮定と結論に表現することができる。仮定と結論を作る活動はスムーズに進んだ。逆が正しくない例として，仮定に図形の合同，結論に面積の相等を挙げる生徒も出てきた。授業者は図形の包含関係まで辿りつけるかと考えていたが，集合としての扱いはできなかった。生徒の発想，着眼点は豊かであり，そこには生徒なりの幾何学が存在していた。図形のどこを見ているのかが生徒によって異なり，すぐに反例を出す者もいれば，なかなか見つけられない者もいた。いくつか図形をかくことで，反例を見つけた生徒もいたが，手作業では限界があるようにも感じた。ICT の活用により，反例を見つけるための新たな可能性があるのではないかと考える。

(3) 軌跡（2020 年 11 月）

授業では，最初に風間（2019）の問題を提示し，教材として使用した。この問題は，条件から複数の図を見抜く，条件を満たす点の動きを説明するという点で，調査問題としてだけでなく授業の教材としても優れている。「説明しなさい」とすることで，生徒のインフォーマルな知識や表現を引き出すことが期待できる。「証明しなさい」としていない理由がそこにある。①，②は提示後すぐに解決し，③に進んだ。「説明しなさい」とあるので，生徒からはいろいろな方法に着目した説明が出された。



生徒から△ AEF が直角二等辺三角形であること，AC は∠ BAD の二等分線であり，点 P が∠ BAD の二等分線上にあること，正方形 ABCD や現れる図形が線対称であることなどの気づきからの説明がなされ，授業者から「証明するには何を示せばよいかな」と問うことで，△ AEP ≡△ AFP，直角二等辺三角形 AEF を示し，その中線 AP が対角線 AC の一部の AO と一致することを示す展開になった。動点が直線上にあるということを扱うことができた。④は「どのように動きますか」としているが，実は点 Q は動かない。いくつかの点をかくことで点 Q は正方形 ABCD の対角線の交点と一致していることに気づいた生徒はいたが，その説明まではできなかった。授業中にその意見を取り上げると，他の生徒も共感したが，どう示してよいかわからないままの状態で授業が終了した。何が明らかで，何を示すべきかを教室全体で共有することに留まったため，授業後の教室には生徒同士で議論する姿が見られた。軌跡に関する問題を座標や式を用いずに扱ったため，図形の考察がより深まったといえる。また説明する活動から生徒のインフォーマルな知識や表現を引き出し，それを議論することで証明指導に繋がることも示された。

４．総合的考察

本稿で紹介した３つの授業実践を通して，生徒の図形認識の諸相や傾向を知る契機となった。図形をどのように見るか，何を気づくか，気づきをどのように表現するかという問題は，生徒により異なるため複雑ではあるが，授業において出された生徒のインフォーマルな知識や表現を授業者が取り上げて，吟味することで考察が深まることが明らかになった。このことは，今更声高に主張するべきでないように思うが，生徒の気づきをどう生かすかについては，授業者の力量によるところが大きく，集団の中で状況に応じてどのように問うか，時間内でどこまで扱うかなど，授業者の事前の準備等によって工夫できる箇所が多いともいえる。そのため，成功例や失敗例を集めるとともに，そこに共通に見られる傾向を探ることは有意義であると考える。授業は評価の連続であるということを考えれば，授業は問いの

連続であるともいえる。授業者と生徒の関わりによる，このような地道で継続的な取り組みにより，生徒の探究する力が伸長されると筆者は考える。また生徒から問いが生まれることで，主体的，対話的で深い学びを実現し，生徒が自分ごととして数学の探究を楽しむ態度も育成されるであろう。生徒が図形をどう見ているかについては，より詳細な観察が必要であるように思う。図形認識の指導可能性につながる何らかの示唆が得られると考えている。ICT の活用により，これまで指導が困難であった点を解消することも期待できる。

また論理的思考力に関しては，筋道を立てて考える，説明するという力は中学の数学の指導を通して伸長できるが，条件の関係などの演繹的に推論する力に関しては，十分に達成することは難しいと考える。数学の系統性に加えて，生徒の学習経験の連続性を考慮する，つまり小中高を一貫した図形指導の在り方を検討することが必要である。論理的思考力を鍛える方法として，論理規則そのものを指導することも考えられるが，抽象的な議論をするのは，発達段階を考慮しても中等教育後期以降の方が妥当であろう。

５．おわりに

本研究では，図形指導の問いを工夫することで成果と問題点が明らかになった。授業研究にゴールはないのかもしれない。しかし，明確な目標を設定した授業を準備し，真摯に生徒の発言に耳を傾けることで，生徒だけでなく授業者にも新たな気づきが生まれる。この気づきが授業研究の質を高める。本稿で紹介した事例は，１つのクラスで実践したものであり，そこから得られた知見は汎用性に乏しいかも知れない。しかしながら，授業を設計する際には，何を教えるのか，生徒はこれまでの内容をどこまで理解しているのかを考慮するため，そのための基礎資料になるであろう。生徒が何を見て，何を考えているのかを把握することは難しい。それ故，授業者は問いを工夫しなければならない。そのための問いは必ずしも難しい問題を与えることと一致しないと筆者は考えている。基本的な内容から本質的な問いにより議論の場を作り，生徒の思考の諸相を明らかにすることができる。今後も研究を継続し，授業者としての力量を高める挑戦を続ける所存である。

謝辞

本研究を遂行するにあたり，四国大学文学部の風間喜美江先生に多大な研究協力をしていただきました。この場をかりてお礼申し上げます。

引用・参考文献

風間喜美江「順序思考・俯瞰思考による図形論証教材開発」，『日本教材学会第 31 回研究発表大会研究発表要旨集』，2019 年，70-71.

橋本三嗣「探究的な学習活動を促す図形の論証指導－中高一貫指導に焦点をあてて－」，『全国数学教育学会第 51 回研究発表会発表資料』，2019 年.

吉田　稔「発問の工夫」，岡本光司編『中学校若い教師のための数学科授業相談』，明治図書，1985 年，61-69.

本研究は，JSPS 科研費 18H02614（基盤研究）【研究代表者：風間喜美江】の助成を受けたものである。

Ingenuity of Questions in Figure Instruction

Mitsugu HASHIMOTO

Abstract:

In this study, we designed and practiced three lessons on figure instruction for second year junior high school students. An abundance of experience with graphic expressions is required to judge the truth of the opposite of a proposition. There were students who had difficulty converting symbolic expressions to graphic ones. The study found that the consideration of a figure can be deepened by considering the trajectory without a coordinate system.