

因数分解を対象とした作問学習演習システムの設計開発と実験的利用

榎本 浩義*, 林 雄介*, 平嶋 宗*

Design, Development and Experimental Use of Problem-Posing Exercise System for Factorization

Hiroyoshi ENOMOTO*, Yusuke HAYASHI*, Tsukasa HIRASHIMA*

1. はじめに

本研究では、因数分解を対象とした作問学習演習システムを設計開発し、大学生を対象に実験的利用を行った。本システムは、中学校範囲の公式に基づく例題提示機能、因数分解の作問学習機能、作問結果診断とフィードバック、およびログ機能を実装している。この実験的利用を通じて、設計意図に沿った因数分解問題の作問活動が行われたこと、および、大学生対象ではあるものの学習効果があったこと、を示唆する結果が得られた。これらの結果は、本システムを実践利用するうえでの基礎となる価値があると考え、本稿で報告する。

2. 因数分解の重要性と学習上の困難

因数分解は数学を学ぶうえで基本的な学習課題とされており⁽¹⁾⁽²⁾、方程式を解くうえで不可欠な代数処理の技能であるだけでなく、構造変換である式変形を通じて思考を振り返り新たな関係の発見へとつながること⁽³⁾、もその意義とされている。

しかしながら、因数分解を学ぶ中学生、および高校生に関しても、その習得は必ずしも十分なものとなっていない事例もあるとされており⁽¹⁾⁽³⁾、中学生レベルの問題でなければ正答が難しい大学生が多くいることが報告されている⁽⁴⁾。

上述の指摘⁽¹⁾では、因数分解ができない学習者は、知識として知っている因数分解の手法を問題に応じて使い分けられない、また、因数分解の手法間の関連が理解できていないという特徴があるとしている。因数分解の手法とは、共通因数くくり出しを含む基本の公式群のことであり、因数分解ができない学習者は、ある問題を見たときどの公式を使えばよいか分からないといえる。因数分解の公式は因数分解の解法であるといえるので、因数分解の困難さは、解法同定の難しさ⁽⁵⁾であるといえることができる。

解法同定過程についての習熟を促進する方法としては、解法を用いて答えを導く問題解決演習を行うことが一般的な方法となっており、因数分解においても同様である。しかしながら、問題解決演習だけでは解法同定過程の習熟においては必ずしも十分ではないとの知見はこれまでもさまざまな学習課題において指摘がなされている。この不十分さに対する対応策の一つとして問題を作ることによる学習が有効であるとされており、盛んに研究が行われている^{(6)~(8)}。算数・数学の範囲に限ってみてもさまざまな学習課題への適用がみられる^{(9)~(13)}。

本研究は、このような考察に基づき、作問学習を因数分解においても適用する試みである。これまでも因数分解において作問が有効であるとの見込みから、実践を試みた事例が報告されているが⁽¹⁴⁾、学習方法として普及しているとはいえず、システム化の例も著者

* 広島大学大学院工学研究科 (Graduate School of Engineering, Hiroshima University)
受付日: 2019年7月31日; 再受付日: 2019年11月9日; 採録日: 2020年1月10日

らの研究⁽¹⁵⁾ 以外にはみられない。これは、作問学習全般の実施上の困難さとしての「作成された問題の診断・フィードバックの実現の困難さ」だけでなく、因数分解特有の困難さとして、「因数分解からの作問」の存在があるからと考えられる。ある公式（解法）に従って因数分解可能な数式を作成することが因数分解の作問となるが、「因数分解からの作問」とは因数分解済みの数式をまず作成し、それを展開することで因数分解の対象となる数式を作成するといった作問法である⁽¹⁴⁾。

このような考察に基づき、本研究では、解法ベースの作問と問題ベースの作問⁽¹⁶⁾、の混合作問とすることで、(1) 診断・フィードバック、(2) 展開を行わせない作問、を実現している。具体的には、まず(I) ある因数分解の公式について例題と解法を示す。次に、(II) その公式が適用できず因数分解できない問題を示し、公式が適用できるように問題を変更させる。

