学 位 論 文

数学教育における
確率概念の形成過程に関する研究

石 橋 一 昂

目　次

目　次

目　次

目　次

序章：本研究の目的と方法

第１節．本研究の背景と目的

高度情報化や，グローバル化などと称される変化の激しい今日的な社会を生きる子供たちのために，学校教育においては意思決定能力の育成が重要視されている（Batanero, Chernoff, Engel, Lee, and Sánchez, 2016；西村，2016；中央教育審議会，2016）。意思決定（decision-making）とは，自分や集団の好みや考えにしたがって，複数の代替案から最善の解を求める行為である。ここでの好みや考えとは，意思決定者を取り巻く環境の知識や性質により変容し，われわれが確信を持てるのであれば証拠であり，そうではなく，知覚したデータが当てにならない場合は，知識や経験により蓄積されたこの世界に対する信念となる（マグレイン，2013）。このようにわれわれは，将来起こる事柄について，さまざまなデータをもとに，それらがどれくらいの確からしさで起こるかという推定を行った上で，意思決定をする。つまり，全ての意思決定は確率に基づくものである（ギルボア，2012；マンクテロウ，2015）。また，すぐれた予測を行う者は，事象が起きたときに，「そうなる定めだったのか」と運命論的に考えるのではなく，「さまざまな展開がありえたなかで，特定の条件が重なった結果，たまたまその事象が起きた」と確率論的に考える傾向があることが明らかとなっている（テトロック・ガードナー，2016）。ゆえに意思決定において確率は重要な位置を占めており，全市民必須の教養であるといえる。

しかしながら，今日の確率教育は意思決定能力の育成という社会からの要請に応えられてはいない。例えば，小島（2013）は，「学校で教わる確率というのは，いろいろある確率の中でも「数学的確率」と呼ばれる分野であり，数学を展開す

る意味では重要だが，世の中での生活や仕事には，直接役に立つとは言えないものなのだ」（pp.32-33）と述べている。またマンクテロウ（2015）は，「統計学の授業における確率用語を思い浮かべて，すでにあなたはあくびをこらえているかもしれない。もしそうなら，目を覚ましてほしい。確率は，学校で学ぶだけの無味乾燥な技術的なことがらでは決してない」（p.1）と述べている。このように，今日の確率教育は「役に立たない」や「無味乾燥」と言われるほど，社会における意思決定に寄与できていない。その理由としては，第一に，これまでの学校教育の焦点が，個別学問領域の知的主題の系統的展開を強調する教科主義であったこと（岩崎・大滝・新居，2012）が挙げられる。そこでは数学的内容の系統に基づいて確率指導が行われることから，結果として順列・組合せを前提とした複雑な分数計算ばかりが行われている（川嵜，1990；平林，1990；松浦，2015）。第二に，確率教育研究における中心的課題が，統計的確率と数学的確率の接続（例えば，織田，2009；Prodromou, 2012; Abrahamson, 2014; Kazak, Wegerif, and Fujita, 2015）や，確率学習の困難性の同定（例えば，Fischbein and Schnarch, 1997; Díaz and Batanero, 2009; 五十嵐・宮川，2013；五十嵐，2014）であることが挙げられる。前者の，統計的確率と数学的確率の接続が中心的課題である要因は，確率教育が古くから確率の意味を「ある試行を多数回繰り返したときに，ある事象が起こる回数の全体に対する割合が近づいていく値」(国立教育政策研究所，2018，p.96）と解釈する立場（頻度的な確率解釈）に基づいている（Batanero and Borovcnik, 2016; Otaki, 2019）からであると考えられる。近年では諸外国で初等教育段階への確率の導入が盛んになっていることも相まって（Batanero, Chernoff, Engel, Lee, and Sánchez, 2017），意思決定能力という学校を超えた社会での資質能力よりも，「ばらつき」や「ランダム」などの学校教育の入口で学習される概念に焦点が当てられている（Pratt and Kazak, 2018）。後者の，確率学

習の困難性の同定が中心的課題である要因については，確率に関しては主に認知心理学研究において様々な困難性が報告されていて（例えば，市川・下條，2010；Kahneman and Tversky, 2000; Kahneman, 2011），そこでは人間の本性として考えられているものについて，数学教育研究では「なぜ誤るのか」や「どのように指導すれば誤らないか」について論究している（例えば，Jones, Langrall, and Mooney, 2007; Saenen, Heyvaert, Van Dooren, and Onghena, 2015; Saenen, Heyvaert, Van Dooren, Schaeken, and Onghena, 2018）からであると考えられる。

一方で，日常生活や仕事の場面での意思決定において確率を応用したり，確率で表された情報を適切に読み取る上では，そこで想定される確率が何を意味しているのかについて理解しておかなければならない（広田，2011；竹内，2018）。例えば，降水確率が 50%であることと，正しく作られたコインを投げた時に表の出る確率が 50%であることは，同じ 50%であってもその意味は異なる。降水確率は，特定の気象が，その事象が将来起こることに関する予報者の不確実性と結びついている主観的な確率である（Doswell and Brooks, 2019）。つまり，気象における確率予報は一般的に理解されているように偶然的な確率ではなく，過去のデータは参照されるにせよ，認識論的要素を含んでいるのである（広田，2011）。このように，専門家の主観的な判断が含まれた確率がリスクコミュニケーションに含まれているケースはまれではないが，この事実はあまり社会的に認識されていない（広田，2011）。すなわち，今日的な社会では，確率に対する見方や意味理解（以下，「確率解釈」と記す）が重要であるにも関わらず，確率の授業では複雑な分数計算ばかりが扱われているという乖離が生じている。このことから，確率教育の焦点を，これまでの確率の数学的内容から，確率解釈へとシフトする必要がある。

