数式の構造的理解の促進を指向した
作問学習システムの設計・開発と実践的利用

（Design, Development and Practical Use of Problem-Posing Systems
Promoting Structural Understanding
for Arithmetic and Mathematics Expressions）

えのもと　ひろよし
榎本　浩義

2020 年 9 月

広島大学大学院工学研究科

内容梗概

情報工学の技術を用いて，学習活動を計算機により支援する取り組みは 1970 年代から始まり，現在も活発な研究が行われている研究分野である．中でも人工知能からの取り組みは早くから注目されており，機械学習等の統計的な人工知能を用いるアプローチと，知識工学等の記号的な人工知能を用いるアプローチがある．後者のアプローチは，教材の意味的構造の学習者による理解を重視し，その理解を促進する上で，その構造を計算機処理可能にするための記号的記述を試みるものである．本研究は，後者のアプローチに基づき，算数や数学の数式を構造として理解させるために，要求に応じた数式を作る作問学習を，学習者に組み立てさせる再構成法を用いて実現したものとなる．再構成法を用いた作問学習はこれまで算数や数学の文章題を中心に活発な研究が行われ，学習効果も確認されている．本研究では，算数や数学の数式においてもその構造が重要であり，数式の深い理解のためには，数式を計算手続きでなく構造的に捉えることが必要と考えた．数式の作問は，数式を構造的に捉えて再構成することといえるので，構造的な理解の促進につながると考えられるが，算数・数学の数式を対象とした作問学習環境のシステム化，教育現場での実践的利用はこれまで行われていなかった．

数学を学ぶ上での導入段階として重要とされる文字式の学習では，多くの学習者が学習困難を来しており，算数から数学への接続ギャップになっていると指摘されている．文字式の学習が難しい理由のひとつは，算数と数学とで，数式の読み取り方が，計算手続きの記述としての読み取り方から数量関係の読み取りに変わることであるとされる．数式を数量関係として読み取るには，数式の構造的理解が求められるといえるが，算数では計算を手続きとして教えることが中心であり，計算問題では，数式を計算手続きと読み取り，読み取った手続きを遂行すれば正解が算出できるため，数式の構造的理解促進にはつながりにくかったといえる．ただし算数の計算問題でも，数式を構造的に読み取ることが不要というわけではなく，工夫計算と呼ばれる単元は，数式を構造的に読み取り，等価変換して，計算しやすくすることを求めている．本研究では，算数の中で数式を構造的に捉えることができる題材として，工夫計算を取り上げる．工夫計算とは，計算の工夫により容易に計算できるようにする計算方法であり，工夫のための計算順序の変更や数の分解合成は，数式を構造的に捉えることを求める操作といえる．しかし，計算の工夫は，計算する上では必ずしも必須でなく，左から順番に計算手続きを遂行すれば正解を算出できる．その場合，計算手続きとしての数式読み取りにとどまり，構造的に読み取ることにつながらないので，数式を構造として捉えるためには，計算の工夫を必須とする学習法が必要になる．本研究では，ある計算の工夫ができる計算問題を作る作問学習を行うことで，計算の工夫を必須とし，工夫計算を，数式を構造的に捉えるための学習課題として扱えるようにした．

因数分解は数学を学ぶ上で基本的な学習課題とされているが，因数分解を最初に習う中

学生，および高校生に関しても，その習得は必ずしも十分ではない事例もあるとされ，大学生に関しても，中学生レベルの問題でなければ正答困難な者も多くいることが報告されている．因数分解ができない学習者の特徴のひとつとされるのは，公式の使い分けができないことであるが，公式は因数分解の解法といえるので，公式の使い分けの難しさは，解法同定の難しさと考えることができる．解法同定の習熟には，解法を用いて問題を解くだけでは不十分であり，問題を作ることが，解法同定のための問題の構造化過程と捉えられることから，その不十分さへの対応となり得るとされている．このように，因数分解の公式のような数学の数式は，構造として捉える必要があり，構造としての理解をより促進するために作問を行うことは意義がある．ただし因数分解では解答の式を展開して問題とできるため，構造的な理解の促進につなげるには，展開による作問を防ぐ作問学習が求められる．本研究では，数学の因数分解を取り上げて，構造として捉えることをより促進するために，再構成法としての作問学習を適用し，因数分解できない問題を因数分解できるように変形する作問学習にすることで，展開による作問を防止し，因数分解を，数式を構造的に捉えるための学習課題として扱えるようにした．

以上の考察に基づき，本研究では，数式を構造的に捉えるための学習課題として，算数の工夫計算と数学の因数分解を取り上げ，学習法として，問題を解く学習ではなく，問題を作る学習である作問学習が行える学習環境をシステム化した．設計・開発したシステムは，工夫計算作問学習システムと，因数分解作問学習システムの 2 つである．これらは実際の教育現場で実践的な利用を行ったので，その結果を報告する．

本論文の内容は以下の通りである．

第 1 章では，本研究の背景，目的と意義について述べる．

第 2 章では，関連研究について述べる．

第 3 章では，工夫計算作問学習システムについて述べる．設計・開発したシステムは，ある計算の工夫の仕方があるとして，同じやり方で解ける計算問題を作るという作問学習を行うことができる．小学校算数の授業を通じて，授業と連動する形で実践的に利用が行えたことが確認でき，また，プレテスト，ポストテストから，学習者の計算方法に変化を与えたことを示唆する結果を得たので，その結果について報告する．

第 4 章では，因数分解作問学習システムについて述べる．設計・開発したシステムは，ある公式が使える因数分解の問題を作るという作問学習を行うことができる．教育現場での実践的利用に先立ち，大学生を対象とした実験的利用を通じて，システムが利用可能であること，大学生対象ではあるが学習効果もあることが確認できた．中学生を対象とした実践的利用では，中学生に実施可能な演習であることが確認でき，また，学習課題としての因数分解の難しさによると考えられるシステム利用成績が得られたので，その結果について報告する．

第 5 章では，上記の研究のまとめを行う．

目次

図目次

表目次

1. 序論

情報工学の技術を用いて，学習活動を計算機により支援する取り組みは 1970 年代から始まり，現在も活発な研究が行われている研究分野である．中でも人工知能からの取り組みは早くから注目されており，機械学習等の統計的な人工知能を用いるアプローチと，知識工学等の記号的な人工知能を用いるアプローチがある[1]．後者のアプローチは，教材の意味的構造の学習者による理解を重視し，その理解を促進する上で，その構造を計算機処理できるようにするための記号的記述を試みるものである．本研究は，後者のアプローチに基づき，算数や数学の数式を構造として理解させるために，要求に応じた数式を作る作問学習[2][3]を，学習者に組み立てさせる再構成法[1]を用いて実現したものとなる．

学習対象を意味的な構造の記述として表現し，学習者に情報構造を組み立てさせる再構成法は，分割された各々の部分を組み合わせることを通じて理解を深めることができるとされ，構造をもつ対象を理解する上で有力な学習法とされている．再構成法を用いた作問学習はこれまでにも算数や数学の文章題を中心として活発な研究が行われ，システム化，教育現場での実践的利用の例があり，学習効果も確認されている[4][5][6]．本研究では，算数や数学の数式においてもその構造が重要であり，数式の深い理解のためには，数式を計算手続きでなく構造的に捉えることが必要になると考えた．数式の作問を行うことは，数式を構造的に捉えて再構成することといえるので，数式の構造的な理解の促進につながると考えられるが，算数・数学における数式を対象とした作問学習環境のシステム化，教育現場での実践的利用はこれまで行われていなかった．

文字式の学習は数学導入段階において重要とされているが，その難しさについては様々に述べられており，算数から数学への接続におけるギャップが指摘されている[7][8][9][10][11]．これらの報告において，文字式の学習の難しさのひとつとして指摘されているのは，算数と数学とで，数式の読み取り方が，計算手続きの記述としての読み取り方から数量関係を表したものとしての読み取り方に変わることである．Booth[7]によれば，算数では，正解の算出が活動の焦点になるが，数学では，手続き・数量関係を式に表し，操作することが焦点になる．三輪[8]によれば，算術的な見方に固執するとき，文字式 a＋b が過程と所産の両方を表すことに強い抵抗を感ずる．これは，算数において，3＋5＝8 のような計算練習ばかり行っていると，「+」は加算せよという指令，「=」は解答を書けという指令と受け止めるようになってしまい，例えば a＋b を，a と b を足し合わせたものとして扱うことができず，a＋b のまま取り扱うことがなかなかできないことということができる．数学での数量関係理解にはそれらをまず算数の中で理解している必要があるという指摘[11]からも，数学で数式を数量関係の表現として読み取るには，まず算数において数式を数量関係の表現として読み取る必要があると考えることができるが，算数では，計算は多くの場合計算手続きとして教えられており，数量関係の表現として読み取ることにはつながりにくかっ

たといえる．

しかしながら，算数の計算問題でも計算手続きとしてのみの理解だけで十分というわけではなく，工夫計算と呼ばれる単元では，数式を数量関係を表したものとして構造的に読み取り，等価変換して，計算しやすくすることを求めている．一般的には工夫計算は，計算の工夫によって素早く間違いのない計算をする計算方法とされており[12]，高速計算手法という捉え方をされているが，数式の構造操作を必要とする算数の学習課題と考えることができる．例えば，$48\times3+48\times7+48\times10=1060$ という計算問題は，左から順に計算すると複雑な計算をしなければならないが，48 と何らかの数をかけたものを，足し合わせた数式になっているという構造を使って，$48\times3+48\times7+48\times10=(3+7+10)\times48$ とすると計算しやすくなり，計算しやすくするための変形は，数式の構造を用いた操作ということができる．工夫計算の指導はいくつかの実践例が報告されており[13][14][15][16]，一定の学習効果がみられている．しかしながらこれらの報告では，工夫計算指導上の問題として，工夫すれば容易に解ける問題でも工夫せずに解いてしまうこと，抽象的な方略指導では工夫して計算することができない学習者が多いことを指摘している．

因数分解は数学を学ぶ上で基本的な学習課題とされているが[17][18][19]，学習困難を生じている学習課題であることも指摘されている．因数分解の学習上の難しさとして指摘されていることのひとつは，因数分解の手法を問題に応じて使い分けることができないことである[17]．各種公式群を因数分解の手法とすれば，因数分解が苦手な学習者は，公式を問題に応じて使い分けることが難しいということができる．公式は因数分解の解法といえるので，因数分解の難しさは解法同定の難しさと考えることができる．解法同定の習熟には，その解法を用いて問題を解く練習が通常行われるが，それだけでは不十分であり，解法同定の過程は，解法の同定を目的とした問題の構造化の過程として捉えられるとされていることから[21]，作問はその不十分さへの対応となり得る．このように，因数分解の公式のような数学の数式を深く理解するためには，手続きとしてではなく構造として捉える必要があり，構造としての理解をより促進するために，数式を学ぶ上で作問学習を取り入れることは意義がある．

しかしながら，少数の実践例を除いて，因数分解の学習に作問を取り入れることは普及しているとはいえない．数学の授業の中で因数分解の作問をさせた実践例[22]はあるが，学習者が作成した問題を見ると，特定の公式が使える問題が多く作られているなど，作成された問題に偏りがみられる．また，極端に大きな数を使っているなどのことから，因数分解の結果としての数式を先に作り，それを展開して作問したと考えられる問題もある．この実践例では紙面上で自由に因数分解の問題作りをさせており，どのような問題を作るのかの指示や制約はなく，作った問題に対する診断・フィードバックも即時的には行えない．このため，公式を解法としてもつ因数分解の作問学習としては不十分と考えられ，公式の深い理解につながる学習になっていないといえる．

以上の考察に基づき，本研究では，算数・数学における数式の構造的理解の促進を指向し，

数式を構造的に捉えることが求められる学習課題として，算数の工夫計算と数学の因数分解を取り上げて，数式を対象とした作問学習環境をシステム化した．設計・開発したシステムは，工夫計算作問学習システムと，因数分解作問学習システムの 2 つである．

工夫計算作問学習システム[23][24][25]は，様々にある工夫計算のうち，ある計算上の工夫があるとして，その工夫の仕方が使える計算問題を作る作問学習を行うことができる．本システムによる演習は，工夫計算の例題を解く演習と，例題と同じ工夫の仕方が使える計算問題を作る作問演習，さらに，例題と同じ工夫の仕方が使えない計算問題を作る作問演習から構成される．工夫計算指導上の問題として指摘されているのは，工夫すれば容易に解ける問題でも工夫せずに解いてしまうこと，抽象的な方略指導では工夫して計算することができない学習者が多いことであるが，本システムによる演習では，まず工夫計算の例題を提示し，それを解かせることで，工夫して計算する仕方を習得する．次に，計算の工夫の仕方の理解が必須となる演習として，その工夫の仕方が使える計算問題を作る．最後に，その工夫の仕方が使えない計算問題を作らせる．これらの演習を通じて，計算の工夫が数式に対してなぜ適用できるのかを理解し，数式を構造的に捉えることを図る．

因数分解作問学習システム[26][27]は，ある公式が使える因数分解の問題を作るという作問学習を行うことができる．先行研究における因数分解作問学習の問題点として，公式の適用を意識させられていないこと，展開による作問を防止できていないことがあげられるが，本システムによる演習では，因数分解できないようになっている数式を，ある公式を適用して因数分解できるように変形するという作問を行う．こうすることで，公式の適用を学習者に意識させるとともに，展開による作問を防止して，作問学習の意義を保った上での因数分解の作問学習を実現している．

以下，第 2 章では，関連研究について述べる．第 3 章では，算数工夫計算作問学習システムの設計・開発，小学校における実践的利用について述べる．第 4 章では，因数分解作問学習システムの設計・開発，大学生を対象とした実験的利用，中学生を対象とした実践的利用について述べる．第 5 章で，これまでの研究をまとめる．

2. 関連研究

2.1. 対象構造の再構成法としての作問学習

平嶋[1]は，ICT の学習，教授への活用においては，意味的な構造の記述といった知識工学的な側面としての人工知能的なアプローチが重要な役割を果たすとし，意味的記述に基づいた，学習対象の構造を組み立てる学習法を，「構成することによる学習」として，学習支援に取り入れる上での重要性について示すとともに，算数文章題，力学の問題，概念マップを対象とした研究事例を具体例としてあげている．平嶋[2]では，問題を解く演習では，学習者に与えられる問題は，学習対象の解法を使えば解ける問題であるため，なぜその解法が適用可能かを必ずしも考える必要がないので，解法は使えるが，それ自体については理解していない状態にしばしば陥ることを指摘し，問題を作ることは解法の再構成を促す作業であるので，作問学習が学習対象に対するより深い理解をもたらすことを述べている．平嶋[3]では，問題を組み立てることを学習として成立させるために行ってきた研究について示し，対象の構造の再構成をすることの学習効果について述べている．

