学校数学における
「根元事象」と「同様に確からしい」の概念規定

広島大学附属福山中・高等学校　上ヶ谷　友佑
岡山大学大学院教育学研究科　石橋　一昂
広島大学附属福山中・高等学校　迫田　彩

１．序論

今日の社会は，複雑化した予測不可能な社会である。そのような社会では，不確実性を確率を用いて定量化し，意思決定を行わなければならない。そしてこの資質能力は，専門家のみが有すれば良いものではない。不確実である以上，専門家ですら誤る可能性があることから，我々市民には，それらを批判的に考察することが求められる。また，不確実性は，職場や家庭など，我々の日常生活にも潜んでいる。我々の日常生活では，我々自身が不確実性を確率を用いて定量化し，意思決定を行わなければならない。ゆえに確率は，全市民にとって必須の教養である（Batanero ほか, 2016)。しかし，学校数学における確率は，根元事象が同様に確からしい場合にしか定義されておらず，具体的な問題場面で確率概念の応用を考える際，意味論上の問題が生じる（石橋, 2019a)。表 1 は，実際の教科書で採用されている確率の定義の例である。こうした定義の下で，例えば，次の［問題 1］を考えることにしよう。

> ［問題 1］
> A, B の 2 チームが試合をする。1 回の試合で A が勝つ確率は $\frac{2}{3}$ ，B が勝つ確率は $\frac{1}{3}$ で，先に 3 勝したチームが優勝となるとき，次の確率を求めよ。ただし，引き分けはないものとする。
> (1)　3 勝 2 敗で A が優勝する確率
> (2)　A が優勝する確率
>
> (高橋ほか, 2018, p. 57)

［問題 1］の設定で，1 試合あたりの確率の意味を根元事象に基づいて考えるとき，大きく分けて 2 通りの解釈を考えることができる。第一の解釈は，A が勝つ事象と B が勝つ事象はこれ以上分けることができないと考え，これら 2 つの事象を根元事象とする解釈である。しかし，この場合は，この 2 つの根元事象が同様に確からしいとは言えず，定義に基づいて確率の意味

表１　教科書で採用されている確率の定義

ある試行において，全事象 U の要素 1 個だけからなる集合で表される事象を根元事象という。 1 つの試行において，全事象に含まれる根元事象のどれが起こることも同じ程度に期待できるとき，これらの根元事象は，同様に確からしいという。根元事象がすべて同様に確からしい試行において，全事象 U に含まれる根元事象の個数を $n(U)$, 事象 A に含まれる根元事象の個数を $n(A)$ とするとき，$\frac{n(A)}{n(U)}$ を事象 A の確率といい，$P(A)$ で表す。（高橋ほか, 2017, p. 39)
1 つの試行において，起こりうる結果全体を集合 U で表すとき，その試行におけるどの事象も，U の部分集合で表すことができる。U 自身で表される事象を全事象 U，U のただ 1 つの要素からなる集合を根元事象という。一般に，ある試行において，どの根元事象が起こることも同程度に期待できるとき，これらの根元事象は同様に確からしいという。このような試行で，起こりうるすべての場合の数を N，事象 A が起こる場合の数を a とするとき，$\frac{a}{N}$ を事象 A の確率といい，$P(A)$ で表す。(岡部ほか, 2017, pp. 39-40)
ある試行において，起こりうる結果全体の集合 U で表される事象を全事象という。どんな事象も U の部分集合で表すことができる。とくに，U の 1 つの要素だけからなる部分集合で表される事象を根元事象という。 どの根元事象が起こることも同じ程度に期待できるとき，これらの根元事象は同様に確からしいという。どの根元事象も同様に確からしい試行において，全事象 U に属する根元事象の個数を $n(U)$，事象 A に属する根元事象の個数を $n(A)$ とするとき，$\frac{n(A)}{n(U)}$ を事象 A の確率といい，$P(A)$ で表す。(岡本ほか, 2017, p. 42)

を考えることができなくなる。

第二の解釈は，A が勝つ事象と B が勝つ事象がまださらに分けられると考えて，同様に確からしいと言える何らかの根元事象の存在を仮定する解釈である。しかし，この場合は，そのような根元事象が具体的にどんな事象であるのかを述べることが難しく，そうした仮定を設けることの妥当性それ自体に疑念が残る。

そこで本稿では，2 つの用語「根元事象」と「同様に確からしい」の意味を，学校数学にとって最適な形で精緻化し，確率の意味の基礎を再考する。

２．現代数学における「根元事象」および「同様に確からしい」

現代数学の確率論（以下，現代確率論）における確率の公理は，次の通りである。

> 要素 ω の集合を Ω とし，Ω の部分集合を要素とする集合族を F とする。ω を根元事象といい，Ω を標本空間（根元事象の空間），F の要素を確率事象（または単に事象）という。
>
> I. F は集合体である。
>
> II. F の各集合 A に，非負の実数 $P(A)$ が定められている。この数 $P(A)$ を事象 A の確率という。
>
> III. $P(\Omega)=1$
>
> IV. 事象 A と事象 B とが共通の要素をもたないとき　$P(A+B)=P(A)+P(B)$
>
> （コルモゴロフ, 2010, pp. 18-19）

現代確率論では，上の公理を満たせば確率であることから，例えば 1 つのさいころを投げるという試行において，標本空間を $\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ とし，それぞれの目が出る確率を $P(\{1\})=\frac{1}{2}$，$P(\{2\})=\cdots=P(\{6\})=\frac{1}{10}$ とすることもできる（逆瀬川, 2004）。また，例えば 2 枚の硬貨を投げて表（H）と裏（T）の枚数を見る試行では，標本空間を $\Omega=\{HH,\ HT,\ TT\}$ とし，各根元事象に確率を $P(\{HH\})=P(\{TT\})=\frac{1}{4}$，$P(\{HT\})=\frac{1}{2}$ のように割り当てることもできる（高橋, 2008）。