ある公式に従って因数分解可能な数式を作ることが因数分解作問学習の意義とすると、実践事例⁽¹⁴⁾ のような、作る問題が備える条件を指示せず、紙面上で行う作問は、公式の適用に学習者の意識を向けさせることは難しい点、作った数式が因数分解可能かすぐにはわからない点、さらに、展開による作問を防止できない点で問題がある。本研究で行う混合作問は、与えた式を変更する作問とすることで、作問学習の意義は

維持したうえで、システムによる診断・フィードバックと、展開を行わせない作問課題、を実現しており、因数分解作問学習を成立させるうえで有効な手段と考えられる方法である。

3. 因数分解作問学習とシステム設計

本研究システムによる因数分解作問学習演習の流れを述べる。最初に行うのは、因数分解演習である(図1)。これは、以降に行う作問演習の前提となる、因数分解の計算問題である。学習者は、因数分解の計算問題を、提示された例題の計算方法に従って解く。図1の例では、例題とその解き方 $2x+2y=2(x+y)$ 、および学習者が解くべき問題 $3x+3y$ が提示されており、学習者は例題に沿って共通因数くり出しの公式を使って解答を計算し、 $3(x+y)$ を入力する。解答入力後は答え合わせのボタンを押すとシステムによって正誤判定が行われ、正解なら正解フィードバック、誤りなら誤りのフィードバックが返される。誤りのフィードバックの例は、解答の計算間違いの指摘、作問演習(後述)における問題変形の誤りの指摘などである。

次に行うのが、作問演習である。作問演習では図2のように因数分解演習と同じ例題が示されており、提示された数式を例題と同じ公式を用いて因数分解できるように変形する。図2は、例題とその解き方 $2x+$



図1 因数分解演習



図2 作問演習1

$2y=2(x+y)$, および学習者が変形すべき問題 $4x+5y$ が初期表示された後, 例題に沿って共通因数くり出しの公式が使えるよう, 問題を $5x+5y$ と変形し, 解答として $5(x+y)$ を入力した例である. この作問演習は, 1カ所だけ変形して1問作成する作問演習1と, 2カ所以上変形することを求める作問演習2が用意されている. この作問は, 元の問題を変形することから, 問題ベースの作問であるといえ, また, 特定の解法が適用可能な問題を作るという意味において解法ベースの作問であるともいえる.

システムでは, 中学校範囲の公式を取り扱っており, 対応している公式は, 共通因数くり出し $ax+ay=a(x+y)$, 二次式の因数分解 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$, 平方の差 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$, 平方の公式 (和と差の場合) $x^2\pm 2ax+a^2=(x\pm a)^2$, の5種類である.

システムは Kotlin で実装した Android タブレットアプリケーションであり, サーバやネットワーク環境を必要とせず単独で利用可能である. 学習者による問題変形操作, 解答入力操作, システムによる正誤判定結果とフィードバックの内容, およびそれらの時刻はログとしてタブレット内に保存されており, 後の分析に利用できる.

4. 実験的利用

4.1 利用手順

本演習システムの実験的利用を, 工学系の大学生, 大学院生 17 名に対して実施した. 本実験の目的は, システムの設計意図に沿った作問活動を行うことができるかどうかを調べることである. また, 学習済みのはずの大学生でも因数分解の能力が高くないとの報告に基づき, 学習効果が観測できるかどうかも調べた.

利用の手順は, プレテスト, システム利用, ポストテスト, アンケートである. これらを連続して行い, 時間配分は, プレテスト 19 分, システム利用 20 分, ポストテスト 19 分, アンケート記入 5 分程度, である. プレテスト, ポストテストはペーパーテストで, 内容と時間配分は, (1) 因数分解テスト 5 分, (2) 変形作問テスト 10 分, (3) 説明テスト 2 分, (4) 因数分解作問テスト 2 分, である.