再構成による学習は，各種学習課題に対して研究例がある．算数文章題では，横山ら[4]，倉山ら[5]，山元ら[6]による，単文を書いたカードを取捨選択し，組み合わせることで問題を作成する，単文統合型の作問学習システムがある．これらのシステムは小学生を対象として授業内で実践利用されており，システムによる作問学習が小学生にとって実行可能で，学習効果があることを示唆する結果が得られている．山元ら[28]による算数三角ブロックシステムは，算数文章題の問題解決過程で最も重要とされる統合過程をモデル化し，操作・組み立て可能としたものである．このシステムは小学生を対象に授業内で実践利用され，さらに青谷[29]により，中学校における数学文章題指導での活用もされている．また，平嶋ら[30]により，あらかじめ部品として与えられたノードとリンクを組み立てて概念マップを構成する，キットビルド概念マップシステムが開発されており，小学校理科の授業内で実践利用を行い，利用前後のテストにおいて学習効果が示唆されることが確認されている．

竹中ら[31]による，これまでの作問学習に関する調査の通り，作問学習は様々な学習課題に対して実績がある．中野[32]は，計算指導の目的として，計算ができるようにさせることと，計算の意味や理由を理解させることの 2 つを示し，数学的構造を意識させることによって，計算の理由を発見させる指導の重要性を示している．算数，数学の数式は構造をもつ学習課題といえるので，数式の構造を再構成させる作問学習を行うことができれば，構造的理解の促進が期待されるが，数式の作問学習の研究例はこれまでにみられていない．

2.2. 文字式の学習困難と算数工夫計算の学習

算数において数式は計算手続きの記述として教えられており，教わる側もそのように理

解していることが指摘されている．Booth[7]は，算数では数値の解答を算出することが活動の焦点になるとしている．三輪[8]は，3+5=8 は，3 に 5 を加える過程が 8 という結果を生むというように見られることがあると述べている．須田[9]は，小学校では原理の理解よりも，速く正確に計算することが重視されているとして，算数において数式が手続きとして扱われていることを示している．

中学校で数学文字式を学習し始めると，文字式は計算手続きでなく数量間の関係として理解することが必要になるが，算数とは数式の取り扱いが変わるために多くの学習者はつまづきを生じる．Booth[7]によれば，算数では数値の解答を算出することが活動の焦点になるが，代数では数量関係を式に表し操作することが焦点になるにもかかわらず，数値の解答を算出しようとして間違った式変形をしてしまう．三輪[8]は，数学文字式に対して算術的な見方に固執するとき，文字式 a+b は過程と所産の両方を表すと考えることがなかなかできないとしている．また三輪[10]は，算数では等号の左側は過程，右側は結果を示すと認識し，両辺が等しいと認識しないことがあり，文字式における多くの間違いが算数の学習からもたらされると述べている．清水[11]は，数学での数量関係理解にはそれらをまず算数の中で理解している必要があり，それが不十分なために，数学での問題解決が困難になる場合があるとしている．このように，算数から数学に移行するにあたり，数式の取り扱い方が計算手続きの記述から数量関係への理解へと変わっており，この変化がギャップとなって，数学文字式の学習困難が生じていることが指摘されている．

このようなギャップを緩和・解消するには，算数の段階で数式の構造操作を学んでおくことが有力な方法となる．本研究では，算数の段階で数式の構造操作を学べる学習課題として，工夫計算を取り上げた．工夫計算とは，千賀[12]があげているように，計算順序の変更や数の合成，分解を行って速く容易に計算する方法である．工夫計算指導の研究例としては，植坂ら[13]，鈴木ら[14][15][16]の例がある．これらの例では，工夫計算の指導に関して一定の効果が報告されているが，課題もあり，工夫すれば容易に解ける問題でも工夫せずに解いてしまうこと，抽象的な方略指導では工夫して計算することができない学習者が多いことが指摘されている．筆者らの研究[23][24][25]で設計・開発した工夫計算の作問学習システムは，工夫計算の指導に作問学習を適用して，これらの問題点を解消したものである．

2.3. 因数分解の学習に関する先行研究

因数分解は数学を学ぶ上で重要な学習課題とされており，南郷[17]，秋田県総合教育センター[18]の指摘はその例である．根本[19]は因数分解の意義について，方程式を解く上で必要なだけでなく，構造変換である式変形を通じて新たな発見につながることを指摘している．しかしながら，これらの報告では同時に，因数分解の習得は必ずしも十分でないことについても指摘がある．中村[20]の報告では，大学生であっても，中学生レベルの問題でなければ正答が難しい者も多くいることが述べられている．

因数分解の学習上の困難さとして，南郷[17]は，因数分解の手法を問題に応じて使い分けることができないことをあげている．因数分解の手法を基本公式群とすれば，公式を問題に応じて使い分けることの難しさが因数分解の難しさとなるが，公式は因数分解の解法といえるので，因数分解の困難さは解法同定の難しさと考えることができる．解法同定過程の習熟促進には，学習対象の解法を用いて問題を解く練習が通常行われるが，それだけでは不十分であり，問題を作ることがその不十分さへの対応となり得ることは様々に指摘があり，平嶋[21]の研究で，解法同定の過程は，解法の同定を目的とした問題の構造化の過程として捉えるとしていることはその例である．

因数分解の指導に作問を取り入れることは普及しているとはいえない．沖山[22]は問題を作ることが因数分解の仕組みの理解につながると考えて，中学生を対象に，数学の授業の中で因数分解の作問学習を実践しているが，因数分解の作問学習の実践例はこのほかには見当たらない．沖山[22]の実践例のような，作る問題に特に制限を設けず，紙面上で自由に因数分解の問題作りをする場合の問題点として，公式の適用を意識させることが難しいこと，作問学習で重要となる診断・フィードバックを即時的に行えないこと，さらに因数分解特有の問題として，先に解答の数式を作り，それを展開しての作問ができてしまう点があげられる．筆者らの研究[26][27]で設計・開発した因数分解作問学習システムは，これらの問題点を解消し，因数分解の作問学習を有効に行えることを目指したものである．

3. 算数工夫計算作問学習システム

3.1. まえがき

本章では，算数計算式に対する構造的理解を促進することを指向して設計開発した工夫計算を対象とした作問学習システムと，その実践的利用の結果に関して報告する．

算数計算式は本来，計算の手順と数量間の関係の両方を表している．しかしながら小学生の多くは，計算の手順としてのみ理解していることが報告されている[7][8]．計算の手順とは，加減乗除の演算記号に従って解答を算出するための計算手続きであり，計算の手順としての理解の範囲では，式を左から順番に見て，加減乗除の演算の種類，括弧の有無を判断し，手順通りに計算を行えば正解を出すことができる．小学校では原理の理解よりも，計算を速く，誤りなく行うことの方が重視されている[9]という指摘があることからも，算数計算問題の学習では，計算式を計算の手順として捉えることが重視されてきたといえる．

ところが，中学校での文字式においては，文字で表された数量間の関係を表すものとして式を理解することが求められる[10][11]．例えば a＋b＝c は，a に b を加えたものが c に等しいことを表している．これは，数式の左辺を過程，右辺を結果とみるのではなく，両辺が等しいものとして扱うことであり[8]，等号は解を書くシグナルではなく等価関係を示すものとして捉えることである[11]．計算式に対するこのような理解を，本章では構造的理解と呼ぶ．

このように，算数から数学への移行に際し，数式に対して求められる理解が計算手順としての理解から数量間の関係としての構造的理解に変わることが大きなギャップとなり，学習を困難にする要因となっていることが指摘されている[7][8][9][10][11]．例えば，2a＋5b は 2a に 5b を加えるという加算手続きであると同時に，2a と 5b が加算という関係を持っていることを示している．計算手順としての理解に固執すると，加算という数量関係を表していることが理解できず，2a＋5b をさらに計算しようとして誤答してしまう[7]．このようなギャップを緩和・解消する上で，算数学習の中で計算式の構造的理解を促進することが一つの有力な方法となる．

本章では，算数の中で計算式を構造的理解の対象として取り扱いを学ぶことができる題材として，「工夫計算」を取り上げる．工夫計算とは，計算の仕方を工夫することによって素早く間違いのない計算をする計算方法[12]であり，一般的には高速計算手法として理解されている．この工夫計算を行うためには，計算順序変更や数の分解合成を行う必要があり，計算式を構造的に捉えることを必要とする課題であるといえる．例えば，「2×7×3＝2×3×7」や「48×3＋48×7＋48×10＝(3＋7＋10)×48」といった計算順序変更を行うために必要なのは，計算式を数量関係と捉えた上での構造操作である．また，「18＋3＝(18＋2)＋(3－2)」や「18＋3＝(20－2)＋3＝20＋(3－2)」といった工夫計算は，いずれも 10 に対する 8 の補数が 2 で

あるという関係を使った操作であり，構造操作であるといえる．

工夫計算は教科書においても分量は多くないものの取り入れられており，教える対象となっているが（後述の本システムを用いた実践が行えたのは教科書でも教える対象となっているからである），工夫を加えれば容易に解ける問題であっても，工夫せず手順通りに解く，あるいは反射的に筆算を行ってしまう学習者が多くいるということが指摘されている[13]．工夫計算を習得させるための指導を行い，一定の効果をあげている研究例も報告されており[14][15]，これらの研究例では，工夫計算指導にあたり，式全体をよく見ること，計算順序を変えること等の方略とともに具体的な工夫の仕方を教えるという方法で，授業実践を行い，指導された方略の自発的な応用が可能であることを示唆する結果を得ている．しかしながら，抽象的な方略指導では対応できない児童が数多くみられ，工夫の仕方の明示的な指導が必要な工夫計算があることが指摘されている[16]．また，適切な数に分解する工夫については，抽象的な方略指導では効果が薄かったこと[15]が指摘されている．

工夫計算の学習においてこのような課題が存在するのは，計算結果としての答えを導く上では，計算式を計算の手順として捉えても大きな支障がないことが原因と考えられる．工夫計算を行うと，個々の計算式に対しては計算を単純化できるが，個々の計算式に対してどのような工夫計算ができるかを考えることが必要となる．これに対して，計算手順と考えた場合，同じ手続きを一律に実行すればよく，また，計算が複雑になったとしても筆算を用いれば記憶に対する負荷を少なくして計算できる．したがって，答えを導くことだけを目的とした場合，工夫計算を行わないことには一定の合理性があるといえる．

以上述べたことを踏まえると，工夫計算を数式に対する構造的理解の促進に有効活用するためには，計算式を構造的に操作することが必須となるような課題を設計することが求められることになる．そこで本章で述べる工夫計算作問学習システムでは，工夫計算の指導に解法ベースの作問学習を適用する．解法ベースの作問学習とは，問題に対して解法を適用して解くという問題解決演習を通した学習に対して，その解法で解ける問題を作る学習法であり，解法を適用できる問題の構造を理解させる上で効果的な学習法とされている[4][33][34][35][36][37][38][39]．

工夫計算を対象とした作問学習とは，様々にある工夫計算のうち[12]，ある計算上の工夫があるとして，その工夫の仕方が使える計算問題を作ることである．工夫計算における工夫の仕方は，数式における構造操作に対応しているので，工夫できる計算問題を作ることは，式の構造操作になっている．例えば，前述の補数を用いる工夫計算を考えた場合，これを作問するためには，工夫計算の構造操作と同等のことを行うことが求められる．また，この工夫計算を処理手順としてのみ理解しているような場合は，処理手順としては適用可能であるが，工夫計算としては不適切な作問を行ってしまうことになる．例えば，12＋5＝12＋(10－5)，といった場合である．本演習システムでは，このような作問の誤りを診断・フィードバックする機能を実装している．なお，作問学習は様々な対象に対して行われているが，工夫計算を対象とした研究はこれまでの著者らの研究[23][24][25][40][41][42]以外は見当たら

ない．

以下本章では，工夫計算を対象とした作問学習システムの設計開発とその実践的利用，および工夫計算としての学習効果の分析について述べる．本研究の目的は，学習者による数式に対する構造的理解の促進，およびそれに基づく算数と数学の式に対する理解のギャップの解消にあるが，本章の範囲では，工夫計算に関しての学習効果を分析したまでの段階であり，構造的理解やギャップ解消に対する直接的貢献の分析は今後の課題となる．

3.2. 工夫計算の作問学習とシステムの設計

開発したシステムでは，本研究で考案した工夫計算作問学習を行えるようになっており，(1)計算演習，(2)工夫計算演習，(3)工夫計算作問演習，(4)工夫計算作問演習(負例)の 4 種類の演習について，システムによる例題の提示，学習者による解答の入力を実施できる．取り扱える工夫計算は約 30 種類あり，授業の内容，学習者のレベルに応じて組み合わせることが可能である．

本研究で考案した工夫計算作問学習の構成を図 3.1 に示す．最初に行うのは，計算演習である．計算演習は，正解を求めることができればよい演習である．解き方の例は提示せず，どのように解いたかも問わない．この演習は，以降で行う演習に先立ち，工夫計算の効果を学習者がより理解できることを目的として行う．

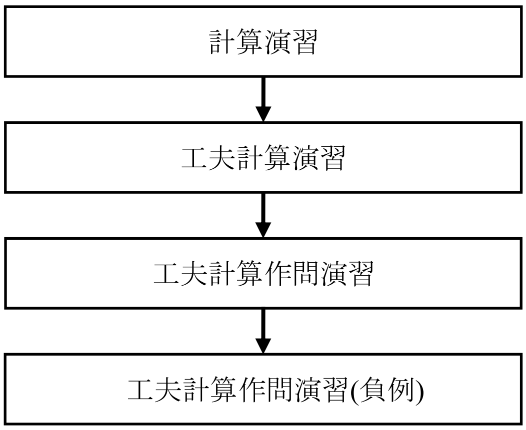

図 3.1　工夫計算作問学習の構成

次に，工夫計算演習を行う(図 3.2)．工夫計算演習は，正解を求める際，例題として提示した工夫計算方法に従って計算することが必要とされる演習である．例をあげると，「99+5」の工夫計算は「99+5=(99+1)+(5-1)=100+4=104」となり，途中の計算過程(「(99+1)+(5-1)」「100+4」)と，最終解答(「104」)の両方が正しくなければならない．この演習は，例題に従って計算することで，学習対象の工夫計算が使えるようになることを目的として行う．

これは，例題を参照しながら解法を学ぶ例題ベース学習[43][44]となるが，意味を考えずに表面的な真似だけを行ってしまう可能性があるため，なぜその解法が使えるかを説明させることが重要とされている．本研究における作問演習は，この説明に対応する段階であり，例題を表面的に真似るのではなく，構造として例題の式を認識させることを促すためのものとなる．

3 番目の工夫計算作問演習は，解法ベースの作問を実施する演習である(図 3.3)．学習対象の工夫計算の方法(解法)を例題として提示し，学習者は，その解法が使える問題を作成する．作成した問題は，問題そのものと途中の計算過程，最終解答のすべてが正しい場合，正解とする．例をあげると，「18+3」と同じ解き方ができる工夫計算問題は，一の位で繰り上がりが生じる 2 桁＋1 桁の足し算であり，例えば「18+4」である．作成した問題，計算過程と最終解答を含めて「18+4=(18+2)+(4-2)=20+2=22」の形で作成することが，演習の答として求められる．