このように，確率論は確率を数学として扱うために構築されたものである。それゆえ，確率論は，確率が何を意味するのかについては言及しない（Borovcnik & Kapadia, 2014；高橋, 2008）。公理さえ守られていれば，たとえ現実世界の事象と乖離した確率を設定してもよい。その意味で，現代確率論において「同様に確からしい」という概念は，必要不可欠な概念ではない。

もちろん，確率と呼ばれる数学的対象の一般的な性質の探究ではなく，現実世界における確率を用いた数学的問題解決を目的にする場合は，現実世界の事象とできる限り整合的なモデルを設定することが望ましい。例えばさいころであれば，どの目も他の目より出やすいとする根拠がないと判断された場合，全ての目が出る確率を等確率とすることが妥当である（逆瀬川, 2004)。また先の 2 枚の硬貨の例においては，標本空間を $\Omega=\{HH,\ HT,\ TH,\ TT\}$ とし，各根元事象の確率を $P(\{HH\})=P(\{HT\})=P(\{TH\})=P(\{TT\})=\frac{1}{4}$ と割り当てた方が後々の分析や議論が簡単になることから，根元事象の確率が等確率になるように根元事象を設定することが望ましいとされている（逆瀬川, 2004)。

以上より，学問数学における根元事象とは，[1] 事象を構成する要素一つだけからなる事象と定義され，[2] 所定の公理さえ満たすならば，同様に確からしいことは必須要素ではない。ただし，[3] 現実世界で確率を用いた問題解決を行うにあたっては，後々の分析や議論を簡単にする目的で，同様に確からしい根元事象をモデルとして設定することが望ましいとされる。

３．確率の哲学における「根元事象」および「同様に確からしい」

確率の哲学には，確率の意味についていくつかの立場がある。本稿では，その立場の具体例として，古典的確率論と頻度主義の確率論を概観しよう。

古典的確率論では，確率を次のように定義する。

> いま対象としている確率的現象において，（コイン投げのように）ひとつの結果を導く行動を試行という。試行によって出現可能なひとつひとつの結果を根元事象，すべての根元事象から成る集合 Ω を標本空間，Ω の部分集合を事象という。
>
> 各根元事象が同等に起こりやすいと考えられるとき，事象 A に対して
>
> $$P(A)=\frac{\text{事象}\,A\,\text{に含まれる根元事象の個数}}{\text{標本空間}\,\Omega\,\text{に含まれる根元事象の個数}}$$
>
> を，事象 A の確率という。
>
> （高橋, 2008, p. 3）

上述のように確率が場合の数の比として定義されるため，各根元事象は同様に確からしくなるように区別されなければならない。この背景には，パスカルとフェルマーの手紙に代表されるように，古典的確率論が考案された当時の人々がギャンブルの公平性に関心を

持っていたことが挙げられる（Borovcnik & Kapadia, 2014；ロウボトム, 2019)。2 枚の硬貨を投げて表（H）と裏（T）の枚数を見る先の試行を例にすれば，根元事象は HH, HT, TH, TT の 4 つである。これらは同様に確からしいと考えることができるので，確率はそれぞれ $P(\{HH\})=P(\{HT\})=P(\{TH\})=P(\{TT\})=\frac{1}{4}$ となる。尚，公平性を前提としていることから，古典的確率論では，例えば，1 の目が多く出るように加工されたさいころの 1 の目が出る確率を求めることはできない。

このように古典的確率論では，公理さえ守られていれば確率を自由に決めることのできる現代確率論とは異なり，各根元事象が同様に確からしいことが前提となっている。各根元事象を同様に確からしいとみなす根拠は，考えている事象に依って異なり得る。例えば，硬貨の裏と表の場合は，硬貨の対称性が根拠となる。そのため，古典的確率論における確率の値は，実際に試行して初めて決まる性格のものではなく，理論的に予め定まっている性格のものである。同じ種類に属するすべての事象の一つが，その他のものに優先して生起することをわれわれに確信させる条件が何もないと判断される状態では，それぞれの事象が同じように可能とみなされなければならない。これを，理由不十分の原則という（ギリース, 2004)。

一方，頻度主義の確率論は，一様な試行を無限回繰り返したときの相対頻度の極限を確率と考える。頻度主義の確率論では，多数回の試行の結果が得られる場合に，我々とは独立するものとして客観的かつ容易に確率を決めることができる点で有効である。また確率の公理も満たしている（ロウボトム, 2019)。その一方で，多数回の試行を行うことができない事象については，確率を考えることができない。頻度主義の確率論においては，観測によって確率を決定することから，事象が根元的であるかどうかは問題にならない。そのため，各根元事象が同様に確からしいかどうかも問題にはならない。

以上より，古典的確率論では，試行によって出現可能な各根元事象が同様に確からしくなるように，根元事象を設定する。このとき，同様に確からしいかどうかは，理由不十分の原則に由来している。また，頻度主義の確率論では，一様な試行を無限回繰り返したときの相対頻度の極限を確率と考える。そこでは,「根元事象」や「同様に確からしい」の概念は，考えなくて良い。このことから,「根元事象」や「同様に確からしい」の考え方は，確率の哲学において，特に古典的確率論に特有の考え方であること，そして，いずれの確率の哲学においても共通して,「試行」が，確率の考察に寄与していることが伺える。

４.「根元事象」および「同様に確からしい」に関する確率教育・確率学習の先行研究：数学的モデリングとしての確率観

学校数学の確率は，古典的確率論と頻度主義の確率論に基づいている。特に，確率を計算する場面において，各根元事象は同様に確からしくなるように設定される。ゆえに，生徒にとっては同様に確からしい根元事象を設定することが決定的に重要となる。しかしながら，それは容易ではない。なぜなら，データがない状態で対称性のみに基づいて同様に確からしいとみなさなければならないため，対称性についての直観が不可欠だからである。Borovcnik & Bentz（1991）は，対称性についての直観が関連しなければ，標本空間の概念を理解することは難しいと指摘している。さらに学校数学の確率では，対称性についての仮定を，実際の事象がない状況で経験的・習慣的に導かなければならない（五十嵐・宮川, 2013)。