確率概念の哲学的側面である確率解釈を中心に指導することの重要性は，これ

までも指摘されてきた（例えば，Jones, Langrall, and Mooney, 2007; Borovcnik and Kapadia, 2018）。しかしながら，上述のように学校教育全体が教科主義で展開してきたこともあり，確率概念の形成を，哲学的側面を中心として考察した研究は，管見の限りない。確率教育の焦点が確率解釈へとシフトする必要があることを考慮すれば，それがどのような過程を経て形成されるべきかを明らかにすることは急務である。

このように確率解釈が中心となるものの，それによってこれまで重要視されてきた確率概念のもう一方の側面である数学的側面が軽視されるかと言えばそうではない。確率解釈を形成していく上で，数学的側面との関連は不可欠である（例えば，柳川，2007；Chernoff, 2008；Borovcnik, 2012）。ゆえに，確率解釈との関連を考慮しながら，確率概念の数学的側面の形成過程についても考察する必要がある。

さらに，松下ほか（2019）によれば，教育学が実践志向性という固有の特色を持つ学問である以上，教育学の実践性を実感し得る教育の機会を提供することは大きな意義を持つ。また中原（2017）によれば，教科教育研究とは，教科の学習や教育に関わる新しい真理，事実，そこから新しい知識を創り出す研究である基礎的な研究と，授業改善に関心を持ち，実践に適用できる規範的成果を重視する研究である臨床的な研究とを併せて行うものである。以上を考慮すれば，本研究を教育学・教科教育学の意義ある研究として位置づけるためには，確率概念の形成過程モデルを理論的に構築した後，それに基づいてどのような教材や授業がデザインされ，それは子供の学習に有効に働くのかについても考察する必要がある。ゆえに授業の開発と実践も行う。

以上の課題意識を踏まえ，本研究の目的を次のように設定する。

数学教育において，今日的な社会での意思決定に求められる確率概念の形成過程を明らかにするとともに，確率概念を形成するための授業を開発・実践すること

その上で，次の３つを下位目的として設定する。

下位目的１：	今日的な社会での意思決定に求められる確率概念を同定し，数学教育における目標を設定すること
下位目的２：	確率概念の形成過程の規範モデル[0－1]を構築すること
下位目的３：	確率概念の形成を目指す授業を開発・実践すること

第２節．本研究の方法と論文構成

本研究では，下位目的 1～3 を達成するために，理論的研究，調査研究，実験的研究の方法を採用する。下位目的に対応させれば，下位目的１に対しては理論的研究，下位目的２に対しては理論的研究と調査研究，下位目的３に対しては理論的研究と実験的研究の方法を採用する。

本研究の論文構成は図０－１の通りである。

序　章

本研究の目的と方法

第１章

数学教育において形成を目指す確率概念

第２章

哲学的側面からみた
確率概念の形成過程の規範モデル

第３章

数学的側面からみた
確率概念の形成過程の規範モデル

第４章

確率概念の形成過程の規範モデル

第５章

確率概念の形成を目指した教材と授業

終　章

本研究の成果と今後の課題

図０－１　本研究の論文構成

註

０－１）ここでの「規範」は，児童・生徒が確率概念を形成するためにはどのような状況を設定すればよいか，概念をどのような過程を経て形成させればよいかなどの教授学的原理を示しうるという意味で用いる（小山，2010 参照）。小山（2010）は，モデル（小山（2010）においては，数学的理解の過程モデル）が教授学習活動としての算数・数学教育，特に算数・数学科の授業において真に有効なものであるために，その規範的特性は不可欠であると述べている。

序章の引用および参考文献

五十嵐慶太・宮川健（2013).「学校数学における確率を捉える枠組みの一提案：数学的モデルとしての確率という視点から」. 日本数学教育学会 『数学教育学論究 臨時増刊第 46 回秋期研究大会特集号』，第 95 巻，pp.17-24.

五十嵐慶太（2014).「モデル化という視点から見た条件付き確率に関する困難性：「時間軸の問題」を用いた分析」. 日本数学教育学会 『数学教育学論究　臨時増刊第 47 回秋期研究大会特集号』，第 96 巻，pp.1-8.

市川伸一・下條信輔（2010).「3 囚人問題研究の展開と意義をふり返って」. 日本認知心理学会『認知心理学研究』，第 7 巻，第 2 号，pp.137-145.

岩崎秀樹・大滝孝治・新居広平（2012).「数学教育における目的・目標論再考」. 日本数学教育学会『日本数学教育学会誌』，第 94 巻，第 11 号，pp.26-29.

織田勇一（2009).「中学校数学科における確率指導の改善：数学的確率と統計的確率の相互作用に着目して」. 日本数学教育学会『数学教育論文発表会論文集』，第 42 巻，pp.397-402.

川嵜道広（1990).「学校数学における確率教材の研究」. 平林一榮先生頌寿記念出版会（編)，『数学教育学のパースペクティブ』(pp.397-412) ． 聖文社.

ギルボア, I. (2012).『意思決定理論入門』. 川越敏司・佐々木俊一郎（訳). NTT 出版.

国立教育政策研究所（2018).「平成 30 年度　全国学力・学習状況調査【中学校】報告書」. https://www.nier.go.jp/18chousakekkahoukoku/report/data/18mmath.pdf.（最終閲覧：2020 年 1 月 27 日）

小島寛之（2013).『数学的決断の技術：やさしい確率で「たった一つ」の正解を

導く方法』．朝日新書.

小山正孝（2010).『算数教育における数学的理解の過程モデルの研究』. 聖文新社.

竹内啓（2018).『歴史と統計学：人・時代・思想』. 日本経済新聞出版社.

中央教育審議会（2016).「幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）」. https://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/__icsFiles/afieldfile/2017/01/10/1380902_0.pdf. （最終閲覧：2020 年 1 月 27 日）

テトロック, P. E.・ガードナー, D. (2016）.『超予測力：不確実な時代の先を読む10 カ条』. 土方奈美（訳). 早川書房.