ここで，学習者が例題の表面的な真似だけを行っている場合，「18+1」のように工夫できない問題を作成してしまうことが予想される．例題と同じ解き方ができる問題を作成していれば，例題を構造的に捉えていることが示唆される．

最後の工夫計算作問演習(負例)では，工夫計算作問演習とは異なり，ある解法が使えない問題を作らせる(図 3.4)．この例では，例題「18+3」に対して「18+1」のように，ある工夫計算が適用できる例と適用できない例を作らせることで，それらの条件の違いを意識することが求められることになり，工夫計算をより構造的に捉えることが促せると考えている．なお，工夫計算作問演習(負例)では，対象となる工夫計算が使えない問題の作問となるため，計算過程を解答させることは行わない．

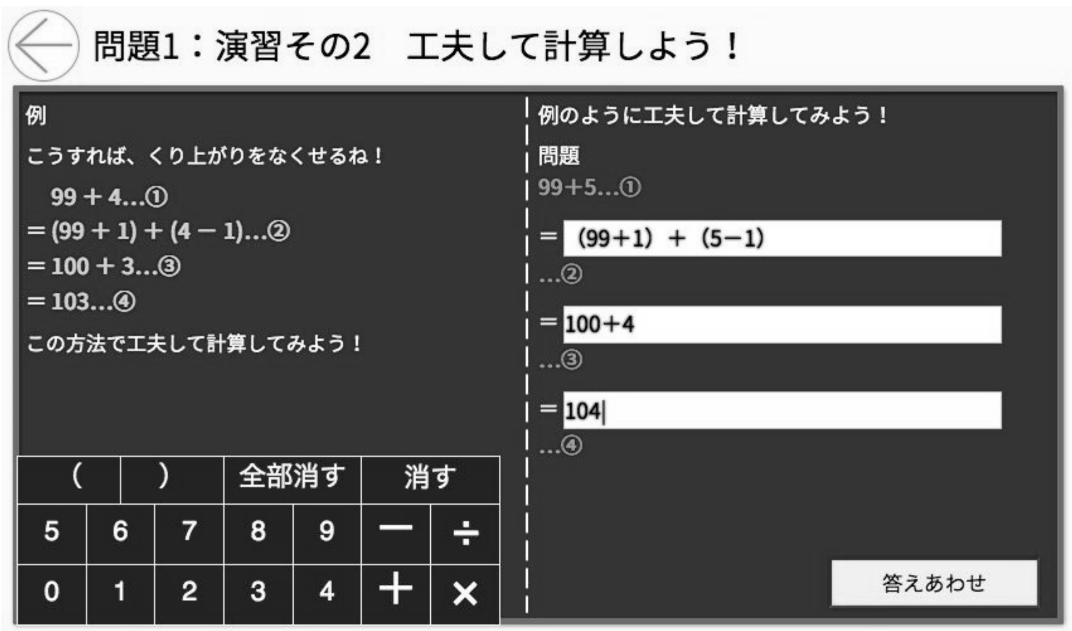

図 3.2　工夫計算演習

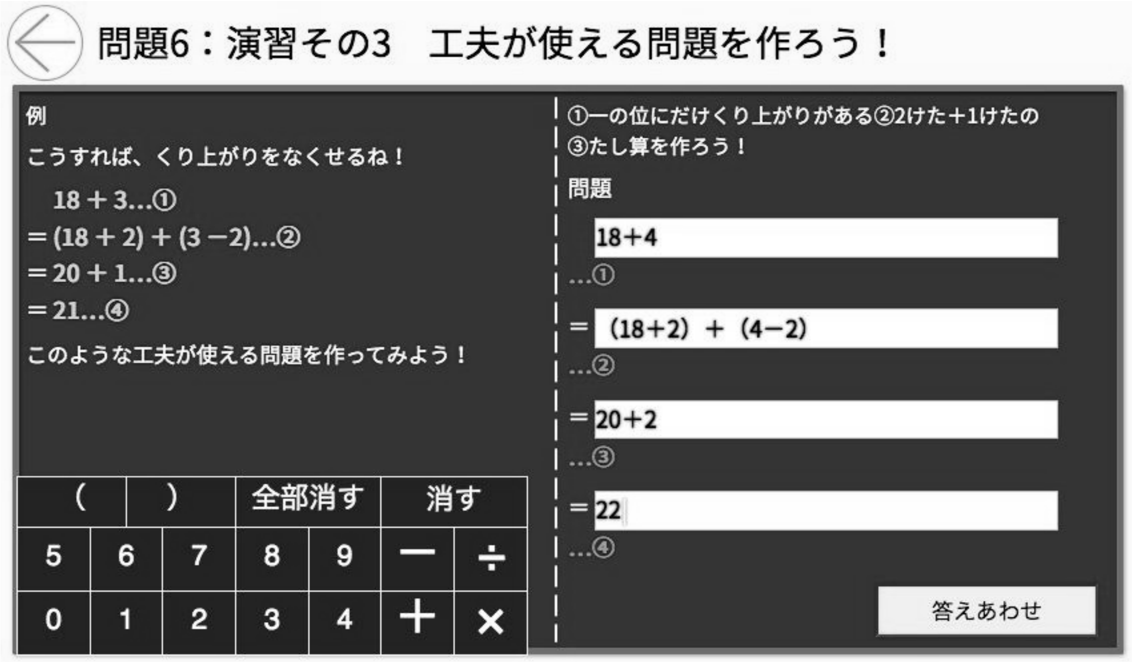

図 3.3　工夫計算作問演習

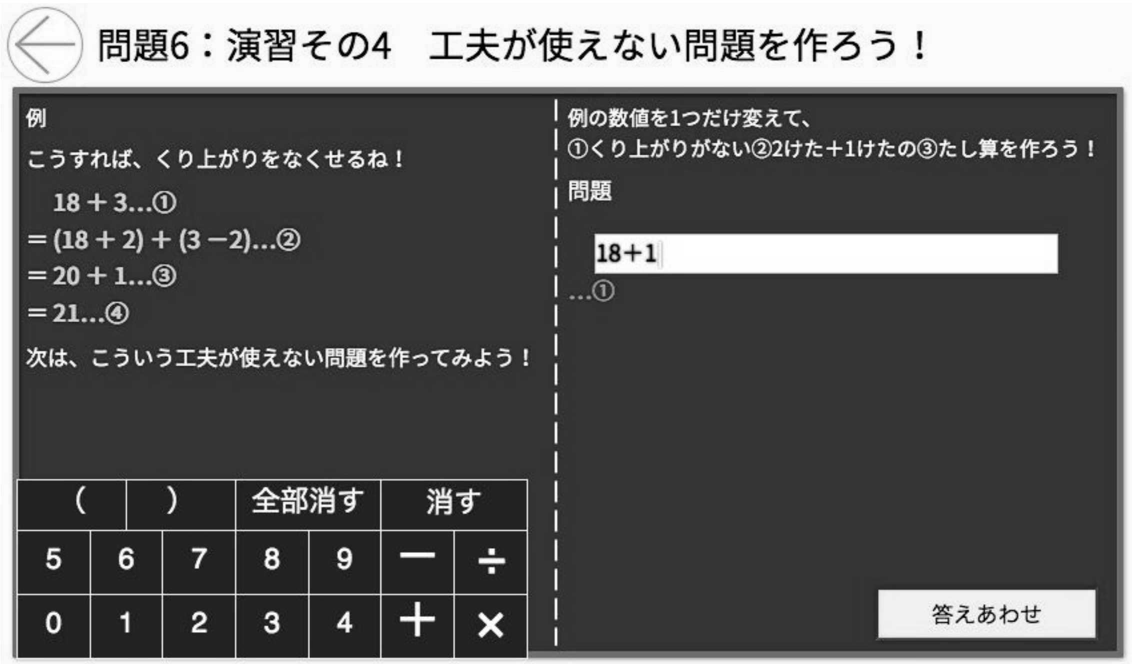

図 3.4　工夫計算作問演習(負例)

図 3.5　フィードバック例

各演習においては，学習者が入力した解答に対して，システムにより自動的に正誤判定が行われる．さらに，正解の場合は正解であること，誤りの場合は，その誤りの内容に従ったフィードバックをシステムがインタラクティブに返す．図 3.5 は誤りのフィードバック例である．問題「99+5」について，例題どおりの解き方「99+5=(99+1)+(5-1)=100+4=104」とは異なる解き方，例えば「99+5=(99+1)+4=100+4=104」と解いたときにシステムが返す応答「例題の解き方通り解いていない式があるよ．例題のやり方をもう一度見直そう．」を示している．

以上に示す，システムによる工夫計算学習過程は，後の分析のためにログとしてサーバ内に保存される．例えば，問題「99+5」を例題どおりに解いて正解した場合は，4 つのログ(1)「99+5」(2)「(99+1)+(5-1)」(3)「100+4」(4)「104」が，それぞれ正誤判定とともに保存される．これにより，学習者の学習過程を追跡することが可能である．

システム構成としては，クライアントにタブレット，サーバにはノートパソコンを用いる．クライアントはユーザインターフェイスを表示し，サーバは問題の提示，フィードバックの返却，学習記録の保持を受け持つ．各児童が持つタブレットと，サーバであるノートパソコンを無線 LAN ルータを使用して接続しネットワークを構築することで，教室内で授業と連動したシステム利用が可能である．

ユーザインターフェイスは JavaScript による Web アプリケーションである．サーバシステムは Web サーバに Apache，DB に MySQL を使用し，問題提示等のサーバ側処理は PHP で実装した．

3.3. システムの利用

3.3.1. システム利用授業の構成

対象者は広島市内の公立小学校 6 年生 3 クラスの児童合計 78 名である．クラス別の人数は，1 組が 25 名，2 組が 27 名，3 組が 26 名であり，それぞれ 1 時限のシステム利用の授業を行った．児童は過去にタブレット利用による文章題の作問学習の経験があったが，本システムの利用は初めてである．

授業利用に際しては，まず授業を担当する算数専科の教員と相談を重ね，システムの基本的な考え方について合意をした上で，その上でどの学年に適用するかについて話し合いを行った．候補として，工夫計算を初めて習う 4 年生，中学校・文字式への橋渡しとなる 6 年生が検討されたが，(1)児童にとっても教員にとっても新しい試みとなること，(2)導入的なものではなく，すでにできていることの深い理解を促すものであること，(3)主たる課題が作問，特に負例の作問というある程度メタ認知能力を求められると予想される課題であることの３点を踏まえ，6 年生での適用が妥当との結論に至った．

授業で扱った計算問題を表 3.1 に示す．1 時限で扱える分量を考慮し，全部で 8 問の問題を用意した．問題 1 から問題 5 は計算の演習として，演習 1(計算演習)，演習 2(工夫計算演習)を行う．問題 6 から問題 8 は作問の演習として，演習 3(工夫計算作問演習)，演習 4(工夫計算作問演習(負例))を行う．

対象児童は小学 6 年生であるため，ある程度計算力があることが確認できているが，本授業にあたっては，計算の復習という形をとり，一の位に繰り上がりがある，2 桁＋1 桁の足し算を取り扱うこととした．2 桁＋1 桁の足し算の，繰り上がりを簡単にする工夫計算を取

表 3.1　システム利用の授業で扱う計算問題

演習分類	問題	例題	児童が行う演習
計算演習	1	99＋4	演習 1(計算演習) 演習 2(工夫計算演習)
	2	199＋4	
	3	197＋4	
	4	196＋7	
	5	196＋1	
作問演習	6	18＋3	演習 3(工夫計算作問演習) 演習 4(工夫計算作問演習(負例))
	7	86＋5	
	8	196＋5	

り扱うことにした理由は，参考文献[12]でも，各種工夫計算のうち，最初に取り上げられていることからもわかるように，足し算において繰り上がりを簡単にする計算は様々な工夫計算の中でも基本となる計算と考えられること(ただし簡単化のため, 足す数は1桁とした), また，一目で工夫計算の問題とわかるような特殊な計算と異なり，通常の計算と変わらない計算であることから，計算問題を作らせるのに適していると判断したためである．

なお，18+3=(18+2)+(3-2)でなく 18+3=18+2+1 とすれば計算の個数が減ってより簡単になるという考え方もある．しかしながら,「2」や「1」がどのように算出されたかを考えると，3 から 2 を減算した結果にほかならない．したがって，計算プロセスをたどれば，本研究で示す計算方法と同一ということができる．

ところで，繰り上がりという言葉を厳密に捉えれば 18+2 は一の位の和が 10 なので繰り上がっているが，繰り上がりのある足し算として出題される計算問題に 18+2 のような問題があることは少なく，また児童にとってのわかりやすさも考慮し，本研究においては繰り上がりを簡単にする工夫計算という呼び方をした．

3.3.2. 授業実践方法

1 時限の授業の構成は，クラスによって多少の時間差があるが，(1)5 分程度の導入，(2)担当教諭による工夫計算の説明(システムで用いる一例を黒板で説明，5 分程度），(3)システムを利用した工夫計算作問演習(30 分程度)，(4)システム利用に関するアンケート記入(5 分程度)，である．

システムを利用した工夫計算作問演習は，担当教諭の指示に従って，クラス全員が 1 問ずつ演習を行うことから開始し，その後，指示なしで各児童に独力でシステム利用をさせた．児童のシステム利用のサポートは，担当教諭，および，3，4 名の TA が行った．担当教諭は，黒板による解説の終了後，児童にシステム利用をさせ，学習中の児童を見回りながらサポートを行っていた. TA は 1 時限の授業時間全体を通じて参加し, 随時サポートを行った．

サポート実施のタイミングは，操作に迷った場合などシステムに関して児童から質問があった場合，あるいは，システムによる作問に児童がなかなか成功しない場合などである．サポートの内容は，次に進むための操作等のアドバイス，システム画面に提示されている例題と児童が入力した計算式の相違点の説明，作問失敗時にシステムが返すフィードバックについて，失敗と判定されている理由の説明などである．

3.3.3. システム利用状況

今回のシステム利用では，前半の計算演習 5 問，後半の作問演習 3 問の全 8 問を用意した．前半の計算演習 5 問は授業の進行にあわせて教員の指示で演習を行わせたので，すべての児童が最終問題の問題 5 までの演習を実施できている．後半の作問演習 3 問は児童が独力でシステム利用をしたため，到達度に差があるが，児童全体でみると，91%の児童が最終

問題の問題 8 まで到達していた．クラス別では，対象児童 3 クラスのうち，1 クラスについては，全員が最終問題まで到達した．残り 2 クラスについても，それぞれ，81%，96%の児童が，問題 8 まで到達した．