先に述べたように,「同様に確からしい」は本来，対称性などの理由不十分の原則によって設定される。しかしながら学校数学の確率においては，理由不十分の原則に明示的に触れることなく,「同様に確からしい」とみなさなければならない。五十嵐・宮川（2013, pp. 22-24）を参考に，例として次の［問題 2］を考える。

[問題 2]
1 枚の公平な硬貨を 3 回投げる。
このとき，表が 2 回出て裏が 1 回出る確率を求めよ。

[解 2-1]
全事象は，2･2･2＝8　より，8 通り
このうち，2 枚が表で 1 枚が裏になる場合は，
表表裏，表裏表，裏表表　の 3 通り
よって求める確率は，$\frac{3}{8}$

表２　[問題 2] における仮定

明示的	● 1 枚の公平な硬貨がある。 ● 1 枚の硬貨を 3 回投げる。
暗黙的	● 3 回の表裏の出方をそれぞれ区別する。 ● 硬貨を 3 回投げたときの組み合わせがそれぞれ同様に確からしい。

表 2 より, [問題 2] を解くための 4 つの仮定のうち,

2 つは問題文に明示されていない暗黙的な仮定であり，経験的・習慣的に導かれる仮定である。学校数学における確率にはこのような性格があることから，仮定の設定の仕方によって，確率を求めることができなかったり，確率の値が異なったりする。例えば［問題 2］において，暗黙的な仮定を「3 回の表裏の出方をそれぞれ区別しない」,「硬貨を 3 回投げたときの組み合わせがそれぞれ同様に確からしい」と設定したとする。その場合，硬貨の表裏の組み合わせは,｛表が 3 回，表が 2 回と裏が 1 回，表が 1 回と裏が 2 回，裏が 3 回｝となる。ここで「硬貨を 3 回投げたときの組み合わせがそれぞれ同様に確からしい」という暗黙的な仮定に基づいてモデルを構築すると，それぞれが起こる確率が $\frac{1}{4}$ となり，現実には合わない確率となる。

その一方で Chernoff & Zazkis (2011) は，例えば先の｛表が 3 回，表が 2 回と裏が 1 回，表が 1 回と裏が 2 回，裏が 3 回｝という解答は避けられるべき誤りではないと指摘する。Chernoff & Zazkis (2011) は，各要素が等確率でないが全ての結果を挙げている集合を標本集合（sample set）と呼び，それを生徒が構築することは，生徒が正しく標本空間を構築するための最初の推論方法であるとしている。[問題 2］では,｛表が 3 回，表が 2 回と裏が 1 回，表が 1 回と裏が 2 回，裏が 3 回｝は標本集合である。なぜなら,「表が 3 回」は「表表表」,「表が 2 回で裏が 1 回」は「表表裏，表裏表，裏表表」,「表が 1 回で裏が 2 回」は「表裏裏，裏表裏，裏裏表」,「裏が 3 回」は「裏裏裏」のように，全ての結果を表しているからである。その他にも,｛3 枚連続で同じ面，2 枚連続で同じ面，連続で同じ面は出ない｝も［問題 2］の標本集合である。Chernoff & Zazkis (2011) は，[問題 2］について｛表が 3 回，表が 2 回と裏が 1 回，表が 1 回と裏が 2 回，裏が 3 回｝と答えた生徒に対しては,「その 4 つの要素が起こる可能性は同程度ですか？」と発問することが効果的であるとしている。尚，人間による「同様に確からしい」の判定は，問題の問われ方に影響する。例えば,「1 枚の公平な硬貨を 3 回投げる。このとき,「表表表」と「表裏表」はどちらが起こりやすいか？」と問われれば，多くの人は「表表表」よりも「表裏表」の方が起こりやすいと判断する（松浦，2006; Fischbein & Schnarch, 1997; Tversky & Kahneman, 1971)。正しくは，どちらが起こる確率も $\frac{1}{8}$ であるが，人間は直観的に連続して同じ面が出ることはないと考えてしまう [1])。

以上より，確率教育・確率学習における先行研究を概観すると，[1］学校数学において確率を求めるにあたっては，暗黙的な仮定を経験的・習慣的に導かなければならず，しかも，[2］人間の直観は同様に確からしいの判定を誤る，という現状がある。この状況は，現実的な事象に対して確率を考えるということを，数学的モデリングの一種として捉える（五十嵐・宮川，2013）ことによって，よりよく理解することができよう。すなわち，Blum & Leiß (2007) や Czocher (2018) など,多くの数学的モデリング研究が指摘するように，確率を正しく認識していく過程とは，確率空間という現実事象に対するモデルの構築と，その妥当性の検証を繰り返すことによって，進行し得る。Chernoff & Zazkis (2011) の指摘するような，誤りから理解を深めていくような確率学習の意義は，この観点から理解することができる。

５．意味論上の問題を解消する学校数学における「根元事象」および「同様に確からしい」の概念規定

ここまでの議論を踏まえ，本章では，学校数学において「根元事象」および「同様に確からしい」をどのように捉えることが適切であるか，改めて考えていくことにしよう。

(1) 同様に確からしいことを要請しない「根元事象」

まず，[問題 1］のような同様に確からしい根元事象によって捉えることができない問題は，たとえそうであったとしても，学校数学において扱われるべきであろう。[問題 1］のような，理由不十分の原則の適用が妥当でないような場面においても，現代確率論の視座から確率を用いた意思決定は可能であり，確実な予測が不可能な現代社会において合理的な意思決定ができる生徒を育むためにも，こうした問題を通じた学習は重要であると考えられる（石橋, 2019b)。もちろん,［問題 1］のような学習を通じて，合理的な意思決定者が本当に育めるのかどうかについては，実証的研究を交えながらさらなる検証が必要であるが，そうした研究を可能にするためにも，学校数学には，こうした問題を取り扱える余地を残しておくべきである。また，現代確率論の視座からは取り扱いが可能であるにもかかわらず，古典的確率論の視座から一貫性がないというだけで，何年にも渡って扱うことが常態化していたこうした問題の取り扱いを変更するのは，あまり現実的な選択肢ではないであろう。