中原忠男（2017).「教科教育学とその課題」. 日本教科教育学会（編),『教科教育研究ハンドブック：今日から役立つ研究手引き』(pp.10-15). 教育出版.

西村圭一（2016).『数理的意思決定力の育成に関するホリスティック・アプローチ研究』. 共同印刷.

平林一榮（1990).「川嵜道広氏の論文を読んで：『直観的確率教授』の理論にむけて」. 平林一榮先生頌寿記念出版会（編),『数学教育学のパースペクティブ』(pp.413-414). 聖文社.

広田すみれ（2011).「リスクコミュニケーションにおける確率を用いた不確実性伝達の心理学的課題」. 心理学論評刊行会『心理学論評』, 第 54 巻, 第 2 号, pp.153-167.

マグレイン, S, B. (2013).『異端の統計学 ベイズ』. 冨永星（訳). 草思社.

松浦武人（2015).「初等教育における確率概念の形成を意図した学習材の開発研究」. 未公刊博士学位論文, 広島大学.

松下佳代ほか 19 名（2019).「大学教育の分野別質保証のための教育課程編成上の参照基準教育学分野（第一次案)」.

マンクテロウ, K. (2015).『思考と推論：理性・判断・意思決定の心理学』. 服部雅史・山祐嗣（訳）. 北大路書房.

柳川尭（2007).「ベイズの定理とバイオ統計学」. 大賀雅美（編),『数学セミナー』, 第 46 巻，第 2 号，pp.13-17. 日本評論社.

Abrahamson, D. (2014). Rethinking Probability Education: Perceptual Judgment as Epistemic Resource. In E. J. Chernoff, & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking: Presenting plural perspectives. Advances in Mathematics Education, Vol. 7* (pp.239-260). Berlin: Springer.

Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and Probability in High School*. Sense Publishers.

Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., & Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*. Springer International Publishing.

Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., & Sánchez, E. (2017). Teaching Learning of Probability. In G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp.439-442). Springer International Publishing.

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Didactica de la Matemática*, No.2, pp.5-27.

Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2018). Reasoning with Risk: Teaching Probability and Risk as Twin Concepts. In C. Batanero & E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research* (pp.3-22). Springer International Publishing.

Chernoff, E. J. (2008). The state of probability measurement in mathematics education: A first approximation. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, *Vol.23*, pp.1-23.

Díaz, C., & Batanero, C. (2009). University students' knowledge and biases in conditional probability reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education, Vol.4*, No.3, pp.131-162.

Doswell, C., & Brooks, H. (2019). Probabilistic forecasting - A primer. https://www.nssl.noaa.gov/users/brooks/public_html/prob/Probability.html. (最終閲覧：2020 年 1 月 27 日)

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *Vol.28*, No.1, pp.96-105.

Jones, G. A., Langrall, C. W., & Mooney, E. S. (2007). Research in probability: Responding to classroom realties. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 909-955). New York: Macmillan.

Kahneman, D., & Tversky, A. (2000). *Choices, values, and frames*. New York: Cambridge University Press.

Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow*. New York, USA: Farrar, Straus and Giroux.

Kazak, S., Wegerif, R., & Fujita, T. (2015). Combining scaffolding for content and scaffolding for dialogue to support conceptual breakthroughs in understanding probability. *ZDM Mathematics Education*, *Vol.47*, Issue.7, pp.1269-1283.

Otaki, K. (2019). Frequentist probability in Japanese school curricula. *Educação Matemática Pesquisa, São Paulo*, *Vol.21*, No.4, pp.100-111.

Pratt, D., & Kazak, S. (2018). Research on Uncertainty. In D. Ben-Zvi, K. Makar, & J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp.193-227). Springer, Cham.

Prodromou, T. (2012). Connecting experimental probability and theoretical probability. *ZDM Mathematics Education*, *Vol.44*, Issue.7, pp.855-868.

Saenen, L., Heyvaert, M., Van Dooren, W., & Onghena, P. (2015). Inhibitory control in a notorious brain teaser: the Monty Hall dilemma. *ZDM Mathematics Education*, *Vol.47*, pp.837-848.

Saenen, L., Heyvaert, M., Van Dooren, W., Schaeken, W., & Onghena P. (2018). Why Humans Fail in Solving the Monty Hall Dilemma: A Systematic Review. *Psychologica Belgica*, *Vol.58*, No.1, pp.128-158.

第１章：数学教育において形成を目指す確率概念

第１章では，今日の社会における意思決定において，全市民に求められる確率概念の同定を目的とする。まずは，今日の社会が意思決定環境としてどのような性格であるかを明らかにする。次に，我が国の高等学校進学率が 98%を超えているという現状を踏まえて（文部科学省，2019a），全市民を，中等教育を終えた学習者と捉え，彼らがどのような確率概念を形成していることが望ましいかを考察し，それを，数学教育において形成を目指す確率概念として同定する。

第１節．今日的な社会の意思決定環境

意思決定は，人間が日常や社会において古くから行ってきたものであるが，知識基盤社会と称される社会の急激な変化に伴い，意思決定を行う環境が変容している。このことから，まずは今日の社会が，意思決定環境としてどのような性格であるかを同定する必要があると考える。そこで本節では，意思決定者を取り巻く環境について，その意思決定者がどれだけ知っているかという意思決定環境の性質から，意思決定を３つに大別した竹村・吉川・藤井（2004）に基づいて概観する（図１－１）。