本演習では，学習者の解答は即時的に診断され，間違っている場合には再度解答を行わせるようになっている．演習別の正解までに要した回答数(以下，要解答数と呼ぶ)は，演習 1 から演習 4 までの 4 つの演習について，1.11，1.28，1.43，1.24 であった．要解答数は，演習 1，演習 2，演習 3 の順で増加しているが，これは，演習 1 は工夫なしの計算問題のため，正しい答を求めることができれば正解であること，演習 2 は工夫計算の演習であるため，答が正しいことに加えて，正しく工夫できている必要があること，演習 3 は工夫計算の作問であるため，工夫の方法を理解した上で，その工夫が使える問題を作る必要があること，というように演習 1，演習 2，演習 3 の順で難易度が上がるためと考えられる．演習 4 は，計算過程の解答は求められないため，演習自体の難易度は計算演習である演習 1 に近いと考えられ，要解答数も演習 1 に近くなっていると推察される．なお，本システムでの学習は，選択肢から正解を選ぶ方式ではなく計算式や解答を直接入力する方式であり，授業利用での要回答数からは，ランダムな解答はなされていないことが推定できる．

要解答数を問題別にみると，問題 6 の要解答数が 1.545 と他の問題に比べて多くなっていたが，問題 6 は作問演習の最初の問題であり，課題の内容が変化しているための増加と考えられる．

今回のシステム授業利用では，授業の進行に応じて学習させるため全 8 問の問題を用意したが，90%をこえる児童が最終問題の学習まで到達していた．各問題の要解答数が 1.11 から 1.43 であることからも，システムによる工夫計算作問学習を児童が無理なくこなせたと判断できる．

3.3.4. アンケート結果と教師の感想

児童に対するアンケート項目を表 3.2，アンケート結果を図 3.6 に示す．システム利用対象児童 78 名のうち，不備，欠席を除いた 74 名を有効データとした．アンケートの質問項目は 7 個で，Q1 から Q6 の質問に加え，システムを利用しての感想，よかった点あるいはよくなかった点について，自由記述の形で児童に意見を書かせた．

アンケートの結果をみると，Q1 から Q6 の質問項目すべてにおいて 80%以上の児童から肯定的意見が得られている．このことから，本システムを利用した工夫計算作問演習が，児童に有用な活動として受け入れられたことが示唆される．

なお，自由記述の意見としては，「繰り上がりのある計算を繰り上がりのない計算にするやり方の説明があってわかりやすかったです」，「これをやると，暗算がとても簡単になってくる」，といった肯定的な意見と，「3 問間違えたら，アドバイスを書いたほうが良いと思います」などの，改善点を指摘するものとなっており，今回の活動を否定するものはみられなかった．

また，担当教員からは，(1)実際に児童が行う活動を見て，この活動が児童の学習に資することが確認できた，(2)どのクラスにおいてもほぼすべての児童が時間中集中して取り組んでいることが見て取れた，(3)同様な内容の授業を同様なレベルの集中度合いで実施することは極めて困難である，(4)したがって，今回のシステム利用は成功であったと結論付けてよい，との感想を得た．

表 3.2　アンケート項目

No.	質問内容
Q1	システムは，使いやすかった
Q2	計算を間違えた場合，どこを間違えたかすぐにわかった
Q3	計算を間違えた場合，どういう間違いをしたかすぐにわかった
Q4	システムが出す例と同じ工夫が使える計算問題を作ることは，簡単だった
Q5	例と同じ工夫が使える計算問題を作ることで，計算の工夫方法がよくわかった
Q6	システムが出す例と同じ工夫が使えない計算問題を作ることは，簡単だった

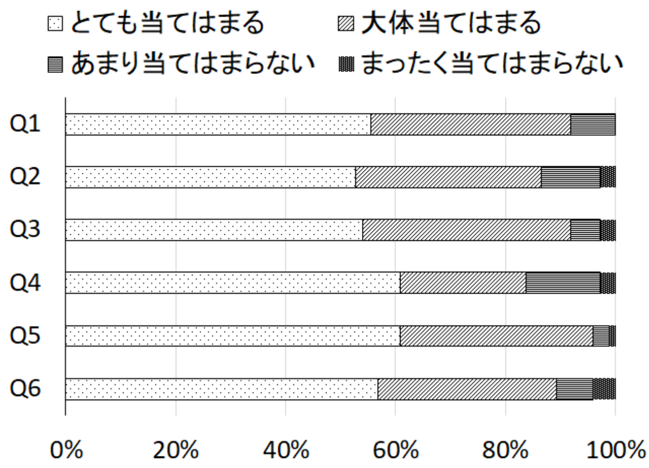

図 3.6　アンケート結果(n=74)

3.4. システムの利用効果の分析

3.4.1. システムの学習効果に対する仮説

本研究では，システムの利用によって工夫計算の学習が効果的に行えれば，計算問題において計算方法の変化が生じると考えた．計算方法の変化とは，仮説 1：工夫計算が増加する，仮説 2：筆算が減少する，仮説 3：暗算が増加する，であり，これらを本研究における仮説とする．

仮説 1 について，本システムでの学習対象は工夫計算であるため，システムでの学習実施後の変化として，計算問題を解くにあたって児童が工夫計算をより多く使用するようになることは期待される変化である．仮説 2 について，工夫計算の方法を知っていても，問題に対してその方法が適用できることに気付かずに筆算を行ってしまうことがよくあることが指摘されており[8]，本システムの利用で工夫計算を適用対象となる計算の構造を学ぶことができれば，筆算が減少することが期待できる．仮説 3 について，工夫すると計算しやすくなることの効果として，暗算が容易になることがあげられる．本研究で扱った繰り上がりのある足し算についても，工夫を加えて暗算化につなげることが可能であり[12]，暗算の増加も予想される．以上から，本研究では，システムの学習効果として 3 種類の計算方法の変化が生じることを仮説として提示する．

本研究は，学習者が計算式を構造的に捉えられるようになることを目的としている．そして，学習者が計算式を構造的に捉えることが求められる課題として，工夫計算とその作問を演習化している．したがって，測るべき学習効果は，学習者による計算式の構造的な把握度合いとなる．これを直接測る方法はないが，計算式に対して工夫計算を施していれば，構造的に捉えているということができる．また，筆算を行っていれば，構造的に捉えていない，ということができる．したがって，本演習によって計算式の構造的把握が促進されたとすれば，プレとポスト間で，工夫計算の増加(仮説 1)および筆算の減少(仮説 2)がみられると予想される．またさらに，元は複雑だった計算を簡単化することで，暗算でもできるようにすることが工夫計算の基本的な役割であるとされており[12]，工夫計算の学習結果としての暗算の増加(仮説 3)は自然なことと考えられる．なお，仮説 1 が最も直接的な指標ではあるものの，後述するように学習者が工夫計算を行ったことは，学習者の計算途中の記載から判断する必要があり，工夫計算を行っていたとしても必ずしも記載するとは限らないという問題点がある．このため，明確に判断可能な筆算および暗算の数的変化も援用して評価することとしている．

3.4.2. プレテスト，ポストテスト

システム利用は水曜日に 2 クラス，木曜日に 1 クラスで行われたが，それに先立ち，プレテストをその前の週に行っていただいた(クラスによって実施日は異なる)．プレテストは全 10 問の計算問題で，通常の小テストの一環として実施し，工夫して計算するような指示はせず，問題用紙以外に計算用紙は配らずに実施した．時間は 10 分を上限として実施したが，相当数の児童が 10 分未満で全問回答していた．

ポストテストは授業の週の次週の間にプレテスト同様の要領で実施した．プレテストでは時間に余裕がみられたため，問題数を全 20 問に増やし，プレテスト実施問題を 10 問，プレテスト未実施問題を 10 問の構成とした．プレテストで実施済みの問題については問題の順番をランダムにしている．なお，プレテストで未実施の問題についてはプレテストと共通でないため，以降の分析はプレテストと共通の 10 問についてのみ行う．

プレテスト，ポストテストの問題を表 3.3 に示す．問題は，その性質から 3 種類に分かれており，それぞれ，次を検証しようとした．(1)工夫不要問題は，繰り上がりがなく，工夫が不要な問題である．システムによる学習で，工夫計算ができる場合とできない場合がある場合の識別を意識させるようにしたので，その意識が計算のやり方に影響を及ぼすかをみる問題である．(2)学習問題は，システムで取り組んだ繰り上がりのある 2 桁+1 桁の計算問題であり，システムで学習した計算問題ができるようになったかをみる問題である．(3)転移問題は，システムで学習していない工夫計算である．テストに含めたのは，2 桁+2 桁の足し算，および，計算順序を入れかえる工夫計算であり，システムで学習した工夫計算以外の問題も工夫できるようになったかをみる問題である．

正解率は，プレテストが 97.4%，ポストテストが 94.5%であった．ウィルコクソンの符号付順位和検定を行ったところ，プレテスト，ポストテストの正解率に有意差はなかった．

表 3.3　プレテスト，ポストテスト問題

問題の分類	問題の内容
工夫不要問題(4 問)	17+2，3+27，11+12，191+4
学習問題(3 問)	86+7，98+5，197+8
転移問題(3 問)	19+17，150+37+50，19+22+18+21

3.4.3. テストにおける計算方法の変化

表 3.4 に，プレテストとポストテストでの計算方法の変化を示す．これは，各テストについて児童の解答を整理し，10 問の問題の中で筆算，工夫計算，暗算を実施している割合を算出したものである．1 名の欠席により n=77 である．

テストの実施，解答の整理は次の要領によった．テストの解答にあたっては，途中計算等を書いた場合は消さずに残すよう，担当教諭が児童に指示した．他の指示，例えば，システムで学習した解き方を使う，あるいは筆算，暗算をする等の指示は行っていない．この条件の下で，解答用紙から計算方法を調査し，明示的に筆算を用いている場合は，筆算に分類した．答のみ記述し，答以外の記述がない場合は，頭の中で計算するのが暗算であるから，暗算とした．筆算，暗算でなく，途中計算に関する何らかの記述があり，計算順序入れかえ，数の分解等，筆算のように単一の手順によらない計算をしている場合，工夫計算に分類した．左から順番に手順通りにする計算方法の途中計算を書いた児童はいなかった．上記の要領により，プレテスト，ポストテストの各計算問題の計算方法を，筆算，暗算，工夫計算のいずれかに分類した．

表 3.4 計算方法の変化(n=77)
1 人当たり計算方法使用率平均値，SD(上段:プレ,下段:ポスト)，ボンフェローニ調整済み p 値

分類	筆算	工夫計算	暗算
工夫不要問題	6.5(0.229) 2.6(0.159) p=0.5625	2.3(0.141) 1.3(0.089) p>1	91.2(0.309) 96.1(0.180) p=0.2812
学習問題	15.2(0.320) 6.5(0.234) p=0.0307	3.9(0.152) 5.6(0.224) p>1	81.0(0.389) 87.9(0.313) p=0.3433
転移問題	15.2(0.297) 6.9(0.217) p=3.5703e-03	22.9(0.305) 26.0(0.287) p>1	61.9(0.379) 67.1(0.325) p>1

表 3.4 から，工夫不要問題の計算方法変化は，筆算使用数減少，工夫計算使用数減少，暗算使用数増加である．工夫不要問題は工夫する必要がない問題であるため，工夫計算の使用は減少するのが，システムで工夫計算を学習したことの効果に従った計算方法変化ということができる．学習問題，転移問題は，筆算減少，工夫計算増加，暗算増加となっている．以上から，3 種類の問題すべてについて，システムで工夫計算を学習することの効果として，仮説として提示した予想に沿った計算方法変化が起きていることがうかがえる．

表 3.4 の数値の有意差についてウィルコクソンの符号付順位和検定を実施したところ，工夫不要問題では有意差なし，学習問題，転移問題において，筆算の使用率減少について有意差ありとなった．学習問題，転移問題における，工夫計算，暗算では有意差はなかった．

なお，複数回の検定であり多重比較に当たるためボンフェローニ調整を行っている．

3.4.4. 計算問題別の計算方法変化

表 3.4 はプレテストとポストテストの解答を分析し，それぞれのテストで使用された計算方法の割合を調査したものである．したがって，テストにおける個別の計算問題について，計算方法がどのように変化したかは明らかでない．そこで，計算方法の変化について個別の計算問題ごとに分析を行った結果を図 7 に示す．

図 3.7 は，児童全体の解答のうち，3 種類の問題に含まれるそれぞれの計算問題がプレテストでどう計算され，ポストテストではどのように計算方法が変化したかを解答数ベースで示したものである．工夫不要問題を例にとると，プレテストでは筆算による計算が，20 個

所でみられたが，そのうち 8 個所はポストテストでもそのまま筆算され，1 か所は工夫計算に移行し，11 個所は暗算へと移行していた．括弧で示した割合は正解率の推移であり，工夫不要問題の筆算から暗算への移行を例にとると，計算方法移行は 11 個所でみられ，プレテストでは正解率 100%であったが，ポストテストでも正解率 100%であり，正解率を維持した上で計算方法が移行したことが示されている．

表 3.4，図 3.7 から，システム利用後は筆算と暗算が増加し，その増加はテスト正解率の維持・向上を伴っているとの示唆が得られたが，解答数ベースの分析であるため，実際にどの程度の人数について計算方法の変化が生じたかはわからない．そこで，プレテスト，ポストテストに含めた 3 種類の問題について，個人ごとに，10 問の問題それぞれについて，プレテスト，ポストテストの計算方法変化について分析した．

表 3.5 は，分析に際して，計算方法変化に対する評価基準を定めたものである．提示した 3 つの仮説に関し，3 種類のテスト問題について，プレテストでの計算方法からポストテストでの計算方法に対してあり得る変化パターンをあげ，その各パターンについて，計算方法が向上したと評価するか，同一で変化なしと評価するか，あるいは低下したと評価するかを定めた．

この評価基準に基づき，プレテストとポストテストの計算方法変化についての人数，および，各個人の正解率の向上，低下をまとめたものが表 3.6 である．

3.4.5. 計算方法変化の分析と仮説の検証

表 3.4 について，筆算使用率変化で有意差ありとなった学習問題について，学習問題は繰り上がりがあるため，工夫不要問題よりも計算が難しくなっている．プレテストで，15%程度の使用率で筆算が使われているのは，暗算ではできなかったためと考えられる．ポストテストでの筆算の使用率をみると，プレテストと比較して大きく減っている．筆算の減少と同時に，暗算が増えているので，暗算でできるようになったことが示唆される．同じく筆算使用率変化で有意差ありであった転移問題は，システムで学習した工夫計算とは異なるやり方の工夫計算である．ポストテストでは，転移問題においても筆算の使用が減少している．このことは，システム利用によって直接学習したもの以外の工夫計算問題についても，工夫計算が使えるようになっていることを示唆している．

工夫不要問題においても筆算が減り，暗算が増えている．工夫不要問題は，繰り上がりのない足し算であるので，工夫する必要はなく，計算問題としては易しい問題である．しかしながら筆算の使用が 6.5%みられるのは，易しい問題であっても筆算を使う場合があることを示しており，同時に暗算が増加しているので，筆算から暗算への移行があったことが示唆される．

図 3.7 での計算方法の変化に着目すると，筆算から工夫計算，暗算への移行が多く，その逆はほぼみられない．これは，表 3.4 で示した計算方法の変化(筆算減少，工夫計算増加，暗