(1) 因数分解テストでは, 中学レベルの問題 1 問 (例: $x^2+7x+12$), 高校レベルの問題 4 問 (例: $x^2+xy-2y^2+y+6+5x$) を解かせた. (2) 変形作問テストは, システムで演習するような変形作問を行うテストである. 因数分解できない問題 (例: x^2-10) を提示し, 1 個の項を, 変更, 追加, 削除することにより, 因数分解できる問題を 4 問作らせた. 提示する例題は二つあり, 8 問作問できれば満点となる. 変形の仕方によって, 演習で用いた公式で解ける問題も,

それとは別の公式が必要となる問題も作れるようになっているが、どの公式が使える問題を作るかは指示していない。これにより、システムによる演習内容の定着度合いや、演習がもたらした効果を測ることを意図している。

(3) 説明テストは、計算テストの問題のうち1問を取り上げ、それをどのように解いたかを自由記述で説明させるものである。システム利用を通じて因数分解のやり方の理解が変容したなら、それを測ることができると考えた。(4) 因数分解作問テストは、因数分解の問題を複数(4問)作るテストである。システムを用いて因数分解作問の練習をしたので、ポストテストでは作問成績が向上するか測ろうとした。また、因数分解の作問では、因数分解できない問題の作問や解答の展開による作問がみられることから⁽⁸⁾、同様の作問が発生するかも確認しようとした。プレテストとポストテストで使う因数分解課題については、記憶の影響を考慮し、文字や係数を変え、項の順番を入れ替えて、出題順もランダムにしたが、因数分解としての処理は同じとしており、難しさを等しいと仮定している。

4.2 システム利用状況

システム利用では、問題1として共通因数くくり出しの公式、問題2として、二次式の公式の因数分解を取り組ませた。各問題には三つの演習があるので、6回正解すれば完了できる。システムのログから、17名全員が演習を完了していた。正解の数は17名平均で8.65個、誤り回数は平均3.94回であった。作問学習は複数の正解がありうるため、時間があれば再度取り組むよう指示したので、正解の数は6個以上ある。

正解までに要した解答の数(答え合わせのボタンを押下した回数)を要解答数とし、(正解数+誤り数)/正解数、で計算すると、因数分解演習、作問演習1、作問演習2の平均値は、それぞれ1.09, 2.28, 1.26であった。因数分解演習は計算問題であるため、作問演習1に比べて単純である。作問演習1、作問演習2については、後者は問題式の変形個所が増えることで難しい作問演習となっている。しかし要解答数は減少しており、作問演習に対する慣れの影響も考えられる

が、ある公式に従って因数分解可能な数式を作るという演習をより上手に行えるようになっていることが示唆される。

本システムの作問操作は、システムが提示する選択肢を選ぶことによって行う。したがって、公式が適用できるか、因数分解可能かの考慮なしに、適当な作問と答え合わせを繰り返すランダムな作問操作が可能である。例えば、図2に示す「 $4x+5y$ 」からの作問であれば、用意された選択肢を選ぶことにより、ランダムに32パターンの問題を作ることができ、そのなかに2個正解($4x+4y$, $5x+5y$)が含まれるが、要解答数からは、作問操作はランダムでないことがうかがえ、ログ上でも、そのような操作はみられなかった。さらに、問題式を変形後、解答入力、答え合わせを直ちにはせず、複数の変形を試行しながら、因数分解可能になった時点で解答入力、答え合わせをする操作が利用者全員のログ上においてみられ、システムの設計意図に沿った作問活動が行われていることが示唆される。

4.3 プレテスト・ポストテスト

(1) 因数分解計算テストについて、中学生レベルの問題では、プレテスト正解率は80.0%、ポストテスト正解率は65.0%であった。正解率の下降がみられるが、ウィルコクソンの符号順位検定(以降の検定はこの方法による)を行ったところ、有意差はなかった。高校生レベルの問題では、プレテストの正解率は47.5%、ポストテストの正解率は53.8%で、有意差はなかった。高校生レベルの問題では正解率が低いですが、大学生においても因数分解を学習対象とする意味があることを示唆しており、大学生に高校生レベルの因数分解を解かせたほかの研究⁽⁴⁾と同様の結果といえる。