１．意思決定環境に応じた意思決定の分類

竹村・吉川・藤井（2004）によれば，意思決定環境は「確実性下」，「リスク下」，「不確実性下」に分類される。

まず，確実性下での意思決定とは，選択肢を選んだことによる結果が確実に決まってくるような状況での意思決定である。例えば，1,000 円の商品券を貰うの

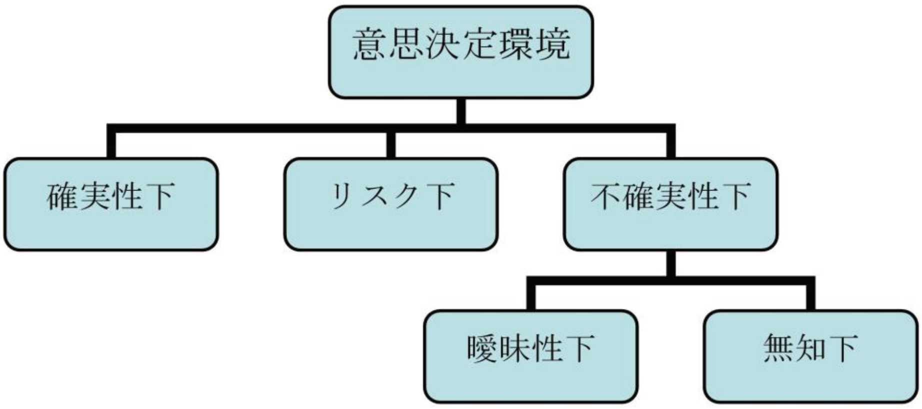

図１－１　意思決定環境に応じた意思決定の分類

（竹村・吉川・藤井，2004，p.16）

と，3,000 円の商品券を貰うのとどちらがよいかを決めるような状況は，確実性下の意思決定になる。

次に，リスクというのは，心理学の分野では危険性という広義の意味であるが（例えば，広田・増田・坂上，2006），意思決定研究では，選択肢を採択したことによる可能な結果に確率を割り振れる場合をいう。例えば，傘を持って行くか行かないかの意思決定を考えてみると，天候が雨であれば傘を持って行くことの価値は高いが，晴れれば傘は邪魔なだけである。このように，傘を持って行くかどうかを決定し，それに対する結果は天候に依存することから，リスク下での意思決定になる。その他，カジノ・ゲーム，宝くじ，それに心理学実験といった偶然が結果を左右するゲームが考えられる。ルーレットのように，その確率が偶然機構によって生み出されていない多くの状況がほかにもあるが，それらの状況でも，多かれ少なかれ，確率は知られていて，「客観的に」与えられていると仮定することができるだろう。例えば，保険の問題を取り扱うときには，統計データを見て，保険の対象になるさまざまな事象が経験的にどれほどの頻度で起こっているのか

を知ることができる。こうした経験的な頻度はしばしば，そうした事象が，われわれの将来に待ち受けている同じ事象と同様に，同一で独立の分布であると仮定可能であり，また，もしそうした事象がたくさんあるなら，事象の確率を定義するには十分であるように思われるので，経験的な頻度は客観的な確率を定義するために用いることができるだろう。（ギルボア，2012，pp.148-149）

最後に，不確実性とは，選択肢を採択したことによる結果の確率がわからない状況をいう。確率で表現不可能な状況というのは，更に２つに下位分類できる。まず，数値で表現はできないが「たぶん大丈夫であろう」というように言語的には表現可能な場合は，曖昧性下での意思決定と呼ばれる。例えば，天気予報を知らずに誰かに天気を尋ねたとき,「たぶん降ると思う」といわれた場合に傘を持っていくかどうかを決定する状況である。その一方で，どんな選択肢がそもそも存在し得るのか，どんな状態が可能性としてあり得るのか，どんな結果の範囲があるのかなど，不確実性の程度に関してわからない状況での意思決定は，無知下の意思決定と呼ばれる。例えば，ある社会政策を採用する事により，どのような状態が生じ, どのような結果が出現するかその可能性すらもわからない状況である。

２．今日的な社会の意思決定環境

前項では, 意思決定環境に応じた意思決定の分類について概観した。本項では，前項の分類に基づいて，今日の社会の意思決定環境としての性格を同定する。以下では，今日の社会の特徴について，松尾（2016，pp.16-17）を引用し概観する。

工業社会から知識社会へと展開する中で，社会で必要とされる能力観が大きく変容している。産業革命に伴って成立した工業社会はしばしば，自動車産業を革新したヘンリー・フォードに由来して，フォーディズムと呼ばれる。その特徴は，

規格化された商品の大量生産，生産プロセスの細分化，個別化された生産工程に基づく作業の分配，組み立て生産ラインの使用などが挙げられる。大量生産と科学的経営（テーラーイズム）に基づくこうした生産中心の構造は，20 世紀初頭以降の西洋社会の産業構造を決定してきた。工業化が進展し，単純労働を担う多量の労働者を輩出する社会的要請に応えて，工場をモデルに，標準化，規格化を通して近代の学校の制度化が進むことになる。急激に増加する生徒数に対応して，効率的な知識の伝達が求められる中で，学年制や試験制度の導入により生徒は能力別に振り分けられ，教科の成立や教科書の出版を通して学校で教授される知識の専門分化や標準化が進み，単位時間や時間割の考案は生徒の学校で学習する時間や場所の複雑な管理を可能にした。こうして，基礎的な読み書き能力をもつ多量の労働者を養成するために，能力別に標準的な知識を効率よく伝達する仕組みが創出され，工場をモデルとした知識注入型の義務教育のシステムが形成され，定着していったのである。それが，1980 年代後半になると経済発展に対する知識や技術の役割の重要性が明らかにされるようになり，知識社会の到来が認識されることになった。新しいテクノロジーは，消費者の多様な需要やつねに変化する興味関心に対応することのできる，より柔軟な生産様式を可能にした。それによって生まれた個別化・細分化されたマーケットは，それまでの大量生産・大量消費に代わり，移り変わる消費者のニーズや嗜好に応え，多様化，差異化，差別化された経済モデルへの移行を促した。また，グローバル化により世界経済の分業化が進み, モノの生産は労働力の安価な地域で行われる一方で, 先進国では知識,情報，サービスをめぐる絶え間ない創造が経済発展の基盤となってきている。知識や人材は国境を越えて移動し，新たな知識は生み出され，技術革新が加速度的に繰り返されている。新しい知識や技術の創造はしばしばパラダイムの転換を伴い，新たな状況では既存の知識や技術はもはや通用しないような現実を生んでい

