学位論文要旨

Optimal leading term of solutions to wave equations with strong damping terms

(強摩擦項をもつ波動方程式の解の最適主要項)

氏名　　　道久　寛載

強摩擦項をもつ波動方程式の初期値問題

$$
\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbf{R}^n \end{cases} \tag{1}
$$

を扱う．ここで, $n \geq 1$ とし, u_0, $u_1 \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^2(\mathbf{R}^n)$ とする．Fourier 空間での形式的な解表示

$$
\hat{u}(t,\xi) = E_0(t,\xi)\widehat{u_0} + E_1(t,\xi)\left(\frac{|\xi|^2}{2}\widehat{u_0} + \widehat{u_1}\right), \tag{2}
$$

$$
E_0(t,\xi) = e^{-\frac{t|\xi|^2}{2}} \cos\left(\frac{t|\xi|\sqrt{4-|\xi|^2}}{2}\right), \quad E_1(t,\xi) = e^{-\frac{t|\xi|^2}{2}} \frac{\sin\left(t|\xi|\sqrt{4-|\xi|^2}/2\right)}{|\xi|\sqrt{4-|\xi|^2}/2}
$$

をもとに解の漸近解析を行う．特に, 解の主要部と最適漸近評価について論じる．

すでに, L^2 ノルムに関する解の最適な時刻無限大爆発/減衰評価については [1], [2] によって議論されている．以降, $L^{1,1}(\mathbf{R}^n)$ は 1 次の重み付き L^1 と空間する．また, 簡便のため

$$
P_i := \int_{\mathbf{R}^n} u_i(x)\,dx, \qquad i = 0, 1
$$

とおくことにする．

定理 1. ([1],[2]) $n \geq 1$ とし, u を $u_0 \in H^1(\mathbf{R}^n) \cap L^{1,1}(\mathbf{R}^n)$, $u_1 \in L^2(\mathbf{R}^n) \cap L^{1,1}(\mathbf{R}^n)$ に対する (1) の解とする．このとき,

$$
\begin{aligned}
C_1^1|P_1|\sqrt{t} &\leq \|u(t,\cdot)\|_2 \leq C_2^1\sqrt{t}, && n = 1, \\
C_1^2|P_1|\sqrt{\log t} &\leq \|u(t,\cdot)\|_2 \leq C_2^2\sqrt{\log t}, && n = 2, \\
C_1^n|P_1|t^{-\frac{n}{4}+\frac{1}{2}} &\leq \|u(t,\cdot)\|_2 \leq C_2^n t^{-\frac{n}{4}+\frac{1}{2}}, && n \geq 3
\end{aligned}
$$

が十分大きな $t > 0$ に対して成立する．ここで, $C_1^n > 0$ $(n \geq 1)$ は t と初期値に依存しない定数であり, $C_2^n > 0$ $(n \geq 1)$ は t に依存しない定数である．

しかし, 下からの評価に現れる P_1 がゼロの場合には, 再び上のレートが最適かという問題に直面する．それに関するひとつの解答が, 発展作用素の高次展開と第 2 漸近形に関する精密な積分評価により, 以下のように与えられる．

定理 2. ([3]) $n \geq 1$ とし, $u_0 \in L^2(\mathbf{R}^n) \cap L^1(\mathbf{R}^n)$, $u_1 \in L^2(\mathbf{R}^n) \cap L^{1,1}(\mathbf{R}^n)$ のもと, (2) で定義される $\hat{u}$ を考える. このとき,

$$\begin{aligned} &\left\| \hat{u}(t,\cdot) - \left(\int_{\mathbf{R}^n} u_1(x)\,dx \right) e^{-\frac{t|\xi|^2}{2}} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \right\|_2 \\ &\geq C \sqrt{ \left(\int_{\mathbf{R}^n} u_1(x)\,dx \right)^2 + \sum_{j=1}^n \left(\int_{\mathbf{R}^n} x_j u_1(x)\,dx \right)^2 + \left(\int_{\mathbf{R}^n} u_0(x)\,dx \right)^2 } t^{-\frac{n}{4}} \end{aligned} \tag{3}$$

が十分大きな $t > 0$ に対して成立する. ここで, $C > 0$ は t に依存しない定数である. さらに, $P_0 = 0$ または $P_1 = 0$ のとき, $C > 0$ は初期値に依存しないが, そうでない場合には体積比 P_0/P_1 に依存する.

定理 1 の 3 つの不等式の最左辺に比べて, 定理 2 の不等式の右辺は真に正になる可能性が高い. 実際に不等式 (3) は, $P_1 = 0$ の場合でも P_0 もしくは u_1 の 1 次モーメントのいずれかがゼロでない限り意味をもつ. また, (3) に加えて

$$\left\| \hat{u}(t,\cdot) - \left(\int_{\mathbf{R}^n} u_1(x)\,dx \right) e^{-\frac{t|\xi|^2}{2}} \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \right\|_2 \leq CI(u_1,u_0)(1+t)^{-\frac{n}{4}}, \qquad t > 0 \tag{4}$$

も得られる. ここで, $I(u_0,u_1) := \|u_0\|_1 + \|u_1\|_{1,1} + \|u_0\|_2 + \|u_1\|_2$ である. したがって, u_0 の体積と u_1 の 1 次までのモーメントの $(n+2)$ 個の諸量のうち, いずれか 1 つでも消失していない限り, 評価式 (3)-(4) は, 解と主要部との最適な漸近評価を与えている.

参考文献

[1] R. Ikehata, *Asymptotic profiles for wave equations with strong damping*, J. Diff. Eqns. **257** (2014), 2159–2177.

[2] R. Ikehata and M. Onodera, *Remarks on large time behavior of the L^2-norm of solutions to strongly damped wave equations*, Diff. Int. Eqns. **30** (2017), 505–520.

[3] H. Michihisa, *Optimal leading term of solutions to wave equations with strong damping terms*, Hokkaido Math. J., in press.