こうした状況を踏まえると，この問題に対する 1 つの現実的な解決案としては，学校数学の確率論を，現代確率論を基本としながらも種々の確率論のハイブリッド方式によって規定する方法を挙げることができよ

う（石橋, 2019b)。確率を定義する際に高校生向けにどういう表現を採用すべきかは実証的研究を交えながら別途慎重な検討をするとしても，まず,「確率」の概念としては，同様に確からしいかどうかにかかわらず，ある場面において我々がそれ以上分けることができないと見なすなら，根元事象を考えてよいことにするのがよいであろう。この根元事象を設定する過程が，数学的モデルの構築過程なのである。その上で, [問題 1] のように，具体的な確率の値に対する仮定が直接与えられている場合は，それに基づいて標本空間を考えてよいこととする。

（2）数学的モデリングの観点から見たハイブリッドな確率観

一方, [問題 1] のように具体的な確率の値に対する仮定が直接与えられていない場合は，古典的確率論や頻度主義の確率論など，様々な確率論の考え方を状況に応じて柔軟に援用することが望ましいと考えられる。現実的な事象に対して何らかの標本空間を考え，その標本空間を数学的モデルとして意思決定に活用していくという活動を，先行研究に即して数学的モデリング活動の一種として捉えるならば，どの確率観を採用することが普遍的に妥当であるかを決着させることはできない。どの確率観が与えられた状況において最適であるかは，数学の公理系に基づいて数学的な判断が下せる性質のものではなく, 非数学的な要素も考慮した，状況に応じた総合的判断が必要である。

例えば,「あるサイコロを 1 個振ったときに，どの目が出るのかを考える」としよう。しかし，我々は，この状況説明のみから，どの確率観の採用が妥当であるかを一意的に決定することはできない。

例えば，この状況が,「出た目の数×1,000 円」がもらえるギャンブルについて考えている状況で，かつ，そのギャンブルへの参加料が 3,400 円であるような状況だったとしよう。理由不十分の原則に基づいて，どの目が出るかも同様に確からしいと仮定し，各目の出る確率を $\frac{1}{6}$ と仮定するならば, このギャンブルで得られる金額の期待値は 3,500 円であり，参加料を払う価値があると判断することができる。しかし，胴元の用意した，その特定のサイコロを振らなければならないということが決まっているとすれば，そして，他の人がこのギャンブルに参加している場面を観察することが許されるのだとすれば，我々は，できるだけたくさんの場面を観察し，各目の出る確率がどうなっているかについて，理由不十分の原則ではなく，頻度主義の確率論に基づいて決めたいと思うであろう。期待値の計算は，そうしたデータが潤沢に集まってから再評価されるべきである。

こうした検討を踏まえると，次のことが導かれる。我々は，確率観として，複数の確率観のハイブリッド方式を採用すべきであり，一連のモデリング過程の中で各確率観を状況に合わせて活用すべきである。上の例で言えば,「理由不十分の原則に基づいて求められた期待値 3,500 円が，参加料 3,400 円と金額的にそう大差ないことを根拠に，実際に 1 の目や 2 の目の出る確率が多少高かったら，真の期待値は参加料よりも低いかもしれない」という疑念が，すなわち,「どの目が出ることも同様に確からしいとは言えないかもしれない」という疑念が生じ，それを契機として，確率観を頻度主義の確率論に切り替え，行動をデータ収集へと切り替えるのである。しかし，データ収集はしてみたものの，十分な回数を観察することができず，それを拠り所にするくらいだったら，同様に確からしいと仮定しておいた方がまだ安全な判断ができそうだ，となるならば，もう一度，理由不十分の原則に基づいて算出された期待値を信じることになるであろう。このように,採用すべき確率観は, 計算や実験･観察などを通じて，刻一刻と変化し得る。その意味で，確率観は,「ハイブリッド方式」として受容することが望ましい。

Blum & Leiß (2007) や Czocher (2018) など，多くの数学的モデリング研究は，数学的モデリングの過程の一部として，構築した数学的モデルの妥当性を検証する過程の存在を想定しており，それによって数学的モデルは随時更新されていくものとして見なされている。そういう意味で，確率観を状況に応じて変化させるという問題解決方略は，確率を用いた問題解決が，まさに数学的モデリングによる問題解決の一種であるということを如実に表している。

(3)「同様に確からしい」という肯定形の仮定

上述のハイブリッド方式の確率観は，数学的問題解決における確率観として妥当であるものの，この確率観に基づいて確率の指導を考える場合, 確率の指導は，数学的モデリングの指導と同様の難しさを抱えることになる。例えば，Skovsmose (2019) は，構築した数学的モデルと考察中の現実的な事象との類似性がいつでも判定できるとは限らず，数学的モデリングが誤った判断を誘発する危険性を指摘している。先の例で言えば，「理由不十分の原則に基づいて求められた期待値 3,500 円が, 参加料 3,400 円と金額的にそう大差ない」や「データ収集はしてみたものの，十分な回数を観察することができず，それを拠り所にするくらいだったら，同様に確からしいと仮定しておいた方がまだ安全な判断ができそうだ」という判断は，何ら数学的な根拠を持たない。そもそもこれらの判断が妥当であるか