る。

工業社会から知識基盤社会への展開を概観すると，それまで定型的であったものが，多様なデータで溢れ，見通しの効かない状況の中における評価や選択へと変容していることがわかる。こうした社会認識は 21 世紀の社会に対するものであり，今後も継続してゆくと考えられるが，近年，知識・情報・技術をめぐる変化の早さが加速度的となり，情報化やグローバル化といった社会的変化が，人間の予測を超えて進展するようになってきている（中央教育審議会，2016，p.9)。このことから，今日の社会はリスクおよび不確実性を含む社会であり，今後それがさらに加速度的に展開していくと予想される。以上より，知識基盤社会と称される社会における意思決定は，リスク下および不確実性下での意思決定と換言でき，今日の社会ではその傾向がより一層顕著になると考えられる。

第２節．数学教育において形成を目指す確率概念

前節では，今日の社会における意思決定を，「リスク下および不確実性下での意思決定」と特徴づけた。そこで本節では，このような社会を生きる市民に求められる確率概念を同定する。尚，我が国の高等学校進学率が 98%を超えているという現状を踏まえて（文部科学省，2019a)，ここでの市民とは，中等教育を終えた学習者を想定している。

確率とは，コルモゴロフ（2010）により公理化され，その公理（図１－２）を満たすもののことである（Kruschke, 2017)。この数学的側面についてはほとんど完全といえる合意や同意がなされている（ギリース，2004)。しかし一方で，確率とは何を意味するのかを問われれば，それに対する答えは一意には定まらず，複数の立場が存在する。本研究ではこのような確率に対する哲学的な見方や意味

要素 ω の集合をΩ とする。ω を根元事象といい，Ω を標本空間（根元事象の空間），Ω の部分集合を要素とする集合を事象という。

I. 事象 A に，非負の実数 $P(A)$ が定められている。この数 $P(A)$ を事象 A の確率という。

II. $P(\Omega) = 1$

III. 事象 A と事象 B とが共通の要素をもたないとき

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

図１－２　確率の公理[1－1]

（コルモゴロフ，2010，pp.18-19）

づけを，確率解釈と呼ぶこととする。確率はさいころやくじ引きから，検査の正確さなど様々な場面で扱われるが, 立場によってこれらの確率の扱い方は異なる。そこで以下では，リスク下および不確実性下での意思決定に求められる確率概念を哲学的側面（確率解釈）と数学的側面とに分けて同定することとする。

１．確率概念の哲学的側面

確率解釈としては，頻度的な解釈と主観的な解釈の 2 つが挙げられる[1－2]（Carranza and Kuzniak, 2008; 松原，2010；マグレイン，2013；ハッキング，2013)。以下ではこれらの解釈について概観する。

1.1. 頻度的な確率解釈

さいころを何百回も投げ 1 の目が出た回数（頻度）を数えてその割合（相対度数）を記録するという実験を考える。いま投げる回数を n とし，1 の目が出た回

数を n_A とすると，$n \to \infty$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} \to \frac{1}{6}$$

となることが予想される。このように，一般に事象 A を生み得る実験を n 回繰り返して A が n_A 回出るとすると，$n \to \infty$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} \to \alpha$$

となるならば，A が n_A 回出る確率 $P(A)$ を

$$P(A) = \alpha$$

と定義する。相対頻度 $\frac{n_A}{n}$ の極限によって確率を定義するのが，確率の頻度的解釈である。

この定義を現実へ応用する際に，「同一条件下」や「ランダム」によって意味されるものを定義することが困難となってくる。さらに根源的には，確率が必要な事象は多くあるものの，それらの繰り返しの実験を実行することは不可能である。この点は，確率が低い事象の場合は顕著である。また，頻度的な確率解釈に対してはおもに 3 つの批判がある。1 つ目は，頻度的な確率解釈で得られた確率は，原則として計算できない点である。2 つ目は，頻度的な確率解釈で得られた確率が実際に存在するかどうかを知ることができない点である。3 つ目は，暫定的である頻度的な確率解釈による確率値を，確認することも，否定することもできない点である。一方で，頻度的な確率解釈で得られた確率は，人間の思考ではなく証拠に基づいている点で，生物学や物理学に適しているとも考えられている。なぜなら，これらの学問では個々の事例は関心の外にあり，集団現象や人口や，これらに似た性質を持つ対象物の大きな集団と関係しているからである。また，異なる年齢での死亡率のように，対称性[1－3)]を適用できない状況においても有効である。

1.2. 主観的な確率解釈

主観的な確率解釈では，確率は個人の心に内在する状況の評価であり，頻度的な確率解釈において暗黙的に仮定されている現実世界の特徴ではないと考える。ここでの基本的な仮定は，個人が，複数の意思決定の間にある暗黙の嗜好パターンから導かれる独自の確率を有することである。例えば，競馬で賭けをする時は，賭ける人全員が馬に関して同じ情報を持っているにもかかわらず，A という馬に賭ける人もいれば，B という馬に賭ける人もいる。このように，個人の経験や知識によって，そこから導き出される馬の勝率にはばらつきが生じるのである。ここでは，確信の度合いあるいは推論の手段として確率を与えている。この性質は，生起回数の相対度数から確率を求め，それは誰が計算しても同一の値であって客観的に決定される頻度的な確率解釈とは異なる。