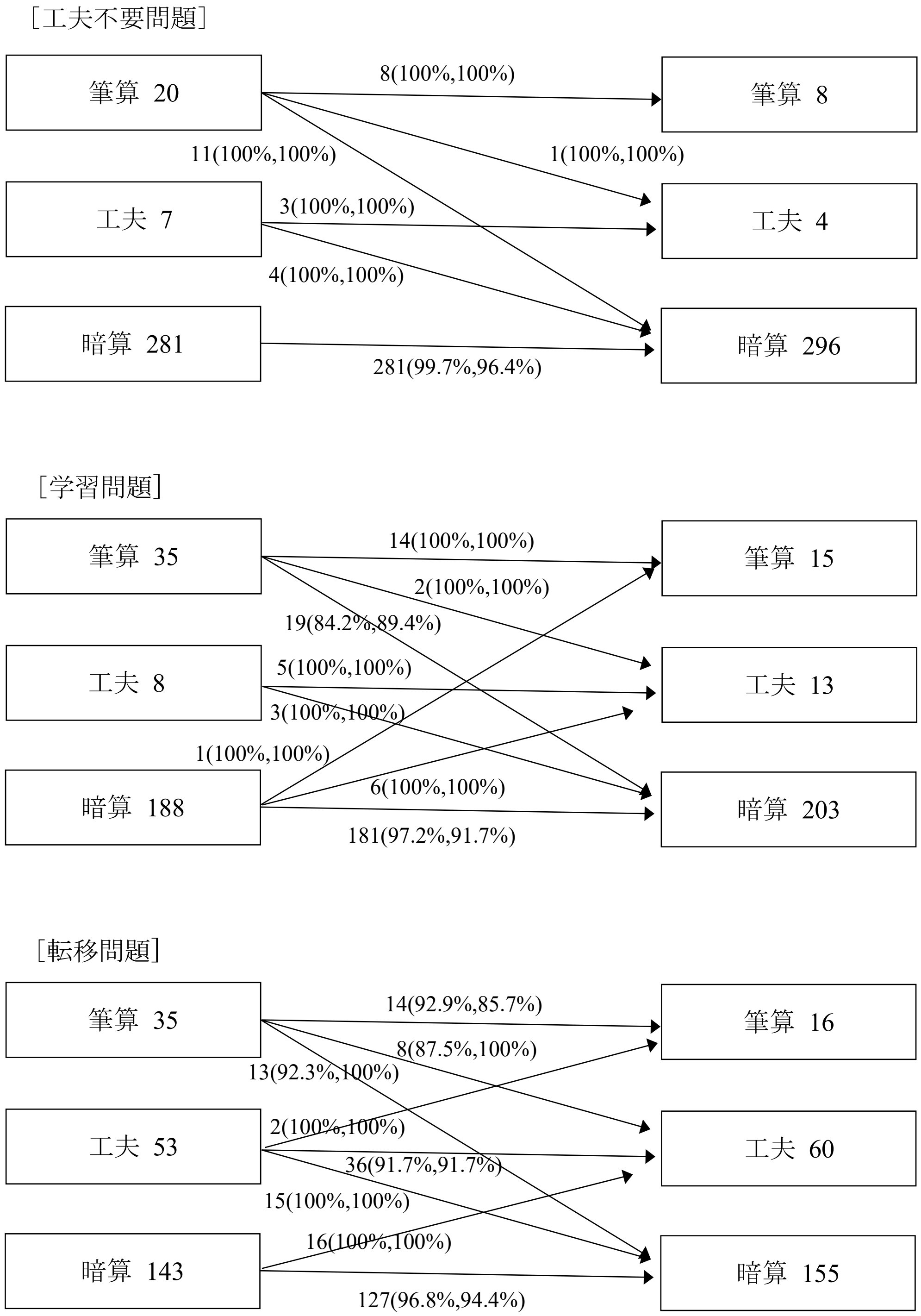

図 3.7　計算問題別の計算方法

算増加)とも符合する．正解率の変化については，工夫計算，暗算への移行で正解率上昇がみられ，正解率下降は計算方法の変化を行わなかった場合にみられているが，この原因は明確でない．

3.4.6. 計算方法変化と正解率推移の分析，仮説の検証

表 3.6 から，プレテスト，ポストテストともに全部を暗算で解いていた児童は，工夫不要問題では 67 名，学習問題では 53 名，転移問題では 21 名であった．全部を暗算で解いた場合，工夫が不要な工夫不要問題では，システム利用後の計算方法向上の余地はなかったと考えられる．学習問題，転移問題では，システム利用後に工夫計算が使えるようになった場合，向上とするので，全部を暗算で解いていても計算方法向上の余地がある．なお，全部を工夫計算で解いていても，向上の余地はないと考えられるが，該当する児童はなかった．

工夫できない問題である工夫不要問題においては，分析対象児童 77 人から，全部を暗算で解いていたため向上の余地がなかった児童 67 人を引いた 10 人が，向上の余地のあった児童となる．工夫可能な問題である学習問題，転移問題においては，全部を工夫計算で解いていた児童はいなかったため，分析対象児童 77 人が，向上の余地があった児童になる．向上の余地があった児童について，計算方法の低下が学習問題，転移問題でそれぞれ 1 名みられたが，ほぼすべての児童が，計算方法が向上したかあるいは変化なしであり，計算の品質を維持していた．プレテストのそれぞれの問題がポストテストにおいてどのように解かれたかの分析も実施したが(図 3.7)，筆算から工夫計算，筆算から暗算へは移行はみられても，筆算への移行はほぼなかった．かつ，プレテストの筆算からポストテストの工夫計算への移行，あるいは筆算から暗算への移行は，ポストテスト正解率の維持，向上を伴っている．このことは，提示した仮説が妥当であることを裏付けているものとみなせる．

計算方法が低下していた児童について，学習問題において計算方法が低下していた 1 名は，学習問題 1 問について暗算から筆算へと移行していた．しかし，転移問題においては逆に筆算から暗算への移行が 2 問みられたため，この児童は完全に計算方法が低下してしまったわけではなく，仮説を否定するものではないと考えている．転移問題において計算方法が低下していた 1 名は，転移問題 1 問について工夫計算から筆算へと移行していた．この児童については純粋に筆算が増加していたので，計算方法の純粋な低下である．

なお，表 3.6 に関して，工夫不要問題においてプレポストともに全部暗算を行っていた児童のうち，10 名について正解率の低下がみられた．工夫不要問題は，学習問題，転移問題に比べて易しいが，正解率が低下した人数は多くなっている．これについては，暗算のため計算過程の記述がなく，原因は明らかでない．

3.4.7. 分析と仮説の検証まとめ

システムによる工夫計算学習の前後に実施したプレテスト，ポストテストでは，児童の

表 3.5　計算方法変化の評価基準

プレ	ポスト	計算方法移行の評価
工夫不要問題		
筆算	筆算	△ 現状維持
	工夫	× 工夫不要問題の工夫は不可
	暗算	○ システムの学習効果
工夫	筆算	○ 工夫不要問題の工夫を中止
	工夫	× 工夫不要問題の工夫は不可
	暗算	○ 工夫不要問題の工夫を中止
暗算	筆算	× 低下
	工夫	× 工夫不要問題の工夫は不可
	暗算	△ 現状維持
学習問題		
筆算	筆算	△ 現状維持
	工夫	○ システムの学習効果
	暗算	○ システムの学習効果
工夫	筆算	× 低下
	工夫	△ 現状維持
	暗算	○ システムの学習効果
暗算	筆算	× 低下
	工夫	○ システムの学習効果
	暗算	△ 現状維持
転移問題		
筆算	筆算	△ 現状維持
	工夫	○ システムの学習効果
	暗算	○ システムの学習効果
工夫	筆算	× 低下
	工夫	△ 現状維持
	暗算	○ システムの学習効果
暗算	筆算	× 低下
	工夫	○ システムの学習効果
	暗算	△ 現状維持

○:向上　△:同一　×:低下

表 3.6　計算方法変化と正解率の推移(単位:人)

工夫不要問題				
計算方法変化		正解率推移		
		向上	同一	低下
計算方法向上	5	0	5	0
変化なし				
プレポストともに全部暗算	67	2	55	10
それ以外	5	0	5	0
計算方法低下	0	0	0	0
学習問題				
計算方法変化		正解率推移		
		向上	同一	低下
計算方法向上	16	0	16	0
変化なし				
プレポストともに全部暗算	53	2	42	9
それ以外	7	0	7	0
計算方法低下	1	0	1	0
転移問題				
計算方法変化		正解率推移		
		向上	同一	低下
計算方法向上	36	2	31	3
変化なし				
プレポストともに全部暗算	21	3	15	3
それ以外	19	2	15	2
計算方法低下	1	0	1	0

計算方法に，提示した計算変化が生じており，かつ，その変化は一部有意差を伴っていた．この変化はランダムに生じているわけではなく，ほとんどは筆算から工夫計算，暗算への変化であり，逆はほぼなかった．さらに，これら計算方法の変化は．ポストテストにおける正解率の維持，向上を伴っており，工夫計算学習後，計算の正確性が下がることもなかった．以上から，本研究のデータは，仮説として提示した，工夫計算学習による計算方法の変化：工夫計算増加，筆算減少，暗算増加，の妥当性を示唆している．このことから，本システムを利用した工夫計算学習には，児童の計算方法について，工夫計算を学習することによって期待される方向への変化を生じさせるという点で，一定の効果があったと判断している．

3.5. まとめ

本章では，算数工夫計算の作問学習を行えるシステムの設計・開発と，授業利用について述べた．システムを用いた工夫計算作問演習が小学生児童にとって実行可能であることが，演習の到達度と要解答数，児童に対するアンケート結果から確認できた．本研究のように，工夫計算作問学習を授業内で実施した報告は見当たらず，これが可能であることを示せたのは本研究の意義である．さらに，工夫計算の学習による効果として，工夫計算増加，筆算減少，暗算増加の計算方法変化が生じることを仮説として提示し，ポストテスト，プレテストでの計算方法分析によって，その妥当性を検証し，システムの効果を示すことができた．

工夫計算を対象とした作問学習のシステム化の目的は，計算式に対する構造的理解の促進である．上述のように，システムの利用効果は学習者の計算方法の変化という形で測定できたが，学習者の構造的理解の程度を直接測定できていない．しかしながら，数式を構造的に捉えなければできない演習ができ，その結果として，計算方法変化が生じたことから，今回の実践的利用結果は意味があると判断している．

課題としては，システム利用対象が工夫計算を既習であった小学 6 年生であったため，これから工夫計算を学習する，より低い学年における学習効果についての検証，およびその際の定量的な効果測定方法の検討があげられる．さらに実施期間に関して，本研究は短期の授業利用であったが，算数から数学への接続に効果をもつかという点から，長期にわたる利用での検証も課題となると考えている．また，統制群を設けた実験を行い，比較においても効果を検証することも課題となる．

4. 因数分解作問学習システム

4.1. まえがき

本章では，本研究で設計開発した，因数分解を対象とした作問学習システム[26][27](以降，「本システム」と呼ぶ)の大学生を対象とした実験的利用とその結果，中学生を対象とした実践利用とその結果について述べる．

作問学習は広く有効性が認められている学習方法であるといえ，多くの研究例がみられる[3][31][47][49][50]．算数・数学においては特に研究が盛んといえ，各種学習課題についての適用例がある[23][33][37][38][51]．しかし，因数分解への作問学習の適用は，少数の実践例[12]を除いてはほとんどみられておらず，システム化した例も，本研究以外にはみられない．本システムは，因数分解の作問学習を成立させる上での考察に基づき，ある公式に従って因数分解可能な数式を作るという作問学習(以降，「本演習」と呼ぶ)をシステム化したものである．本システムは，中学校範囲の公式に基づく例題提示機能，因数分解の作問学習機能，作問結果診断とフィードバック，およびログ機能を実装している．

大学生を対象とした実験的利用は，教育現場でのシステム実践利用の予備実験として行った．被験者となった大学生にとっては利用可能で，設計意図に沿った因数分解問題の作問活動が行われたこと，および，大学生対象ではあるものの一定の学習効果があったこと，を示唆する結果が得られた．これらの結果は，本システムを実践利用する上での基礎となる価値を示していると考え，本章で述べる．

中学生を対象とした実践利用では，本システムが実際の教育現場で利用可能で，本演習が因数分解を学習する上で有用な演習として学習者と教員に受け入れられることの確認を目的として，中学 3 年生 1 クラスを対象に 1 時限の授業内で本システムを利用し，利用結果の分析を行った．分析の結果，本システムの教育現場での授業利用の可能性が示せた．まず，本システムを用いた継続的な作問活動が観測でき，中学 3 年生を対象とした演習として実施可能であることが確認できた．また，作問をする上で発生した誤りも，初期は本システム利用上の誤り，本演習の形式上の誤りが多くみられたが，それらはすぐに減り，因数分解としての難しさと思われるものが残ったことから，本演習が因数分解の能力を要求するものであることが示唆された．学習者に対するアンケートでは，本システムが利用可能で，因数分解を学習する上でも有用と感じてもらえたことが示唆された．教員へのヒアリングからも，本実践利用に授業時間を割り当てたことの価値が確認できたとの感想が得られた．これらの結果は，実践利用として速報的な意義があると判断している．

なお，本実践利用は 1 時限，1 クラスの試験的な利用であったが，学校側より有用なものと判断していただけたので，必要に応じた課題の種類・量の追加やインタフェースの改良，および授業への組込み方を検討している段階である．この試みについての報告は，運用の仕

方，および学習効果の測定結果まで含めて，別途報告する予定である．

4.2. 因数分解の重要性と学習上の困難

因数分解は数学を学ぶ上で基本的な学習課題とされており[17][18]，方程式を解く上で不可欠な代数処理の技能であるだけでなく，構造変換である式変形を通じて思考を振り返り新たな関係の発見へとつながること[19]，もその意義とされている．

しかしながら，因数分解を学ぶ中学生，および高校生に関しても，その習得は必ずしも十分なものとなっていない事例もあるとされており[17][19]，中学生レベルの問題でなければ正答が難しい大学生が多くいることが報告されている[20].

上述の指摘[17]では，因数分解ができない学習者は，知識として知っている因数分解の手法を問題に応じて使い分けられない，また，因数分解の手法間の関連が理解できていないという特徴があるとしている．因数分解の手法とは，共通因数くくり出しを含む基本の公式群のことであり，因数分解ができない学習者は，ある問題を見たときどの公式を使えばよいかがわからないことといえる．因数分解の公式は因数分解の解法であるといえるので，因数分解の困難さは，解法同定の難しさ[21]であるということができる．

解法同定過程についての習熟を促進する方法としては，解法を用いて答えを導く問題解決演習を行うことが一般的な方法となっており，因数分解においても同様である．しかしながら，問題解決演習だけでは解法同定過程の習熟においては必ずしも十分ではないとの知見はこれまでにも様々な学習課題において指摘がなされている．この不十分さに対する対応策の一つとして問題を作ることによる学習が有効であるとされており，盛んに研究が行われている[45][46][47]. 算数・数学の範囲に限ってみても様々な学習課題への適用がみられる[4][23][33][37][38].