どうかさえ判然としない部分がある。

また，このことに関連して，数学的問題として正解を一意に定めることができなくなるという問題も生じる。例えば，サイコロを振って偶数の目が出る確率は，標準的には，どの目が出ることも同様に確からしいということと，$n(\{1,2,3\})=3$ であることを根拠に，$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ と求めることになるわけだが，対称性の直観による理由不十分の原則を適用するならば，偶数の目が出ることも奇数の目が出ることも同様に確からしいことを根拠に，いきなり $\frac{1}{2}$ だと言ってしまっても，あながち間違いではないことになる。逆に言えば，対称性の直観が上手く働かず，「1 の面を上にしてサイコロを振った場合と，2 の面を上にしてサイコロを振った場合とでは，1 の面の出やすさが違うかもしれない」と感じた生徒にとっては，上の解答はいずれも正しくない。どの面を上にして投げるかとどの面が出るかを掛け合わせた 36 通りの根元事象を考えないことには，納得することができないかもしれない。

こうした検討から言えることは，「同様に確からしい」とは，肯定形の仮定なのだ，ということである。それは，統計的仮説検定において，「有意差があるとは言えない」と「有意差なし」の意味が異なる。ということと似ている。偶数の目が出ることと奇数の目が出ることについては，同様に確からしいと判断するのに十分な対称性がサイコロに備わっているし，何と言っても，現実にどちらの事象も確率が等しいわけであるから，これら 2 つの事象を「同様に確からしくない」と言うことはできない。それでいて，数学を教える立場として，偶数の目が出ることと奇数の目が出ることを同様に確からしいと判断することが妥当でないと感じるとすれば，あり得る 1 つの要因は，そうした仮定の設け方がひとえに「横着だ」と感じているからに過ぎないのではないだろうか。実際，6 つの根元事象に分けずに確率を考えている生徒がいたとしたら，指導上の懸念として，単に事象が 2 つだから確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ だと思っている可能性も考えられる。きちんとより根元的な事象に分けて考えられているかどうかによって，その生徒の理解状況を評価したいと思うことは，自然なことである。しかし，そうした指導上の事情と数学的な正しさは，本来的には関係がない。

そこで，繰り返しになるが，重視したいことは，「同様に確からしい」という表現が，肯定形の仮定であるということである。「同様に確からしくない」と否定形で断定的に言うことはできないが，「同様に確からしいとは（まだ）言い切れない」，「同様に確からしいと判断するには拙速である」，あるいは，「同様に確からしいかもしれないが，念のため，もう少し事象を細かく分けて検討してみよう」などと，消極的な言い方であれば，常に可能である。そして，こうした同様に確からしいことに対する疑いは，たとえ数学的な理由でなかったとしても，かけることができる。例えば，上で挙げたギャンブルの例であれば，理由不十分の原則に基づいて求められた期待値 3,500 円が，参加料 3,400 円と金額的にそう大差ないという個人の金銭感覚をベースとして，「ギャンブルとして運営している以上，胴元が得をするような期待値設定になっているのではないか，どの目が出るかが同様に確からしいとは言えないのではないか」と，数学的でない理由に基づいて，疑ってかかることが可能である。その後，頻度主義の確率論に基づく確率を算出して，理由不十分の原則に基づいて得られた確率とおおよそ値が一致するなら，「同様に確からしい」と判断していた元々の仮定の信頼性が増し，疑いが解消される。複数の確率観をハイブリッドに採用することは，状況に応じて最適なものを選択するべきだということを含意する同時に，どの数学的モデルを用いても概ね同じ結論が得られるということがトライアンギュレーションの一種として機能するということを含意している。

トライアンギュレーションとは，社会科学において主に使用される用語で，「同じ現象の研究における複数の研究方法論の応用や組み合わせ」(Denzin, 2007, p. 5083) のことである。一般的には，4 種類の基本的なトライアンギュレーションが知られており，(1) 時間，空間，人々に関するデータ・トライアンギュレーション，(2) 単一の観察者よりも複数の観察者の使用からなる，調査者トライアンギュレーション，(3) その現象の解釈において，1 つより多くの理論的スキームを用いることに関する理論トライアンギュレーション，(4) 1 つより多くの方法を利用することを含む方法論的トライアンギュレーションがある (p. 5084)。この考え方を援用すれば，偶数の目が出ることと奇数の目が出ることが同様に確からしいかどうかを疑い，より根元的な事象に分けて考えることは，複数の数学的モデルを通じて結論の妥当性を評価するということであり，トライアンギュレーションの一種として理解することができる。特に，根元事象の捉え方を切り替えたり，異なる確率の哲学に基づいて考えたりする思考方法は，当該の試行をどのような試行として捉えるかを切り替える思考方法であるから，理論的スキームの切り替えに相当しており，理論トライアンギュレーションの一

種として考えることができるであろう。あるいは, 1 つの現象の確率を，古典的確率論に基づき数学的推論のみから求めたり，頻度主義の確率論に基づき実験的に求めたりすることは，研究方法の切り替えに相当しており，方法論的トライアンギュレーションの一種としても考えることができるであろう。

したがって，授業実践として，複数の視点から確率を考えるということに対して，生徒たちをどのように動機付けるかは別途考察が必要だとしても，指導上，我々が次の 2 点を意識しておくことは重要である。[1]「同様に確からしい」ということは，肯定的な仮定であり,「同様に確からしくない」と否定形で断定することはできない。したがって, [2] 確率を用いた問題解決を，数学的モデリングを通じた問題解決の一種だと見なし,「同様に確からしい」ことに対して適宜疑いを持ち，よりよい確率を与える数学的モデルの構築を目指した活動が必要である。