(2) 変形作問テストの結果を表1に示す。このテストの評価は、公式レベルで異なる問題が何問作れ

表1 変形作問テスト

		プレ	ポスト	p 値 (z 値)
平均作問数 ($n=17$)		3.88	4.35	0.14148 (1.47029)
内訳	学習作問	2.35	2.35	1.00000 (0.00000)
	転移作問	1.53	2.00	0.04232* (2.03041)

* $p < 0.05$

表2 因数分解作問テスト

	プレ	ポスト	p 値 (z 値)	
平均作問数 (n=17)	1.88	2.59	0.01128* (2.53396)	
内訳	因数分解できない作問	0.71	0.88	0.46307 (0.73380)
	展開による作問	0.29	0.53	0.10881 (1.60357)
	公式そのままの作問	0.18	0.059	0.42268 (0.80178)
	因数分解可能で、複雑といえる作問	0.71	1.12	0.04995* (1.96039)

*p<0.05

たかを数えた。公式レベルで異なる問題とは、例えば x^2+4x+3 と x^2-9 のように異なる方法で因数分解できる問題である。作問できた数は、プレテストでは3.88問、ポストテストでは4.35問で、有意差はなかった。また、演習で用いていない公式の作問数が有意に増加した。これは、演習の学習効果が記憶レベルではなく、方法レベルであることを示唆している。

(3) 説明テストでは、(i)説明の文字数、および(ii)説明文に含まれる因数分解ができる条件への言及の個数、を調べたが、顕著な差は見られなかった。言語化において観察できるほどの変化がなかったことが示唆される。

(4) 因数分解作問テストの結果を表2に示す。作問テストは、因数分解の問題を4問作るテストで、4問作成できれば満点である。大学生を対象として学習効果を測ろうとしたので、難しい問題を作るという指示をした。作問された問題の数をみると、プレテストでは一人当たり平均1.88問、ポストテストでは2.59問と増加しており、有意差があった。作られた問題のなかには因数分解できない問題が含まれており、プレテストでは平均0.71問、ポストテストでは0.88問がそのような問題であった。展開による作問もみられ、プレテストでは0.29問、ポストテストでは0.53問存在した。さらに、難しい問題を作るという指示にはそぐわない、公式をそのまま問題とした作問もみられた。作問された問題の数から、因数分解できない作問、展開による作問、公式そのままの作問を除くと、因数分解可能で、複雑といえる作問となるが、この作問の数は、プレテストでは0.71問、ポストテストでは1.12問となり、有意に増加した。以上から、システムの利用後は単純な方法による作問の増加もあるが、より深く考える作問が増加していることが示唆さ

れる。このことは、大学生対象でも学習効果が見込めることを示唆していると考えられ、本研究で設計開発した因数分解作問学習演習に一定の効果があることを示す結果とみなせる。

4.4 アンケート

アンケートでは6問の質問を4件法で回答してもらった。質問の内容、肯定的回答の割合を次に示す。(Q1) システムは、使いやすかった (90%)、(Q2) 問題の変形あるいは計算を間違えた場合、どこを間違えたかすぐにわかった (55%)、(Q3) 問題の変形あるいは計算を間違えた場合、どういう間違いをしたかすぐにわかった (60%)、(Q4) 因数分解できない問題を因数分解できるようにすることは、簡単だった (95%)、(Q5) 因数分解できるようにする演習は、因数分解をする上で役に立つ (90%)、(Q6) 演習を通じて、因数分解に対する理解が深まった (75%)。

この結果からは、大学生の主観的感想ではあるが、システムによる因数分解作問学習演習が実行可能な演習で、因数分解を学習するうえにおいても有益な活動であることが示唆され、実践利用への手がかりが示されたと考えられる。Q2, Q3の肯定的回答が他の質問と比較して高くないことから、フィードバックの洗練は今後対応していくべき課題と考えられる。

5. まとめ

本研究では、因数分解の作問学習システムを設計開発し、実践利用の予備実験として、大学生対象の実験的利用を行った。システム利用状況の分析から、設計意図に沿った作問活動が行えていることが確認できた。プレテスト、ポストテスト結果からは、システム