本章で述べる因数分解作問学習のシステム化は，このような考察に基づき，作問学習を因数分解においても適用する試みである．これまでも因数分解において作問が有効であるとの見込みから，実践を試みた事例が報告されているが[22]，学習方法として普及しているとはいえず，システム化の例も著者らの研究[26][27][48]以外にはみられない．これは，作問学習全般の実施上の困難さとしての「作成された問題の診断・フィードバックの実現の困難さ」だけでなく，因数分解特有の困難さとして，「因数分解からの作問」の存在があるからと考えられる．ある公式（解法）に従って因数分解可能な数式を作成することが因数分解の作問となるが，「因数分解からの作問」とは因数分解済みの数式をまず作成し，それを展開することで因数分解の対象となる数式を作成するといった作問法である[22].

このような考察に基づき，本システムでは，解法ベースの作問と問題ベースの作問[39]，の混合作問とすることで，(1)診断・フィードバック，(2)展開を行わせない作問，を実現している．具体的には，まず(I)ある因数分解の公式について例題と解法を示す．次に，(II)その公式が適用できず因数分解できない問題を示し，公式が適用できるように問題を変更さ

せる．

ある公式に従って因数分解可能な数式を作ることが因数分解作問学習の意義とすると，実践事例[22]のような，作る問題が備える条件を指示せず，紙面上で行う作問は，公式の適用に学習者の意識を向けさせることは難しい点，作った数式が因数分解可能かすぐにはわからない点，さらに，展開による作問を防止できない点で問題がある．本研究で行う混合作問は，与えた式を変更する作問とすることで，作問学習の意義は維持した上で，システムによる診断・フィードバックと，展開を行わせない作問課題，を実現しており，因数分解作問学習を成立させる上で有効な手段と考えられる方法である．

4.3. 因数分解作問学習とシステム設計

本システムは，図 4.1，図 4.2 に示す画面をもつ Android タブレットアプリケーションである．学習者が本演習を行うための機能として，例題と問題の提示，解答入力，作問結果と解答の診断，診断結果に基づくフィードバック表示，を備えており，学習者の操作ログはタブレット内に保存される．

システムによる演習は，演習 1，演習 2，演習 3 の 3 つからなる．演習 1 は，ある公式を使って解くことができる因数分解の計算問題であり，後続の作問演習の前提となる．演習 2 は，本システムが提示した例題(ある公式を使って解ける因数分解の計算問題)とその解き方を把握した上で，同じく本システムが提示した問題(ただし，因数分解できないようになっている計算問題)を，例題の解き方で用いているのと同じ公式を使って因数分解できるように，1 個所変更して解く．演習 3 は，2 個所以上を変更して解くほかは，演習 2 と同じである．

図 4.1 は演習 1 の例である．学習者は，因数分解の計算問題を，提示された例題の計算方法に従って解く．図 4.1 の例では，例題とその解き方 $2x + 2y = 2(x + y)$，および学習者が解くべき問題 $3x + 3y$ が提示されており，学習者は例題に沿って共通因数くくり出しの公式を使って解答を計算し，$3(x + y)$を入力する．解答入力後は答え合わせのボタンを押すとシステムによって正誤判定が行われ，正解なら正解フィードバック，誤りなら誤りのフィードバックが返される．誤りのフィードバックの例は，解答の計算間違いの指摘，作問演習（後述）における問題変形の誤りの指摘などである．

図 4.2 は演習 2 の例である．(1)学習者はまず，例題とその解き方「$2x + 2y = 2(x + y)$」を見て，共通因数くくり出しの公式 $ax + ay =a(x + y)$の適用例を把握する．(2)次に，因数分解できないようになっている問題「$4x + 5y$」を，共通因数くくり出しの公式が適用できるように変更する．初期状態では「4」，「x」，「+」，「5」，「y」からなる問題が表示されており，そこから学習者は「4」等をタッチして変更する．例えば「5y」の「5」をタッチすると，本システムが用意した選択肢「4」と「5」が表示される．ここで「4」を選ぶと，問題の式は「$4x+ 4y$」となり，共通因数くくり出しの公式を適用して因数分解できるようになる．問題の式で

図 4.1　演習 1

図 4.2　演習 2

タッチ可能な 5 個所には各 2 個の選択肢があり，作成可能な問題数は 25=32 パターンで，正解は「4x＋4y」，「5x＋5y」である（なお，演習 3 では，数字が 9 種類選べるようになっており，作成できる問題は 9*2*2*9*2=648 パターンとなり，2 個所以上変更を考慮すると 14 個の正解がある）．(3)そして解答として「4(x + y)」を入力したのが，図 4.2 の状態である．(4)この後，答え合わせのボタンをタッチすると，正誤判定，フィードバック表示が行われ，正解であれば次の演習に進むことができる．解答を間違った場合に表示されるフィードバックは，因数分解の計算が間違っている，問題の式を変更していない，因数分解できない問題を作っている，因数分解できる問題を作ったが適用できる公式が例題と異なる，等である．

本システムでは現在，因数分解の公式は中学校範囲の 5 種類の公式に基づく 5 問（表 4.1 参照）実装されている．各問題には，本演習を構成する 3 つの演習があるので，全体では 5 問×3 演習の演習を行うことになる．表 4.1 の問題 1 については，各演習における課題式と解答（例）を記載した．

表 4.1　システムによる演習課題

問題	対応する公式と演習課題
1	$ax + ay = a(x + y)$ (演習 1)課題式：$3x + 3y$ ，解答： $3(x + y)$ (演習 2)課題式：$4x + 5y$ ，解答例：$5x + 5y = 5(x + y)$ (演習 3)課題式：$4x + 5y$ ，解答例：$6x + 6y = 6(x + y)$
2	$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$
3	$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
4	$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$
5	$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$

4.4. 大学生を対象とした実験的利用

4.4.1. 利用手順

システムの実験的利用を，工学系の大学生，大学院生 17 名に対して実施した．本実験の目的は，システムの設計意図に沿った作問活動を行うことができるかどうかを調べることである．また，学習済みのはずの大学生でも因数分解の能力が高くないとの報告に基づき，学習効果が観測できるかどうかも調べた．

利用の手順は，プレテスト，システム利用，ポストテスト，アンケートである．これらを

連続して行い，時間配分は，プレテスト 19 分，システム利用 20 分，ポストテスト 19 分，アンケート記入 5 分程度，である．プレテスト，ポストテストはペーパーテストで，内容と時間配分は，(1)因数分解テスト 5 分，(2)変形作問テスト 10 分，(3)説明テスト 2 分，(4)因数分解作問テスト 2 分，である．

(1)因数分解テストでは，中学レベルの問題 1 問（例 : x2+7x+12），高校レベルの問題 4 問（例 : x2+xy-2y2+y+6+5x）を解かせた．(2)変形作問テストは，システムで演習するような変形作問を行うテストである．因数分解できない問題（例 : x2-10）を提示し，1 個の項を，変更，追加，削除することにより，因数分解できる問題を 4 問作らせた．提示する例題は 2 つあり，8 問作問できれば満点となる．変形の仕方によって，演習で用いた公式で解ける問題も，それとは別の公式が必要となる問題も作れるようになっているが，どの公式が使える問題を作るかは指示していない．これにより，システムによる演習内容の定着度合いや，演習がもたらした効果を測ることを意図している．

(3)説明テストは，計算テストの問題のうち 1 問を取り上げ，それをどのように解いたかを自由記述で説明させるものである．システム利用を通じて因数分解のやり方の理解が変容したなら，それを測ることができると考えた．(4)因数分解作問テストは，因数分解の問題を複数(4 問)作るテストである．システムを用いて因数分解作問の練習をしたので，ポストテストでは作問成績が向上するか測ろうとした．また，因数分解の作問では，因数分解できない問題の作問や解答の展開による作問がみられることから[22]，同様の作問が発生するかも確認しようとした．プレテストとポストテストで使う因数分解課題については，記憶の影響を考慮し，文字や係数を変え，項の順番を入れかえて，出題順もランダムにしたが，因数分解としての処理は同じとしており，難しさを等しいと仮定している．

4.4.2. システム利用状況

システム利用では，問題 1 として共通因数くくり出しの公式，問題 2 として，二次式の公式の因数分解を取り組ませた．各問題には 3 つの演習があるので，6 回正解すれば完了できる．システムのログから，17 名全員が演習を完了していた．正解の数は 17 名平均で 8.65 個，誤り回数は平均 3.94 回であった．作問学習は複数の正解があり得るため，時間があれば再度取り組むよう指示したので，正解の数は 6 個以上ある．

正解までに要した解答の数（答え合わせのボタンを押下した回数）を要解答数とし，(正解数 + 誤り数)/正解数，で計算すると，因数分解演習，作問演習 1，作問演習 2 の平均値は，それぞれ 1.09，2.28，1.26 であった．因数分解演習は計算問題であるため，作問演習 1 に比べて単純である．作問演習 1，作問演習 2 については，後者は問題式の変形個所が増えることで難しい作問演習となっている．しかし要解答数は減少しており，作問演習に対する慣れの影響も考えられるが，ある公式に従って因数分解可能な数式を作るという演習をより上手に行えるようになっていることが示唆される．

本システムの作問操作は，システムが提示する選択肢を選ぶことによって行う．したがっ

て，公式が適用できるか，因数分解可能かの考慮なしに，適当な作問と答え合わせを繰り返すランダムな作問操作が可能である．例えば，図 4.2 に示す「4x＋5y」からの作問であれば，用意された選択肢を選ぶことにより，ランダムに 32 パターンの問題を作ることができ，その中に 2 個正解(4x＋4y，5x＋5y)が含まれるが，要解答数からは，作問操作はランダムでないことが伺え，ログ上でも，そのような操作はみられなかった．さらに，問題式を変形後，解答入力，答え合わせを直ちにはせず，複数の変形を試行しながら，因数分解可能になった時点で解答入力，答え合わせをする操作が利用者全員のログ上においてみられ，システムの設計意図に沿った作問活動が行われていることが示唆される．

4.4.3. プレテスト・ポストテスト

(1)因数分解計算テストについて，中学生レベルの問題では，プレテスト正解率は 80.0%，ポストテスト正解率は 65.0%であった．正解率の下降がみられるが，ウィルコクソンの符号順位検定（以降の検定はこの方法による）を行ったところ，有意差はなかった．高校生レベルの問題では，プレテストの正解率は 47.5%，ポストテストの正解率は 53.8%で，有意差はなかった．高校生レベルの問題では正解率が低いが，大学生においても因数分解を学習対象とする意味があることを示唆しており，大学生に高校生レベルの因数分解を解かせた他の研究(4)と同様の結果といえる．

(2)変形作問テストの結果を表 4.2 に示す．このテストの評価は，公式レベルで異なる問題が何問作れたかを数えた．公式レベルで異なる問題とは，例えば x2 + 4x + 3 と x2 - 9 のように異なる方法で因数分解できる問題である．作問できた数は，プレテストでは 3.88 問，ポストテストでは 4.35 問で，有意差はなかった．また，演習で用いていない公式の作問数が有意に増加した．これは，演習の学習効果が記憶レベルではなく，方法レベルであることを示唆している．

(3)説明テストでは，(i)説明の文字数，および(ii)説明文に含まれる因数分解ができる条件への言及の個数，を調べたが，顕著な差は見られなかった．言語化において観察できるほどの変化がなかったことが示唆される．

(4)因数分解作問テストの結果を表 4.3 に示す．作問テストは，因数分解の問題を 4 問作るテストで，4 問作成できれば満点である．大学生を対象として学習効果を測ろうとしたので，難しい問題を作るという指示をした．作問された問題の数をみると，プレテストでは一人当たり平均 1.88 問，ポストテストでは 2.59 問と増加しており，有意差があった．作られた問題の中には因数分解できない問題が含まれており，プレテストでは平均 0.71 問，ポストテストでは 0.88 問がそのような問題であった．展開による作問もみられ，プレテストでは 0.29 問，ポストテストでは 0.53 問存在した．さらに，難しい問題を作るという指示にはそぐわない，公式をそのまま問題とした作問もみられた．作問された問題の数から，因数分解できない作問，展開による作問，公式そのままの作問を除くと，因数分解可能で，複雑といえる作問となるが，この作問の数は，プレテストでは 0.71 問，ポストテストでは 1.12 問となり，

有意に増加した．以上から，システムの利用後は単純な方法による作問の増加もあるが，より深く考える作問が増加していることが示唆される．このことは，大学生対象でも学習効果が見込めることを示唆していると考えられ，本研究で設計開発した因数分解作問学習に一定の効果があることを示す結果とみなせる．

表 4.2　変形作問テスト

		プレ	ポスト	p 値 (z 値)
平均作問数 (n=17)		3.88	4.35	0.14148 (1.47029)
内訳	学習作問	2.35	2.35	1.00000 (0.00000)
	転移作問	1.53	2.00	0.04232 * (2.03041)

* p<0.05

表 4.3　因数分解作問テスト

		プレ	ポスト	p 値 (z 値)
平均作問数 (n=17)		1.88	2.59	0.01128 * (2.53396)
内訳	因数分解できない作問	0.71	0.88	0.46307 (0.73380)
	展開による作問	0.29	0.53	0.10881 (1.60357)
	公式そのままの作問	0.18	0.059	0.42268 (0.80178)
	因数分解可能で，複雑といえる作問	0.71	1.12	0.04995 * (1.96039)

* p<0.05

4.4.4. アンケート

アンケートでは 6 問の質問を 4 件法で回答してもらった．質問の内容，肯定的回答の割合を次に示す．(Q1)システムは，使いやすかった(90%)，(Q2)問題の変形あるいは計算を間違えた場合，どこを間違えたかすぐにわかった(55%)，(Q3)問題の変形あるいは計算を間違えた場合，どういう間違いをしたかすぐにわかった(60%)，(Q4)因数分解できない問題を因数分解できるようにすることは, 簡単だった(95%), (Q5)因数分解できるようにする演習は, 因数分解をする上で役に立つ(90%)，(Q6)演習を通じて，因数分解に対する理解が深まった(75%).