６．概念規定に基づく教材開発

本章では，前章で行った概念規定に基づき,「根元事象」と「同様に確からしい」に対する理解を深める教材例を 3 つ示す。

（1）玉を同時に取り出す

次のような問題を考える。

[問題 3]
袋の中に赤玉 8 個と白玉 4 個が入っている。2 個の玉を同時に取り出すとき，赤玉 1 個，白玉 1 個である確率を求めよ。

一般的には，次のように解き方を想定することができる。

[解 3-1]
赤玉と白玉を合わせた 12 個から 2 個取り出す方法は ${}_{12}C_2$ 通り
赤玉 8 個から 1 個取り出す方法は ${}_{8}C_1$ 通り
白玉 4 個から 1 個取り出す方法は ${}_{4}C_1$ 通り
であるから，赤玉 1 個と白玉 1 個を取り出す方法は ${}_{8}C_1 \cdot {}_{4}C_1$ 通り
よって，求める確率は,

$$\frac{{}_{8}C_1 \cdot {}_{4}C_1}{{}_{12}C_2} = \frac{8 \cdot 4}{\frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1}} = \frac{16}{33}$$

ところが，本稿での考察に基づき，同様に確からしさに疑いを持たせ，数学的モデリングのサイクルを進展させることを企図するならば，生徒達に対して，例えば次のような揺さぶりをかけることができる。「その赤玉と白玉は，どうやって同時に取り出したのか？」と。実際に何名かの生徒に実演させてみてもいいだろう。片手で同時に 2 個つかもうとする生徒や，両手で 1 個ずつ取り出そうとする生徒，料理用のおたまのような，何らかの道具を必要だと主張する生徒など，多様な解釈が得られるであろう。そして，さらに次のように問いかけることができる。「本当に，それらは同時に取り出したことになるのか？もし同時に取り出せていなかったとしたら，確率はどの程度変化するのか？」と。

両手で 1 個ずつ取り出す場合を実際に計算すると，次のようになる。

[解 3-2]
両手で 1 個ずつ同時に取り出すと考え, 12 個から 2 個取り出す方法は ${}_{12}P_2$ 通り
右手で赤玉，左手で白玉を取り出す方法は，${}_{8}C_1 \cdot {}_{4}C_1$ 通り
左手で赤玉，右手で白玉を取り出す方法も，${}_{4}C_1 \cdot {}_{8}C_1$ 通り
であるから，赤玉 1 個と白玉 1 個を取り出す方法は ${}_{8}C_1 \cdot {}_{4}C_1 + {}_{4}C_1 \cdot {}_{8}C_1$ 通り
よって，求める確率は,

$$\frac{{}_{8}C_1 \cdot {}_{4}C_1 + {}_{4}C_1 \cdot {}_{8}C_1}{{}_{12}P_2} = \frac{8 \cdot 4 + 4 \cdot 8}{12 \cdot 11} = \frac{16}{33}$$

このことからわかることは，この設定で同時に取り出すかどうかは，本質的に確率に影響を与えないということである。[解 3-1] において特定された ${}_{12}C_2$ 通りのどの根元事象も同様に確からしいという考えは，理由不十分の原則に由来している。[問題 3] の設定で，すべての生徒が，このときの同様に確からしさを直観できるとは限らない。そこで，上述のような揺さぶりによって，同様に確からしさに対する疑念を抱かせ，同時に取り出した場合から，左右の区別がつけられた形で取り出された場合へと，根元事象をさらに細かく分けて考えることで，一種のトライアンギュレーションとして，より確かな確率を求めることができるようになる。

なお，左右の区別がつけられることにより，同時に取り出すかどうかが，確率の計算に本質的な影響を与えていないことがわかる。加えて，袋から 2 個の玉を真に同時に取り出すとはいかなることかを追究するならば,「そもそも袋の内外の境界がどこなのか？」という疑問や「袋の中で，取り出される 2 個を同時に手でつかみはしたものの，実際に袋の外へ引き出す際に時間差がついてしまった場合は同時に引いたことになるのか？」という疑問など，問題設定を厳密に定

式化する上で生じる解釈上の疑問が多数湧いてくる。しかし，重要なことは，これらの疑問に対する答えがいかようであっても，それは，袋の中から玉を取り出す試行を行う方法や，試行の結果を観察する方法に影響を与えないから，これらの疑問に対する答えは，当該の事象の確率に影響を与えないのである。

（2）引いたけど見ない

次のような問題を考える。

[問題 4]
1 組のトランプ 52 枚の中から 2 枚のカードを順番に引く。1 枚目のカードを引き，何を引いたかは見ずに伏せたまま 2 枚目を引くとき，2 枚目がハートである確率を求めよ。

これは，条件つき確率を用いた問題としてオーソドックスな問題であり，一般的には次のような解法が想定される。

[解 4-1]
1 枚目がハートである事象を A，2 枚目がハートである事象を B とする。
事象 B は，次の 2 つの事象
(i) 1 枚目がハートで，2 枚目もハートである。
(ii) 1 枚目がハートでないカードで，2 枚目がハートである。
の和事象であり，これらは互いに排反である。
よって，2 枚目がハートである確率 $P(B)$ は

$$\frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51}+\frac{39}{52}\cdot\frac{13}{51}=\frac{1}{4}$$

この解法では，まず，1 枚目を引く試行を 1 つの確率空間として捉え，52 枚のうちのいずれかが出る事象がそれぞれ同様に確からしいと仮定されている。次いで，1 枚目がハートの場合とハートでない場合で別々の確率空間を考え，各場合で，51 枚のうちのいずれかが出る事象がそれぞれ同様に確からしいと仮定されている。この解法の中には，都合 3 種類の確率空間が暗黙的に登場している。