主観主義者には，人の心の中にある，経験的データとは無関係な事前情報と，反復実験の頻度から得られる経験的データの，2 つの種類の情報がある。どちらのタイプの情報もベイズの定理における尤度となり，当該事象の事前確率を更新し，新しい確率を与えるものとなる。換言すれば，「何かに関する最初の考えを，新たに得られた客観的情報に基づいて更新すると，それまでとは異なった，より質の高い意見が得られる」（マグレイン，2013，p.13）ということである。したがって，前節で述べた頻度的な確率解釈の現実場面への応用における困難性や課題は回避される。しかしながら，主観的な確率解釈において，事前確率をどのように測定するかについての指針を示していないことが科学的でないとして，しばしば批判の的となる。なぜなら，主観的な確率解釈では個人があらゆる事象にあらゆる確率を割り当てることができるため，そこには客観的根拠が欠如しているからである。

現実での応用場面としては，知識が部分的でありながら意思決定を行わなければならないビジネス上の決定などで必要とされる。これは，主観的な確率解釈において，最初の事前確率を，ベイズの定理を用いることで新しい情報が得られる毎に更新することができるからである。すなわち，主観的な確率解釈は，頻度的な確率解釈が要求する同一条件下での多数回の試行の証拠がない場合に有効である。

1.3. 今日的な社会で求められる確率解釈

上述のようにギルボア（2012）は，確率が与えられているリスク下での意思決定では，われわれの将来に待ち受けている同じ事象と同様に，同一で独立の分布であると仮定可能であり，また，もしそうした事象がたくさんあるなら，事象の確率を定義するには十分であるように思われるので，経験的な頻度は客観的な確率を定義するために用いることができると述べている。このことから，頻度的な確率解釈が必要とされることがわかる。また，竹村・吉川・藤井（2004）は，頻度に加えて，確率の公理を満たす主観的確率で重みづけて期待値をとった期待効用理論[1－4)]の体系でも，リスク下での意思決定は説明可能であるとしている。このことから，主観的な確率解釈も必要となることがわかる。リスク下での意思決定では，頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の両方を必要とすると述べている。

一方，不確実性下での意思決定においては，繁桝（2016）が，データのない場合に，将来の不確定性を評価する確率は主観的な確率解釈に基づいて表現するしかないと強調している。実際，われわれの人生における多くの重要な意思決定は，同じような仕方で繰り返されるような事象には依存しておらず，同一で独立の分布の事象であるという仮定は必ずしも成り立たない場合が多い。例えば，「次週の

株式市場の動きを考える際には，それが先週と同じ分布に従っていると仮定することはできないのである。世界中のさまざまな事柄は変化しており，どの２つの週も同じものではない。さらに言えば，株式市場が先週，ある特定の仕方で終末を迎えたという事実自体が，次の週の値動きに対するわれわれの予想を変化させる情報の一部になる。したがって，引き続きおこる事象は，統計的に独立でないばかりか，因果的にさえ独立でないのである」（ギルボア，2012，p.149）。以上より，不確実性下では単純に過去のデータからその事象がどのくらい生起したかを求め，それを確率として用いることはできないことから，主観的な確率解釈が必要となる。

以上より，リスク下および不確実性下での意思決定で求められる確率解釈は，頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の双方である。またそれらは対立するものではなく，意思決定場面に応じて使い分けることが求められる。このことから本研究では，今日の社会において全市民に求められる確率解釈を「頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通了解的な解釈」と呼ぶこととする。

２．確率概念の数学的側面

確率概念の数学的側面はどれも重要であるが，スタノヴィッチ（2017）は意思決定に関わってひときわ重要なものとして，「ベイズの定理」を挙げている。ベイズの定理とは条件付き確率（図１－３）に関して成り立つ定理である（図１－４）。

ベイズの定理がいわんとしているところは，事前に見積もった原因が B_i であるという仮説が正しい確率 $P(B_i)$ の値とその B_i に関する仮説が正しい場合に結果 A が起きる確率 $P(A|B_i)$ の積を，考え得る全ての原因 $B_1, \ldots, B_k$ についての仮説ひとつひとつのもとで結果 A が生じる確率の和で割ると，結果が A であ

事象Aが起こったときに，事象Bが起こる確率を，事象Aが起こったときの事象Bが起こる条件付き確率といい，$P_A(B)$ で表す。

各根元事象が同様に確からしい試行において，その全事象を U とする。また，A，Bを2つの事象とし，$n(A) \neq 0$ とする[1－5)]。このとき，条件付き確率 $P_A(B)$ は，

「A を全事象とした場合の事象 $A \cap B$ の起こる確率」と考えられ，次のように表される。

$$\boldsymbol{P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}} \quad \text{…①}$$

①の右辺の分母と分子を$n(U)$で割ると，

$$\frac{n(A)}{n(U)} = P(A), \quad \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = P(A \cap B)$$

であるから，次の等式が得られる。

$$\boldsymbol{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}} \quad \text{…②}$$

図１－３　条件付き確率

（坪井ほか，2011，pp.55-56）

るというデータが与えられたときに原因が B_i である仮説が正しい確率 $P(B_i|A)$ を得る，ということである。また，今回得られた事後確率は，新たなデータが与えられると次回の事前確率として扱うことができるため，結果が A であるというデータが与えられたときに原因が B_i である仮説が正しい確率 $P(B_i|A)$ を更新できる（これを，「ベイズ更新」という）という特徴がある。さらに，得られた確率は逐次合理的であるという性質もある。すなわち，これまでのデータは，今現在の推定値にすべて反映されているため，新しく得られたデータだけを利用し