この結果からは，大学生の主観的感想ではあるが，システムによる因数分解作問学習が実行可能な演習で，因数分解を学習する上においても有益な活動であることが示唆され，実践利用への手がかりが示されたと考えられる．Q2，Q3 の肯定的回答が他の質問と比較して高くないことから，フィードバックの洗練は今後対応していくべき課題と考えられる．

4.5. まとめ

本節では，因数分解の作問学習システムの設計開発と，実践利用の予備実験としての，大学生対象の実験的利用について述べた．システム利用状況の分析から，設計意図に沿った作問活動が行えていることが確認できた．プレテスト，ポストテスト結果からは，システムで演習した内容の定着が確認できた．アンケート結果も，システムによる演習が実行可能で，因数分解作問学習を行うツールとしての有効性を裏付けるものであった．これらの結果は，本システムの教育現場での実践利用の可能性を示している．中学校授業におけるシステム利用については，次節で述べる．中長期的な利用による総合的な計算力向上の検証は今後の課題である．

4.6. 中学生を対象とした実践利用

4.6.1. 利用手順

本システムの利用者は，中学 3 年生 1 クラス 37 名である．当該校は私立中高一貫校であり，高校については多くの生徒が大学に進学しており，また，当該校では発展・標準の二つのカテゴリに分けた習熟度別クラス編成を行っており，当該クラスは，習熟度が高い発展のカテゴリに属するクラスである．したがって，中学生一般に比しては上位に属する学力を持った学習者群の利用であると判断している．利用対象の選定にあたっては，本システムの初めての実践利用であること，また，因数分解についてすでに習った学習方法とは異なる学習方法であることを考慮し，因数分解を既習となる中学 3 年生，あるいは高校生での利用を筆者らが提案し，数学担当教員に本システムを利用してもらった上での相談を経て，当該クラスでの利用を行うことになった．

実践利用は 1 時限（50 分間）で実施した．利用内容は，担当教員及び筆者らによる本システムの使い方の PowerPoint での説明・タブレット配布 10 分程度，演習 30 分程度，アンケート 5 分程度，である．なお，本演習の課題の分量では，時間が余る生徒がいる可能性があること，およびその時間についても何らかの活動を提供することが必要とのことが事前の相談において指摘されていたことから，本演習を一通り終えた学習者に対して，(i)本システムを再度利用すること，の他に，(ii)別の演習（3 章において説明済みの算数工夫計算作問学習システム[23]），を利用できるようにした．なお以降，この別の演習は「工夫計算演習」と呼ぶ．

授業は，数学担当教員，クラス担当教員他 3 名の教員の見学のもと，筆者らによって進行された．冒頭の生徒への説明は筆者の一人が行い，まず，(1)本演習の課題 5 問×3 演習に取り組むことが必須であると指示した．次に，(2)本演習を一通り終えた場合には，再度取り組むように指示した．この際，本演習では複数個の正解があり得るので，1 回目と異なった正解を見つけることに努めるように指示した．さらに，(3)時間が余れば，工夫計算演習に取り組むことができる旨を説明した．この際，(2)を行うことが必須であることを強調しなかったため，(2)を行わずに(3)を行った学習者がみられたが，(1)は済ませた上でのことであったため，そのまま継続させた（ログ分析の結果から，(2)を行わなかったのは 37 名中 5 名であり，全員(1)を済ませていることが確認された）．

タブレットを学習者に配布した後は独力で本演習あるいは工夫計算演習を行ってもらい，学習者からの質問があれば 3 名の TA が随時対応した．対応の内容は，本演習の進め方の説明，フィードバックの説明などである．

本実践利用は，試験的に 1 時限だけのシステム利用であったので，限られた時間内での最大限の本システム利用を目指したため，利用時間内でのプレテスト，ポストテストは実施していない．また，実践利用の決定時期と学校側の授業スケジュールの都合上，別日程でのプレテスト，ポストテストも実施していない．

4.6.2. 分析方針

本節では，(1)本演習への取り組み状況，(2)本演習の正解率と誤り，(3)本演習に対する学習者と教員の感想，の分析を通して，本演習が有用なものとして受け入れられたかどうかを検討する．

4.6.3. 演習への取り組み状況

37 名中 36 名の学習者が本演習の全課題を終えた．本演習を一通り終えた後は，本演習に再度取り組んでいるか，もう一つ用意した工夫計算演習に取り組んでいるかであった．本演習に取り組んだ時間は，再度の利用も含めると平均で 23 分 33 秒であった．本演習を終えることができなかった 1 名については，演習時間を通じて(33 分利用)，第 1 問を繰り返し取り組んでおり，この際，可能な様々な数式を作っており，同一の式を何回も作る等の無駄な活動をしているわけではなかった．また，正解率も 80%以上であった．このため，作問活動としては他の学習者と遜色なかったといえる．なお，指示通りの操作をしていなかったことから，以降の分析から除いている．

本演習に取り組んだ時間の分布は図 4.3 のようになっており，比較的短時間しか本演習に取り組まなかった学習者が存在し，このような学習者が本演習を有用なものとして受け入れたかどうかが危惧される．そこで，平均利用時間付近の人数が少ない一方で，利用時間が 19 分の人数，33 分の人数がそれぞれ 9 名と最多になっているため，平均利用時間に比べて

長時間利用した学習者(13 名)を長時間利用群，短時間利用した学習者(23 名)を短時間利用群として，分析を行った．なお，次節以降においてもこの二群に分けての分析を行っている．

本演習への取り組みが継続的に行われていたことを確認するため，取り組み時間を 10 分ごとに区切って，解答回数(計算，作問後に答え合わせボタンを押した回数)を調べると，長時間利用群では，最初の 10 分が 9.6 回，次の 10 分が 14.3 回，最後の 10 分が 11.5 回であった．短時間利用群では，最初の 10 分が 9.3 回，次の 10 分が 14.7 回であった（なお，両群とも最後の 10 分未満は他の区間との比較が難しいと考えたので，分析対象としていない）．これらのことから，適切といえる時間当たりの解答回数を現時点では不明であるものの，20 分以上に渡って演習に継続的に取り組んでいることが確認できた．

なお，長時間利用群 13 名のうち 11 名，短時間利用群 23 名のうち 19 名が再取り組みをしていたので，再取り組みの有無によって取り組み時間の違いが生じているわけではない．また，本演習に取り組んだ後，時間があれば取り組むよう指示した工夫計算演習については，長時間利用群のうち 10 名が取り組んでおり，うち 6 名が全演習を終えていた．一方，短時間利用群は全員がこの演習に取り組み，うち 19 名が全演習を終えていた．これらのことから，本演習に取り組んでいない残りの時間においては，この工夫計算演習に取り組んでおり，授業内の空き時間は生じていなかったと判断している．

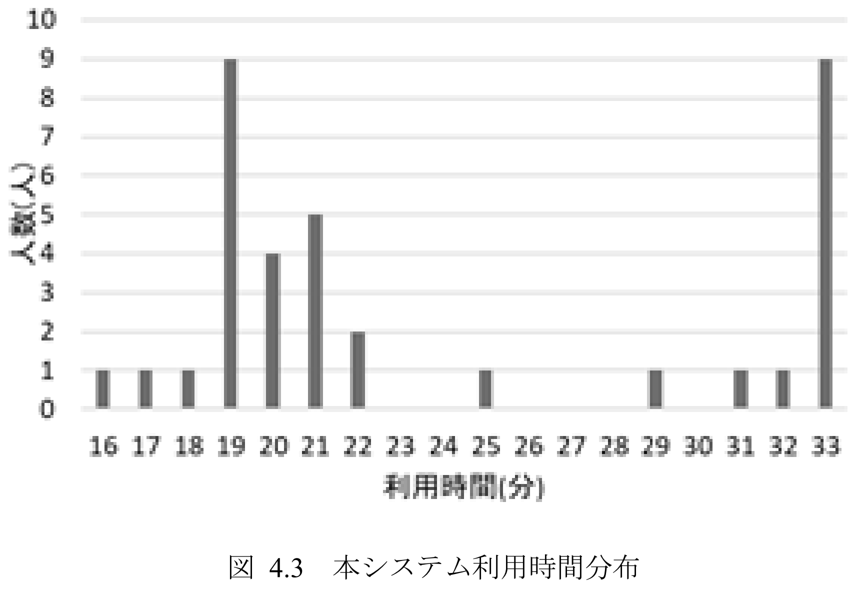

図 4.3　本システム利用時間分布

4.6.4. 正解率と誤り

再取り組みも含めた正解率(正解)/(正解+間違い)をみると，長時間利用群は 72.2%，短時間利用群は 87.3%であった．正解率の違いについてウィルコクソンの順位和検定で検定したところ，有意差があった(p<.01)．このことから，短時間利用群の方が因数分解の作問に関しては能力が高かったことが示唆される．1 回目の取り組み，再取り組みとなる 2 回目以降の取り組みの正解率は，長時間利用群は 71.1%，79.0%，短時間利用群は 88.5%，87.0%であり，

7 割から 8 割の正解率が得られている．各群の 1 回目の取り組みと 2 回目以降の取り組みの正解率の違いについてウィルコクソンの順位和検定で検定したところ有意差はなかった．したがって，再取り組みを進めることによる正解率の上昇・下降が生じているわけではないと判断している．なお，再取り組みを行っていない学習者もいるため，以降の分析は 1 回目の取り組みについて行う．

本演習では，本システムが用意した選択肢を選ぶことによって作問を進めるので，ランダムな解答(公式を使えるか，因数分解できるかを考えず，選択肢をランダムに選んで解答すること)が可能であるが，図 4.2 に示す演習 2 を例にとると，作成可能な問題は 32 パターンあり，そのうち 2 個が正解となるため，ランダムな解答で正解する確率は 6%である．7 割から 8 割の正解率は，ランダムな解答では実現困難であり，学習者は自身の持っている因数分解の知識を用いて解答していることを示している．

演習別の正解率を長時間利用群，短時間利用群の順で示すと，演習 1 が 93.1%，98.3%，演習 2 が 80.1%，92.2%，演習 3 が 83.8%，91.6%であった．演習 1 が最も正解率が高く，次いで演習 2 あるいは演習 3 の順となっている．各群の演習 2 と演習 3 の正解率の違いについてウィルコクソンの符号順位検定で検定したところ，有意差はなかった．演習 1 は計算問題なので，正解が算出できればよく，正解率が最も高いのは予想される結果である．演習 2，演習 3 の作問演習は，演習 3 の方が難しい演習となっている．例えば，図 1 に示す共通因数くくり出しでは，問題式を 1 個所変更して作問する演習 2 の場合，上述のように 32 パターンのうち 2 個の正解がある．2 個所以上の変更が必要な演習 3 では，作成可能な問題は 648 パターンあり，その中に 14 個の正解が含まれる．したがって演習 2 よりも難しくなっているが，正解率に有意差を伴う下降はなく，難しい作問演習でも正解率が維持できていると考えられる．

間違いの総数は 143 個で，内訳は表 4.4 の通りであった．解答方法の間違いは，作問演習での問題変更の仕方の間違い(問題の式を変更していない，演習 3 において 1 個所しか変更していない)である．これらは全体では，演習 2 では 41 個だが，演習 3 では 25 個に減っており，演習のやり方をつかむことによって，間違いが減少していると考えられる．手順遂行の間違いは，計算の間違いであり，正しく作問できたが解答の計算を間違った場合も含む．知識適用の間違いは，作問の誤りであり，因数分解できない問題を作った，あるいは，使う公式が例題と異なる問題を作った間違いである．

全体で演習 2 と演習 3 の間違い数を比較すると，解答方法の間違いは 41 個から 25 個，計算間違いは 13 個から 4 個と減少しているが，知識適用の間違いは 24 個，21 個と継続して現れている．このことは，本演習の課題のような，基本公式に基づく比較的容易な因数分解であっても，計算の対象ではなく作問の対象とした場合は，必ずしも容易ではないことを示していると考えられ，本演習が因数分解の能力を要求するものであることを示唆していると考えられる．

長時間利用群と短時間利用群で間違い数を比較すると，長時間利用群では，解答方法の間

違いは 31 個から 11 個，手順遂行の間違いは 11 個，10 個，1 個と，演習を進めるにつれて半数以下に減っているが，知識適用の間違いは 14 個から 16 個と，継続して現れている．短時間利用群では，解答方法の間違い，手順遂行の間違いは大きな増減がなかったが，知識適用の間違いは 10 個から 5 個となり，半減している．このことは，長時間利用群よりも短時間利用群の方が，因数分解を作問の対象とした場合の難しさに適切に対応ができていることを示唆している．

表 4.4　間違い数

	利用群	演習 1	演習 2	演習 3
解答方法の間違い	長時間	--	31	11
	短時間	--	10	14
	全体	--	41	25
手順遂行の間違い	長時間	11	10	1
	短時間	4	3	3
	全体	15	13	4
知識適用の間違い	長時間	--	14	16
	短時間	--	10	5
	全体	--	24	21

4.6.5. 学習者と教員の感想

学習者に対するアンケートは回答対象を明確にするために，本演習用，工夫計算演習用で別になっており，ここでは本演習用のアンケート結果を分析する．アンケートでは六つの質問を 4 件法で回答してもらっており，以下，質問の内容，肯定的回答の割合を長時間利用群，短時間利用群の順で次に示す．(Q1)システムは，使いやすかった(92%，91%)，(Q2)問題の変形あるいは計算を間違えた場合，どこを間違えたかすぐにわかった(77%，87%)，(Q3)問題の変形あるいは計算を間違えた場合，どういう間違いをしたかすぐにわかった(77%, 96%), (Q4)因数分解できない問題を因数分解できるようにすることは，簡単だった(92%，96%), (Q5)因数分解できるようにする演習は，因数分解をする上で役に立つ(92%，96%)，(Q6)演習を通じて，因数分解に対する理解が深まった(100%，96%).

Q1，Q4，Q5 に関しては，両群ともに肯定的回答の割合は 90%以上であった．この結果からは，本演習が実行可能であり，因数分解を学習する上においても有益な活動であると感じてもらえたことが示唆された．また，授業終了直後に授業を通して見学した数学担当及びク

ラス担当の教員 2 名と本実践利用に関する振り返りの時間を持ったが，本システムを使わずに同等の作問学習を行うことは難しく，したがって 1 時限を割り当てて利用したことには価値があった，との感想が口頭で得られた．これらのことから，実践利用としての有用性を示唆する結果が得られたと判断している．

一方, 間違いに対する把握を聞いた Q2, Q3 については, 有意差はみられなかったものの, 長時間利用群において短時間利用群よりも肯定的回答が少なかった．これは，長時間利用群によって演習における間違いの把握が難しかったことを示唆する．これは，正解率や誤りの分析結果とも一致し，長時間利用群にとっては短時間利用群よりも，本演習が難しいものであったことが示唆される．

4.6.6. 実践利用まとめ

短時間利用群は，取り組み時間は比較的短いもののの，正解率が高く，誤りも少なかったといえ，また，アンケートの結果については，誤りの把握度合いも含めて肯定的回答が高かった．このことから，短時間利用群にとっては，この演習が有用な活動として受け入れられたといえ，取り組みが短時間であったことは，演習の内容が比較的簡単であったことが理由と考えられる．このような学習者に対しては，(1)同一公式に対する課題を増やす，(2)取り扱う公式を増やす，(3)作問自体の難化（複数の作問を行わせるなど）などで対応することができると考えている．

長時間利用群については，短時間利用群よりも長時間演習に取り組んだことから，比較的熱心に演習に取り組んだと考えられ，アンケート結果からもそのことが伺われる．このことから，長時間利用群においてもこの演習が有用な活動として受け入れられたといえる．しかしながら，正解率と誤り，およびアンケートにおける Q2，Q3 の結果は，演習が比較的難しかったことを示唆しており，誤りに対するフィードバックなどの演習支援機能の改良の必要性が示されたと考えている．

4.7. まとめ

本節では，本研究で設計開発した因数分解作問演習を，中学 3 年生を対象に実践利用した結果を報告した．演習に対する取り組み状況，正解率と誤り，および学習者と教員の感想から，本演習が実践利用する価値があるものであることが確認できたと判断している．