ところが，本稿での考察に基づき，同様に確からしさに疑いを持たせ，数学的モデリングのサイクルを進展させることを企図するならば，生徒達に対して，例えば次のような揺さぶりをかけることができる。「その 1 枚目に引いて伏せたカードは，どこに置いたのか？」と。テーブルの上に伏せておくという生徒，誰にも見えないように箱に隠すという生徒など，様々な解釈が出ると予想されるので，「何を引いたかを見ないのならば，どこに置いてもいいのか？」とまとめることができよう。生徒達がそれに納得するならば，教師は次のように問うことができる。「では，引いた 1 枚目は，そのままトランプの束の上に置いたままでもよいか？」と。つまり，よく混ぜたトランプの束の 1 番上のカードに，指で触れはするが，結局は引かず，トランプの束の上から 2 番目のカードだけを引くことを意味する。この考え方に基づけば，次の解法を想定することができる。

[解 4-2]
1 枚目で何を引いたかわからないため，1 枚目を無視して考える。
すると，ハートを引く確率は

$$\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

つまり，1 枚目に引いたカードを見ないのであれば，実質的にそれは引いていないことと同じである。「1 枚目を引く」からといって，トランプの束の 1 番上のカードを引かなければならないわけではなく，上から 2 番目を 1 枚目として引いても何ら問題はない。そうであれば，1 枚目を見ずに 2 枚目を引くというのは，束の 1 番上を引かずに上から 2 番目だけを引くということと同じことである。これは，考察中の試行から，本質的に影響のない操作を捨象して，より単純な確率空間を考えるというアイディアである。根元事象の取り方に一定の自由度があることと，根元事象の設定を数学的モデル化の一種と考えることを踏まえれば，こうしたより単純な根元事象の再設定の過程は，モデル化過程の一種として捉えられるようになる。また，この過程は，異なるモデルを通じて同一の結論を得るという，ある種のトライアンギュレーションにもなっている。

（3）混ぜ方が違うと確率も違う

次のような問題を考える。

[問題 5]
6 個のボールを P, Q, R とかかれた 3 つの箱に分けて入れる。ただし空箱ができてもよい。P の箱にボールがちょうど 1 個入る事象を A とするとき，次の 2 通りの方法で $P(A)$ を求めよう。

[実験 5-1]
図のように地面を 120° ずつ 3 等分して P, Q, R の 3 つの領域を作り，3 領域の真ん中に円錐を置く。このとき，円錐の真上からボールを 1 つずつ落とし，ボールがどの領域に落ちたかでそのボールを入れる箱を決める。

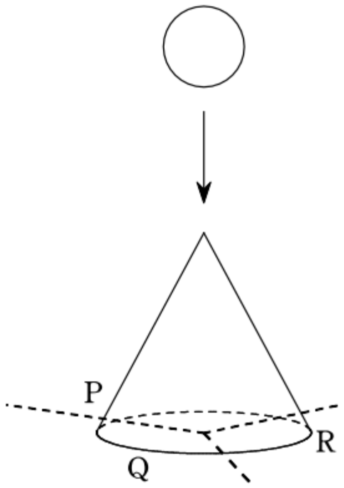

図１　[実験 5-1] の状況

[実験 5-2]

「○」が描かれたカードを 6 枚，「｜」が書かれたカードを 2 枚用意し，よくきってから横一列に並べる。左端からはじめの「｜」のカードまでの間に並んでいる「○」カードの枚数だけボールを箱 P に入れ，はじめの「｜」カードから次の「｜」までの間に並んでいる「○」カードの枚数だけボールを箱 Q に入れる。残りは箱 R に入れる。

例えば図の場合は，箱 P に 2 個，箱 Q に 1 個，箱 R に 3 個ボールを入れる。

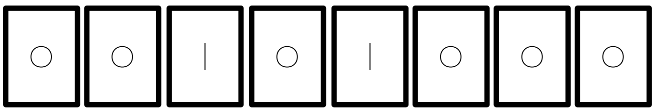

図２　[実験 5-2] のカード

同様に確からしい根元事象を設定するということをきちんと押さえずに，単に無作為に混ぜているという認識しか持っていない生徒は，どちらの実験においても事象 A の確率が等しくなると感じてしまうことであろう。しかし，実際には確率が異なる。

[実験 5-1 の解]

[実験 5-1] での $n(U)$ は，それぞれのボールに対して 3 種類の選択肢があると考え，$n(U)=3^6$

$n(A)$ はどれが P に入るかで 6 通り，残りの 5 個のボールの箱への入れ方が 2^5 であるから

求める $P(A)$ は，

$$P(A)=\frac{6\cdot 2^5}{3^6}=\frac{64}{243}$$

[実験 5-2 の解]

実験 5-2 での $n(U)$ は，8 枚のカードの並べ方であり同じものを含む順列であるので，

$$n(U)=\frac{8!}{6!\cdot 2!}=28$$

$n(A)$ については，カードが左から「○」,「｜」と並んでいれば，残りの 6 枚はどのような並びでもよいので，

$$n(A)=\frac{6!}{5!}=6$$

よって $P(A)$ は，

$$P(A)=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$$

もちろん，[実験 5-1] は反復試行として捉えてもよいし，[実験 5-2] はカード 8 枚の束をシャッフルして 2 枚引いたとき，順に「○」,「｜」と出る確率（すなわち，$\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{7}$ ）と捉えてもよい。各実験で，多様な確率空間を考えることができるが，2 つの実験は同じ結論をもたらす確率空間にはならない。この問題は，同様に確からしいということが，混ぜ方に依存しているという(当たり前だが意識しにくい）ことを如実に表している。

実験方法を決定した段階では，どちらの実験においても同じ確率になると感じていてしまう生徒がいたとしても，それぞれの実験を複数のモデルで分析し，トライアンギュレーションしていくことで，両者の試行の違いに対する理解を深めていくことができると期待できる。