幾つかの候補となる排反な事象 $B_1,\ldots,B_k$ があったとする。それらの事象は全事象を覆うとする。つまり $B_1\cup\ldots\cup B_k=\Omega$ とする。また，それぞれの事象が起きる確率 $P(B_1),\ldots,\mathrm{P}(B_k)$ を先験的に知っていたとする。これは次に考える事象 A が起きる前に想定されているので**事前確率（prior probability）**といわれる。このような状況の下で，候補となっている事象の情報に絡むような事象 A が起こりうるとする。具体的には，事象 A に関しては，それぞれの候補となる事象が起きたという条件の下での条件付き確率 $P(A|B_1),\ldots,P(A|B_k)$ を知りえるとする（これを**尤度（likelihood）**という）。このような情報の下では，幾つかのことを知ることができる。まずは事象 A が起きる確率を知ることができる：

$$P(A)=P(A\cap\Omega)=P\left(A\cap\bigcup_{i=1}^{k}B_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{k}(A\cap B_i)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}P(A\cap B_i)=\sum_{i=1}^{k}P(B_i)P(A|B_i)$$

これを全確率の定理という。さらに，事象 A が起きたという条件の下で，候補となる事象が起きる確率を，次のように計算することができる：

$$P(B_i|A)=\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{k}P\big(B_j\big)P\big(A|B_j\big)}$$

これを**ベイズの定理（Bayes theorem）**という。この条件付き確率は，事象 A が起きた後に候補となる事象が起きる確率なので，**事後確率（posterior probability）**といわれている。

図１－４　ベイズの定理

（藤澤，2006，p.12）

て確率を更新すればよく，データの得られた順によって推定値が異なることはないということである。

ベイズの定理が意思決定において重要視される要因は，それが「知りたいことに関する情報がほんの少ししか手に入らないことはしょっちゅうで，それでもみな，過去の経験に基づいて何らかの予想を立てたと考えている。そして新たな情報が手に入れば，それに基づいてそれまでの考えを修正する。」(マグレイン，2013，p.17）という，人間が「経験から学ぶ」ということをエレガントに表現したものにほかならないからである（マグレイン，2013)。また，確率は事象に対して適用されるものではなく，事象についての情報に対して適用されるものであって（Devlin, 2014)，ベイズの定理はそれに数理を与えるものとして決定的に重要であるし（柳川，2007；マンクテロウ，2015)，我々が実際の生活で必要とする確率は全て条件付き確率である（竹内，2014)。さらに，条件付き確率は平成 21 年 3 月告示の高等学校学習指導要領（文部科学省，2009）や，平成 30 年 3 月告示の高等学校学習指導要領（文部科学省，2019b）において高等学校数学 A で扱われていることから，中等教育を終えた学習者を想定している本研究とも整合的である。以上より，今日の社会において全市民に求められる確率概念の数学的側面を「条件付き確率」とする。

第３節．第１章のまとめ

第 1 章では，我が国の高等学校進学率が 98%を超えているという現状を踏まえて，中等教育を終えた学習者が，どのような確率概念を形成していることが望ましいかを意思決定の視点から考察し，数学教育において形成を目指す確率概念を設定することを目的とした。第 1 節では，今日的な社会の意思決定環境の性格を

同定した。そして第２節では，そのような意思決定環境において形成していることが望ましく，数学教育の目標となる確率概念を，哲学的側面（確率解釈）と数学的側面とに分けて同定した。本章を概括すると以下のようになる。

- 今日的な社会の意思決定環境は「リスク下または不確実性下の意思決定」といえる。ここで，リスク下とは，選択肢を採択したことによる可能な結果に確率を割り振れる場合であり，不確実性下とは，選択肢を採択したことによる結果の確率がわからない状況である。今日的な社会には，この両方の性格があることがわかった。
- 数学教育において形成を目指す確率概念として，哲学的側面については「頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通了解的な解釈」, 数学的側面については「条件付き確率」を設定した。ここで，頻度的な確率解釈とは，試行の結果から確率を推定する立場であり，主観的な確率解釈とは，個人または集団の信念の度合いを確率として表す立場である。リスク下または不確実性下の今日的な社会ではこの両方が援用されていて，場面に応じて使い分けられている。数学的側面については，我々が実際の生活で必要とする確率は全て条件付き確率であることと，確率は事象についての情報に対して適用されるものであり，それに数理を与えるものとして条件付き確率（ベイズの定理）が決定的に重要であることから,「条件付き確率」を設定した。

註

１－１）本研究では，有限個の事象の確率だけを扱うものとする。この理論は，初等確率論と呼ばれる（コルモゴロフ，2010)。

１－２）頻度的な確率解釈は,「頻度主義」,「客観主義」,「経験的」,「実験的」などとも呼ばれ，主観的な確率解釈は,「主観主義」,「ベイジアン」,「個人的」などとも呼ばれる（Chernoff, 2008)。

１－３）ここでの対称性とは，事象 A と事象 B が「同等である」と考える積極的理由が存在する，あるいは，A を B と呼ぶことにしても状況が変わらないということを指す（竹内，2018，p.110)。例えばさいころであれば，その物理的な対称性によって，１から６の目が出る確率は，$\frac{1}{6}$ である。一方，異なる年齢の死亡率に関しては，例えば 60 歳と 80 歳の死亡率は異なるといった具合に，対称性は存在しない。

１－４）期待効用理論とは，図１－５のように定義される。

１－５）「$n\,(A)$」とは事象 A の要素の個数を指し，「$P\,(A)$」とは，１つの試行において，ある事象 A の起こることが期待される割合（これを事象 A の確率という）を指す（坪井ほか，2011，p.37）.