本実践利用は 1 時限のみの試験的な利用であったため，授業と連動しておらず，学習効果測定のためのプレテスト，ポストテストも行っていないが，現在，本システムの授業内利用のための演習の拡張およびシステムの手直しを行っており，授業と連動した複数時限での利用，および学習効果の測定を今後行う予定である．また，学習者の演習状況を把握できる教員用システムの開発も予定している．

5. 結論

本研究では，記号的な人工知能を用いるアプローチに基づき，算数，数学の数式を構造として理解させるために，再構成法を用いた作問学習をシステム化し，教育現場での実践利用を行った．再構成法を用いた作問学習はこれまでにも算数や数学の文章題を中心として活発な研究が行われ，学習効果も確認されているが，算数や数学の数式を対象とした作問学習の研究例はみられなかった．本研究では，算数や数学の数式においてもその構造が重要であり，数式の深い理解のためには，数式を計算手続きでなく構造的に捉えることが必要になると考え，数式を対象とした，再構成法を用いた作問学習を実現した．算数・数学における数式を対象とした作問学習環境のシステム化，教育現場での実践的利用の研究例はこれまでみられなかったが，数式の問題を作ることは，数式を構造的に捉えて再構成することといえるので，数式の構造的な理解の促進につながると考えられるため，本研究で実現した数式の作問学習は意義がある．

第 3 章では，工夫計算作問学習システムについて述べた．本研究では，算数工夫計算は，算数の範囲において，数式を構造的に捉えることが求められる学習課題であると考え，工夫の仕方の理解が必須となるような学習方法として，解法ベースの作問学習を行える学習環境をシステム化した．小学校 6 年生 3 クラスを対象として，算数の授業と連動した形で 1 時限の実践的利用を行うことができた．授業の前後に別日程で実施したプレテスト，ポストテストの結果から，学習者の計算方法に変化を与えたことが確認できた．学習者に対するアンケートの結果から，主観としてもシステムは肯定的に受け入れられており，教員に対する聞き取りからも，児童の学習に役立つ活動であること，児童が集中して取り組んでいたこと，システムなしで同様の授業を実施することは難しいこと，したがって，今回のシステム利用は成功であったと結論付けてよい，との感想を得た．

第 4 章では，因数分解作問学習システムについて述べた．数学の数式は構造として捉える必要があり，因数分解は，計算手続きの適用では解答できず，数式の構造を利用した操作といえる．本研究では因数分解を学習する上での困難さは，解法同定の難しさであると考え，構造として捉えることをより促進するために，ある公式に従って因数分解可能な数式を作るという，解法ベースの作問と問題ベースの作問の混合作問を行える学習環境をシステム化した．大学生を対象として実験的利用を行い，システムが利用可能なこと，システムで演習した内容が定着していることが確認できた．中学校 3 年生 1 クラスを対象に 1 時限の実践利用を行うことができ，学習者はシステムによる演習を十分にこなせていたことが確認できた．システムのログから，学習者のシステム利用時間をもとに 2 群に分けて分析した．分析の結果，システムを長時間利用した群は，やや難しい演習ではあったが，用意された課題を最後まで行い，短時間利用した群は，演習を比較的簡単にこなせていたことがわかった．学習者に対するアンケートの結果からは，長時間利用群は，システムのフィードバックがや

やわかりにくかったことが伺えた．短時間利用群は，アンケートのいずれの質問でも肯定回答率が高く，システムを高く評価していた．これらのことから，長時間利用群には，現状で適切な演習となっており，短時間利用群には，課題の充実を図ればよいと考えられる．教員からは，本システムの利用に授業時間を割り当てたことの価値が確認できたという感想が得られた．

以上，本研究では，算数と数学において，数式を対象とした作問学習システムを設計開発し，教育現場で実践的に利用することができた．学習者の主観的評価も肯定的で，教員からもシステム利用を成功とみなしてよいとのコメントが得られた．また，システム利用前後のプレテスト，ポストテストからは，システムで学習した内容が身に着いていることを示唆する結果が得られた．したがって，これまで研究例のみられなかった，数式を対象とした再構成法を用いた作問学習の研究として，本研究におけるシステム開発と実践利用は十分な成果があったと判断している．

今後の課題をあげると次の通りである．本研究で指向する数式の構造的理解について，直接の測定はできていないため，定量的な効果測定方法の検討が必要となる．また，本研究でのシステム利用実践は，いずれも 1 時限の短期利用であったため，中長期的な利用での効果を検証することは課題となる．システムを授業と連動して使用していくにあたっては，システムで学習できる課題の拡張，教師用のシステムの開発も必要と考えられる．さらに，実際の教育現場では困難な場合もあるが，実験群と統制群を設けた利用を行い，比較して効果を検証することも課題となる．

参考文献

[1] 平嶋宗：“構成による学習への知識工学的アプローチ”，第 24 回人工知能学会全国大会 (2010)

[2] 平嶋宗：“作問学習のモデル化”，第 23 回人工知能学会全国大会 (2009)

[3] 平嶋宗：“作問学習に対する知的支援の試みと実践―組立としての作問および診断・フィードバック機能の実現―”，科学教育研究，Vol. 43, No.2, pp.61-73 (2019)

[4] 横山琢郎，平嶋宗，岡本真彦，竹内章：“単文統合としての作問を対象とした学習支援システムの設計・開発”，教育システム情報学会誌，Vol.23, No.4, pp.166-175 (2006)

[5] 倉山めぐみ, 平嶋 宗 :“逆思考型を対象とした算数文章題の作問学習支援システムの設計開発と実践的利用”，人工知能学会論文誌，Vol.27，No.2，pp.82-91 (2012)

[6] 山元翔，神戸健寛，吉田祐太，前田一誠，平嶋宗：“教室授業との融合を目的とした単文統合型作問学習支援システムモンサクン Touch の開発と実践利用”，電子情報通信学会論文誌 D, Vol.J96-D, No.10, pp.2450-2451 (2013)

[7] Booth, L. R.：“Children's difficulties in beginning algebra”, The Ideas of Algebra, k-12 1988 yearbook, pp.20-32 (1988)

[8] 三輪辰郎：“文字式の指導序説”，筑波数学教育研究，vol.15, pp.1-14 (1996)

[9] 須田勝彦：“中学校数学カリキュラム再構成への試み―入門期の中学校数学を中心に 入門期の中学校数学を中心に　第 1 部　理論編―”，教授学の探究，Vol.17, pp.13-27 (2000)

[10] 三輪辰郎：“文字式の指導に関する重要な諸問題”，筑波数学教育研究，No.20, pp.23-38 (2001)

[11] 清水明子：“代数初学者の文字式に対する認識”，名古屋大學教育學部紀要．心理学, Vol.45, pp.55-63 (1998)

[12] 千賀博巳：“計算の工夫(脳トレーニング) ”，豊橋創造大学短期大学部研究紀要，No.25, pp.67-76 (2008)

[13] 植阪友理，鈴木雅之，清河幸子，瀬尾美紀子，市川伸一 :“構成要素型テスト COMPASS に見る数学的基礎学力の実態―「基礎基本は良好，活用に課題」は本当か―”，日本教育工学会論文誌，Vol.37, No.4, pp.397-417 (2014)

[14] 鈴木 雅之, 田中 瑛津子, 村山 航, 市川 伸一 :“工夫速算問題の分類と抽象的方略を用いた教授の効果”，日本教育工学会論文誌，Vol.34, No.1，pp.35-43 (2010)

[15] 鈴木雅之，市川伸一：“工夫速算方略の指導の効果”，心理学研究，Vol.87, No.2, pp.191-197 (2016)

[16] 鈴木雅之：“ＣＯＭＰＡＳＳの結果を 今後の学習に生かすために”，東京大学大学院教育学研究科附属学校教育高度化センター， http://www.p.u-tokyo.ac.jp/~c-kodoka/wscompass100328/wscompass100328%20koza-kuhu.pdf (参照 2018.03.11)

[17] 南郷 毅 : “因数分解指導における視覚化について”, 弓削商船高等専門学校 紀要, No.38 (2016)

[18] 秋田県総合教育センター : “秋田県の算数・数学科学習の現状 算数・数学科における「基礎・基本」”, 研究紀要, 第 34 集, 4 分冊の 2, pp.24-31 (2003)

[19] 根本博 : “「中学校学習指導要領」改訂作業から見た学校教育における数学学習の必要性に関する考察”, イプシロン, Vol.41, pp.17-23 (1999)

[20] 中村勝之 : “数学の基礎学力と経済学理解度との関係について（１）—『経済学基礎理論A』の成績データを用いた実証分析—”, 桃山学院大学総合研究所紀要, Vol.33, No.2, pp.15-27 (2007)

[21] 平嶋宗, 中村祐一, 池田満, 溝口理一郎, 豊田順一 : “ITS を指向した問題解決モデル MIPS”, 人工知能学会誌, Vol.7, No.3, pp.475-486 (1992)

[22] 沖山義光 : “因数分解の指導法の試み”, 神奈川大学心理・教育研究論集, No.30, pp.35-40 (2011)

[23] 榎本浩義, 林雄介, 平嶋宗 : “算数計算式の構造的理解の促進を指向した工夫計算の作問学習演習システムの設計開発と実践的利用”, 電子情報通信学会論文誌 D, Vol.J101-D, No.12, pp.1527-1538 (2018)

[24] Enomoto, H., Hayashi Y. and Hirashima, T. :“Design of problem-posing exercise for efficient calculation” , Proc. of ICCE2018, pp.104-106 (2018)

[25] Enomoto, H., Hayashi, Y. and Hirashima, T. :“Experimental use of problem-posing exercise system for efficient calculation to promote relational interpretation of numerical expression” , ICCE2018 Workshop Proceedings, pp.245-261 (2018)

[26] 榎本浩義, 林雄介, 平嶋宗 : “因数分解を対象とした作問学習演習システムの設計開発と実験的利用”, 教育システム情報学会誌, (2020) (印刷中)

[27] 榎本浩義, 山元翔, 林雄介, 平嶋宗 : “因数分解を対象とした作問学習演習システムの実践利用”, 教育システム情報学会誌, (2020) (印刷中)

[28] 山元翔, 尾土井健太郎, 前田一誠, 林雄介, 平嶋宗 : “算数文章題における統合過程のモデル化と外化支援システムの実践利用”, 第 27 回人工知能学会全国大会 (2013)

[29] 青谷章弘 : ““三角ブロック” を用いた「１次方程式の利用」の実践研究 : ＩＣＴによる構造の可視化を通して”, 日本科学教育学会年会論文集, pp.423-424 (2018)

[30] 平嶋宗, 長田卓哉, 杉原康太, 中田晋介, 舟生日出男 : “キットビルド概念マップの小学校理科での授業内利用の試み”, 教育システム情報学会誌, Vol.33, No.4, pp.164-175 (2016)

[31] 竹中真希子, 室田一成 : “作問学習を取り扱った先行研究に関する基礎的研究—先行研究で採用されている作問の方法—”, 大分大学教育学部研究紀要, Vol.40, No.1, pp.133-148 (2018)

[32] 中野俊幸 : “計算の意味や理由をどう理解させるか”, 小学校算数・中学校数学－教室の

窓， Vol.4, pp.12-13 (2005)

[33] Silver, E. A. :“On mathematical problem posing”, For the Learning of Mathematics, Vol.14, No.1, pp.19-28 (1994)

[34] English, L. D. :“Children's problem posing within formal and informal contexts”, Journal for Research in Mathematics Education, Vol.29, No.1, pp.83-106 (1998)

[35] Kojima, K., Miwa, K. and Matsui, T., :“Supporting mathematical problem posing with a system for learning generation processes through examples”, International Journal of Artificial Intelligence in Education, Vol.22, No.4, pp.161-190 (2013)

[36] 平嶋宗 : “「学習課題」中心の学習研究―情報構造としての学習課題の再定義と構造操作としての学習活動の設計―”，人工知能学会誌，Vol.30，No.3，pp.277-280 (2015)

[37] 東本崇仁，市将治，平嶋宗，竹内章 : “多桁減算を対象とした作問学習支援環境の設計・開発”，日本教育工学会論文誌，Vol.31, No.1, pp.61-68 (2007)

[38] 中野明，平嶋宗，竹内章 : “「問題を作ることによる学習」の知的支援環境”，電子情報通信学会論文誌 D-1， Vol. J83-D-I, No.6, pp.539-549 (2000)

[39] 平嶋宗 : “「問題を作ることによる学習」の分類と知的支援の方法”，教育システム情報学会研究報告，Vol.20，No.3，pp.3-10 (2005)

[40] 宮迫翔平，林雄介，平嶋宗 : “工夫計算を対象とした例題同等問題作成演習の設計・開発”, 教育システム情報学会中国支部研究発表会講演論文集, Vol.15, No.1, pp.7-12 (2015)

[41] 榎本浩義，林雄介，平嶋宗 : “工夫計算を対象とした作問学習演習の設計開発と実践利用―自己説明タスクの作問タスク化の試み―”，教育システム情報学会中国支部研究発表会講演論文集，Vol.17, No.1, pp.21-26 (2017)

[42] 榎本浩義，林雄介，平嶋宗 : “数式の構造操作としての工夫計算を対象とした作問学習演習の設計開発”, 教育システム情報学会中国地区 2017 年度学生研究発表会, pp.223-224 (2018)

[43] Sweller, J. and Cooper, G. A. :“The use of worked examples as a substitute for problem solving in learning algebra”， Cognition and Instruction, 2, pp.59-89 (1985)

[44] Anderson, J. R., Fincham, J. M. and Douglass, S. :“The role of examples and rule in the acquisition of a cognitive skill”, Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition，23, pp.932-945 (1997)

[45] 山岸芳夫 : “「プログラミング基礎」における作問学習の実践”, KIT Progress, No.26, pp.91-100 (2018)

[46] 岩﨑千晶，柴健次 : “学生同士による問題作成を取り入れた会計教育におけるモバイルラーニングの授業設計と組織的支援の構築”，関西大学高等教育研究，Vol.6, pp.11-19 (2015)

[47] 小林郁典，上田伊佐子，森田敏子 : “オンライン型オフィススイートを利用した作問課題”，徳島大学 大学教育研究ジャーナル，No.16, pp.8-17 (2019)

[48] 榎本浩義，林雄介，平嶋宗：“因数分解を対象とした作問学習演習システムの設計開発と実験的利用”，人工知能学会研究会資料 SIG-ALST-B901, pp. 6-11 (2019)

[49] 高木正則，田中充，勅使河原可海：“学生による問題作成およびその相互評価を可能とする協調学習型 WBT システム”, 情報処理学会論文誌, Vol.48, No.3, pp.1532-1545 (2007)

[50] 平井佑樹，櫨山淳雄：“作問に基づく協調学習支援システムとその分散非同期学習環境への適用”，情報処理学会論文誌，Vol.49，No.10，pp.3341‑3353 (2008)

[51] 小島一晃, 三輪和久, 松居辰則 : “産出課題としての作問学習支援のための実験的検討”, 教育システム情報学会誌，Vol.27, No.4, pp.302-315 (2010)