７．結論

本稿では，学校数学において「根元事象」および「同様に確からしい」をどのように捉えるべきかを明らかにすることを目的とし，考察を展開してきた。結果として，次の 3 点を明らかにした。[1] 根元事象を同様に確からしいものに制限する考え方は，確率の考えを現実場面により広く適用する上で制約が大きすぎるため，確率の性質を満たすならば，同様に確からしいかどうかにかかわらず，各根元事象にどのような確率が割り振られていたとしても確率として取り扱うべきである。[2] 「同様に確からしい」とは，常に肯定形の過程であり，「同様に確からしくない」とは言えない。[3] 根元事象を設定し，確率を求めていく過程を数学的モデリングの一種と捉えることで，「同様に確からしい」ことが疑わしい場合や，得られた結論の妥当性が疑わしい場合において，今設定している根元事象よりも根

元的な事象を考えたり，異なる確率の哲学に基づいて確率を求め直したりする過程を，数学的モデリング・サイクルの一部であると見なすことができるようになる。また，この過程は，トライアンギュレーションの一種であると見なすことで，より確度の高い結論を得るための過程であると見なすことができる。

本稿では，この捉えに基づいて，具体的な教材例を3つ示した。これらの教材例は，「根元事象」と「同様に確からしい」の概念的理解を深めることを企図した教材となっており，異なる確率の哲学に基づいて多角的に現象に対する理解を深めていくことを企図したものではないが，これまでの学校数学における確率観を払拭し得るための具体的アイディアを提供できたと言えよう。

今後の課題は，次の2点である。第一に，本稿の議論は，「根元事象」と「同様に確からしい」という2つの概念の局所的な話題に留まってしまった。確率単元全体の設計についての議論との関連を精査する必要があるであろう。第二に，本稿は教材の素案を示したにすぎず，具体的に授業実践との結びつきがまだ十分ではない。本稿の示した教材が授業実践としてどのように活用され得るかについての分析は，稿を改めて報告したい。

註

1）生徒が「表表表」と「表裏表」を連続して同じ面が出ると捉えているのではなく，「表が3回」と「表が2回と裏が1回」と捉えているのであれば，「表表表」よりも「表裏表」の方が起こりやすいとする生徒の判断は正しいことになる。しかしながら Chernoff, Vashchyshyn, & Neufeld (2018) の調査の結果，先行研究で指摘されているように，生徒は「「表表表」と「表裏表」はどちらが起こりやすいか？」と問われた場合は連続するものを比較し，「「表が3回」と「表が2回と裏が1回」はどちらが起こりやすいか？」と問われた場合は事象を比較していることが明らかになっている。

付記

本研究の一部は，JSPS 科研費（課題番号: 18K13162, 20K22188）の助成を受けて行われた研究の成果に基づいている。

引用および参考文献

五十嵐慶太・宮川健（2013）.「学校数学における確率を捉える枠組みの一提案: 数学的モデルとしての確率という視点から」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, 第95巻, pp. 17-24.

石橋一昴（2019a）.「数学教育の確率単元における根元事象に関する暗黙的な仮定」.『日本科学教育学会年会論文集』, 第43巻, pp. 572-575.

石橋一昴（2019b).「確率解釈の形成を志向する確率カリキュラム開発」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第25巻，第2号，pp. 11-25.

岡部恒治ほか17名（2017).『改訂版　高等学校数学A』. 数研出版.

岡本和夫ほか10名（2017).『数学A 改訂版』. 実教出版.

ギリース, D. (2004).『確率の哲学理論』. 中山智香子（訳). 日本経済評論社.

コルモゴロフ, A. N. (2010).『確率論の基礎概念』. 坂本實（訳). ちくま学芸文庫.

逆瀬川浩孝（2004).『理工基礎 確率とその応用』. サイエンス社.

高橋幸雄（2008).『確率論』. 朝倉出版.

高橋陽一郎ほか29名（2017).『詳説 数学A 改訂版』. 啓林館.

高橋陽一郎ほか29名（2018).『詳説 数学A 改訂版』. 啓林館.

松浦武人（2006).「児童の確率判断の実態に関する縦断的・横断的研究」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第12巻, pp. 141-151.

松原望（2013).『松原望 統計学』. 東京図書.

ロウボトム, D. P. (2019).『現代哲学のキーコンセプト 確率』. 佐竹佑介（訳). 岩波書店.

Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., & Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*. Switzerland: Springer International Publishing.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do Students and Teachers Deal with Modelling Problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modeling: Education, engineering, and economics - ICTMA 12* (pp. 222–231). Cambridge, U.K.: Woodhead Publishing.

Borovcnik, M., & Bentz, H. (1991). Empirical research in understanding probability. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: probability in education* (pp. 73–105). Dordrecht: Kluwer.

Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2014). A Historical and Philosophical Perspective on Probability. In E. J. Chernoff, & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic*

Thinking: Presenting plural perspectives (pp. 7-34). Springer.

Chernoff, E. J., & Zazkis, R. (2011). From personal to conventional probabilities: From sample set to sample space. *Educational Studies in Mathematics*, *vol.77*, pp. 15-33.

Chernoff, E. J., Vashchyshyn, I., & Neufeld, H. (2018). Comparing the relative probabilities of events. In C. Batanero & E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics* (pp. 277-291). Cham, Switzerland: Springer.

Czocher, J. A. (2018). How does validating activity contribute to the modeling process? *Educational Studies in Mathematics*, *vol.99*, no.2, pp. 137–159.

Denzin, N. K. (2007). Triangulation. In G. Ritzer (Ed.), *The Blackwell Encyclopedia of Sociology* (pp. 5083–5088). New Jersey, U.S.: Blackwell publishing.

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *vol.28*, no. 1, pp. 96-105.

Lee, H. S. (2018). Probability concepts needed for teaching a repeated sampling approach to inference. In C. Batanero & E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics* (pp. 89-101). Cham, Switzerland: Springer.

Skovsmose, O. (2019). Crisis, Critique and Mathematics. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, no.35. http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/centres/stem/publications/pmej/. (2020 年 12 月 16 日 最終閲覧)

Tversky, A., & Kahneman, D. (1971). Belief in the law of small numbers. *Psychological Bulletin*, *vol.76*, no.2, pp. 105-110.