で演習した内容の定着が確認できた。アンケート結果も、システムによる演習が実行可能で、因数分解作問学習を行うツールとしての有効性を裏づけるものであった。これらの結果は、本システムの教育現場での実践利用の可能性を示している。

今後、中学校授業におけるシステム利用を行い、実践を通した学習効果の確認を行う。さらに、中長期的な利用による総合的な計算力向上についても検証していく必要がある。

付記

本稿は、榎本ら⁽¹⁵⁾の原稿をもとに作成しており、その著作権は人工知能学会にある。

参考文献

- (1) 南郷 毅：“因数分解指導における視覚化について”，弓削商船高等専門学校紀要，No. 38, pp. 45-49 (2016)
- (2) 秋田県総合教育センター：“秋田県の算数・数学科学学習の現状 算数・数学科における「基礎・基本」”，研究紀要，第34集，4分冊-2, pp. 24-31, (2003)
- (3) 根本 博：“「中学校学習指導要領」改訂作業から見た学校教育における数学学習の必要性に関する考察”，イブシロン，Vol. 41, pp. 17-23 (1999)
- (4) 中村勝之：“数学の基礎学力と経済学理解度との関係について (1)—『経済学基礎理論A』の成績データを用いた実証分析—”，桃山学院大学総合研究所紀要，Vol. 33, No. 2, pp. 15-27 (2007)
- (5) 平嶋 宗，中村祐一，池田 満，溝口理一郎，豊田順一：“ITSを指向した問題解決モデルMIPS”，人工知能学会誌，Vol. 7, No. 3, pp. 475-486 (1992)
- (6) 山岸芳夫：“「プログラミング基礎」における作問学習の実践”，KIT Progress, No. 26, pp. 91-100 (2018)
- (7) 岩崎千晶，柴 健次：“学生同士による問題作成を取り入れた会計教育におけるモバイルラーニングの授業設計と組織的支援の構築”，関西大学高等教育研究，Vol. 6, pp. 11-19 (2015)
- (8) 小林郁典，上田伊佐子，森田敏子：“オンライン型オフィススイートを利用した作問課題”，大学教育研究ジャーナル，No. 16, pp. 8-17 (2019)
- (9) Silver, E. A.: “On mathematical problem posing”, For the Learning of Mathematics, Vol. 14, No. 1, pp. 19-28 (1994)
- (10) 中野 明，平嶋 宗，竹内 章：“「問題を作ることによる学習」の知的支援環境”，電子情報通信学会論文誌D-1, Vol. J83-D-I, No. 6, pp. 539-549 (2000)
- (11) 横山琢郎，平嶋 宗，岡本真彦，竹内 章：“単文統合としての作問を対象とした学習支援システムの設計・開発”，教育システム情報学会誌，Vol. 23, No. 4, pp. 166-175 (2006)
- (12) 東本崇仁，市 将治，平嶋 宗，竹内 章：“多桁減算を対象とした作問学習支援環境の設計・開発”，日本教育工学会論文誌，Vol. 31, No. 1, pp. 61-68 (2007)
- (13) 榎本浩義，林 雄介，平嶋 宗：“算数計算式の構造的理解の促進を指向した工夫計算の作問学習演習システムの設計開発と実践の利用”，電子情報通信学会論文誌D, Vol. J101-D, No. 12, pp. 1527-1538 (2018)
- (14) 沖山義光：“因数分解の指導法の試み”，神奈川大学心理・教育研究論集，No. 30, pp. 35-40 (2011)
- (15) 榎本浩義，林 雄介，平嶋 宗：“因数分解を対象とした作問学習演習システムの設計開発と実験的利用”，人工知能学会研究会資料SIG-ALST-B901, pp. 6-11 (2019)
- (16) 平嶋 宗：“「問題を作ることによる学習」の分類と知的支援の方法”，教育システム情報学会研究報告，Vol. 20, No. 3, pp. 3-10 (2005)