論文審査の要旨

博士の専攻分野の名称	博　士（　理学　）	氏名	杉山　俊
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1・2 項該当		

論文題目

Generalized Cousin-I condition and intermediate pseudoconvexity in a Stein manifold

（Stein 多様体での一般化された Cousin-I 条件と中間的擬凸性）

論文審査担当者

主　　査	教　授	阿部　誠
審査委員	教　授	吉野　正史
審査委員	教　授	下村　哲（教育学研究科）
審査委員	准教授	平田　賢太郎

〔論文審査の要旨〕

Rothstein（1955）により，初めて，中間的な擬凸性，すなわち，一般位数 q の擬凸性が考察され，また，Andreotti・Grauert（1962）による一般位数 q の（正則）完備性をもつ複素空間に対するコホモロジー消滅定理が証明されて以降，各種の一般位数 q の擬凸性・正則凸性の概念が導入されるとともに，それらの関係が研究されてきた．特筆すべきことのひとつは，最も基本的な複素 Euclid 空間 $\mathbb{C}^n$ 内の開集合に限定した場合であっても，一般位数 q の擬凸性から一般位数 q の完備性が導かれるわけではなく，このことは，Levi の問題に関する岡（1953）の定理の状況，すなわち，$q = 1$ の場合の擬凸性・正則凸性・Stein 性の関係とは異なった様相を呈していることである．

このような背景の下に，本論文の著者は，高次の層係数コホモロジー群に関する消滅性よりも弱い条件を設定することにより，一般位数 q の完備性よりも弱い条件である一般位数 q の擬凸性を導く可能性を追究し，その過程において，新しい定理を得ることに成功し，同時に，これらの問題の考察に対する新しい道筋を加えた．本論文の内容は以下のとおりである．

まず，自然数 n，q について $1 \leq q \leq n-1$ として，$\mathbb{C}^n$ の開集合

$H = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^{n-q} \mid |z_1| < 1, |z_2| < b\} \cup \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^{n-q} \mid c < |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$

を考える．ただし，$0 < b < 1$，$0 < c < 1$ としておく．さらに，n 重単位円板を P と書き，対 (H, P) を $(q, n-q)$ Hartogs 図形ということにする．n 次元複素多様体 S の開集合 D について，$(q, n-q)$ Hartogs 図形 (H, P) と単射正則写像 $\Phi : P \to S$ で $\Phi(H) \subset D$ をみたすものが与えられたとき，つねに $\Phi(P) \subset D$ が成り立つならば，D は S において q 擬凸，あるいは，藤田（1990）に従って，D は S 内の位数 $n-q$ の擬凸開集合であるという．一般位数 q の擬凸性の定義にはいくつかあるが，S が Stein 多様体の場合に限定すれば，それらは概ね同値な概念である．

本論文において，まず，$\mathbb{C}^n$ 内の開集合 D について，D が位数 $n-q$ の擬凸開集合であるためには，$(q, n-q)$ Hartogs 図形 (H, P) と全単射 $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ について，Φ のすべての成分，および Φ^{-1} のすべての成分が n 変数の 2 次関数であり，かつ $\Phi(H) \subset D$

をみたすものが与えられたとき，つねに $\Phi(P) \subset D$ が成り立つことが必要十分であることが示されていて，その証明のために，D の境界距離関数を d_D と書くとき，関数 $-\log d_D$ の性質についての精密な考察が行われる．

次に，n 次元複素多様体 S の開集合 D について，D の構造層，すなわち，正則関数の芽のなす D 上の層を $\mathcal{O}$ と書き，有理型関数の芽のなす D 上の層を $\mathcal{M}$ と書く．自然な準同型 $\mathrm{H}^q(D,\mathcal{O}) \to \mathrm{H}^q(D,\mathcal{M})$ が単射であるとき，本論文に従い，D は q Cousin-I であるということにする．特に，$q = 1$ の場合，D が 1 Cousin-I であることと D が標準的な意味で Cousin-I であることは同値である．

本論文において，n 次元 Stein 多様体 S の開集合 D について，D が $n-1$ Cousin-I ならば，D が S 内の位数 1 の擬凸開集合であることが証明されていて，これが主定理である．その証明において，上記の $\mathbb{C}^n$ 内の開集合に対する一般位数 q の擬凸性の 2 次関数を用いた特徴付けが重要な役割を果たしている．主定理において，特に，$n = 2$，$q = 1$，$S = \mathbb{C}^2$ の場合が古典的な Cartan・Behnke・Stein の定理である．

さらに，考察を進めることにより，n 次元 Stein 多様体 S の開集合 D について，D が $n-1$ Cousin-I かつ $\mathrm{H}^k(D,\mathcal{O}) = 0$（$q \leq k \leq n-2$）ならば，$D$ が S 内の位数 q の擬凸開集合であることも示されており，これは Eastwood・Vigna Suria（1980）の定理の別証明であるとともに精密化である．

以上のように，本論文の著者は，Stein 多様体内の開集合が位数 1 の擬凸開集合であるための層係数コホモロジー群によって記述される重要な十分条件を求めるとともに，その証明に至るための方法が一般位数 q の擬凸性の考察に際しても有効であることを示し，それらの内容は，多変数関数論・複素解析幾何の分野における価値のある業績であるといえる．

以上，審査の結果，本論文の著者は博士（理学）の学位を授与される十分な資格があるものと認める．

公表論文

Generalized Cartan-Behnke-Stein's theorem and q-pseudoconvexity in Stein manifolds
Shun Sugiyama
Tohoku Mathematical Journal，掲載確定

参考論文

（1） Polynomials and pseudoconvexity for Riemann domains over $\mathbb{C}^n$
Shun Sugiyama
Toyama Mathematical Journal 38 (2016), 101－114

（2） Intermediate pseudoconvexity for unramified Riemann domain over $\mathbb{C}^n$
Makoto Abe, Tadashi Shima, and Shun Sugiyama
Toyama Mathematical Journal 40 (2018・2019) , 17－35，掲載確定

（3） A characterization of subpluriharmonicity for a function of several complex variables
Makoto Abe and Shun Sugiyama
Bulletin of the Graduate School of Integrated Arts and Sciences, Hiroshima University, II：Studies in Environmental Sciences 14 (2019), 1－5，掲載確定