意思決定者が代替案 $a \in A$ を選択したときに結果 x_i が得られる確率を p_i，代替案 $b \in B$ を選択したときに結果 x_i が得られる確率を q_i，・・・とし，起こり得るすべての結果の集合を

$$X = \{x_1,\ x_2,\ \cdots\}$$

とする。

このとき

$$p_i \geqq 0,\ q_i \geqq 0,\ \cdots \qquad \forall i$$
$$\sum_i p_i = \sum_i q_i = \cdots = 1$$

を満たす。

また，X 上の効用関数（utility function）を $u: X \to R$ とするとき，代替案 $a,\ b,\ \cdots$ を採用したときの期待効用（expected utility）は，おのおの

$$E_a = \sum_i p_i\, u(x_i),\ E_b = \sum_i q_i\, u(x_i),\ \cdots$$

で与えられる。

図１－５　期待効用理論

第１章の引用および参考文献

ギルボア, I. (2012).『意思決定理論入門』. 川越敏司・佐々木俊一郎（訳）. NTT 出版.

ギリース, D. (2004).『確率の哲学理論』. 中山智香子（訳）. 日本経済評論社.

Kruschke, J. K. (2017).『ベイズ統計モデリング』. 前田和寛・小杉考司（監訳）. 共立出版.

コルモゴロフ, A. N. (2010).『確率論の基礎概念』. 坂本實（訳）. ちくま学芸文庫.

繁桝算男（2016).「コメント」. 日本行動計量学会『行動計量学』, Vol. 43，No. 1，pp.45-51.

スタノヴィッチ, K. E. (2017).『現代世界における意思決定と合理性』. 木島泰三（訳）. 太田出版.

竹内彰通（2014).「統計的な考え方と結果の見方」. 日本統計学会・数学セミナー編集部（著),『数学セミナー増刊統計学ガイダンス』, pp.6-10. 日本評価社.

竹内啓（2018).『歴史と統計学：人・時代・思想』. 日本経済新聞出版社.

竹村和久・吉川肇子・藤井聡（2004).「不確実性の分類とリスク評価：理論枠組の提案」. 社会技術研究会『社会技術研究論文集』，Vol.2，pp.12-20.

田村坦之（2004).「意思決定論とその応用に関する最近の動向」. システム制御情報学会『システム／制御／情報』，Vol.48，No.5，pp.178-183.

中央教育審議会（2016).「幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）」. https://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/__icsFiles/afieldfile/2017/01/10/1380902_0.pdf. （最終閲覧：2020 年 1 月 27 日）

坪井俊ほか 13 名（2011).『数学 A』. 数研出版.

ハッキング, I. (2013).『確率の出現』. 広田すみれ・森元良太（訳). 慶応義塾大学出版会.

広田すみれ・増田真也・坂上貴之（2006).『心理学が描くリスクの世界　改訂版：行動的意思決定入門』. 慶應義塾大学出版会.

藤澤洋徳（2006).『確率と統計』. 朝倉書店.

マグレイン, S, B. (2013).『異端の統計学 ベイズ』. 冨永星（訳). 草思社.

松尾知明（2016).「知識社会とコンピテンシー概念を考える：OECD 国際教育指標（INES）事業における理論的展開を中心に」. 日本教育学会『教育学研究』, Vol. 83, No. 2, pp.140-153.

松原望（2010).『ベイズ統計学概説：フィッシャーからベイズへ』. 培風館.

マンクテロウ, K. (2015).『思考と推論：理性・判断・意思決定の心理学』. 服部雅史・山祐嗣（訳). 北大路書房.

文部科学省（2009).『高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編』. 実教出版.

文部科学省（2019a).「学校基本調査－調査の概要」. http://www.mext.go.jp/component/b_menu/other/__icsFiles/afieldfile/2019/08/08/1419592_2.pdf.（最終閲覧：2020 年 1 月 27 日）

文部科学省（2019b).『高等学校学習指導要領(平成 30 年告示)解説 数学編 理数編』. 学校図書.

柳川尭（2007).「ベイズの定理とバイオ統計学」. 大賀雅美（編),『数学セミナー』, 第 46 巻, 第 2 号, pp.13-17. 日本評論社.

Carranza, P., & Kuzniak, A. (2008). Duality of probability and statistics teaching in french education. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics*. Granada: ICMI and IASE.

Chernoff, E. J. (2008). The state of probability measurement in mathematics education: A first approximation. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, *Vol.23*, pp.1-23.

Devlin, K. (2014). The Most Common Misconception About Probability? In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking: Presenting plural perspectives. Advances in Mathematics Education, Vol. 7* (pp.ix-xiii). Berlin: Springer.

第２章：哲学的側面からみた確率概念の形成過程の規範モデル

第１章より，確率概念の哲学的側面（確率解釈）において目標とするのは，頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通了解的な解釈である。そこで第２章では，学習者はどのようなプロセスを経て，頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通了解的な解釈を形成すべきかについて，その規範モデルを構築することを目的とする。

確率解釈の形成過程の規範モデルを構築する理論的な視座として，確率解釈の史的展開を採用することとする。なぜなら，確率解釈の史的展開と形成過程には，既有の確率解釈では解決できない状況に直面し，それを解決するために新たな確率解釈が必要となることで，新たな（高次の）解釈へと展開していくという共通点が存在するからである。このことから，確率解釈においては史的展開と形成過程の相互交渉が可能であると考える。尚，確率解釈は確率概念の一側面であるから（ギリース，2004），本研究では確率解釈の形成は，概念形成とみなすこととする。まずは，確率解釈の史的展開を概観する。

第１節．確率解釈の史的展開

第１章より，確率解釈としては，頻度的な解釈と主観的な解釈の２つが挙げられる。そこで以下ではこの２つの確率解釈について，その史的展開をカプラン・カプラン（2007），後藤（2009），松原（2010），マグレイン（2013），ハッキング（2013），竹内（2018）に基づいて整理する。

１．確率解釈の史的展開

確率は，さいころやくじなどのランダマイザーを用いた賭博を起源として始まった。賭博は古代から，可能性としては原始時代から存在しており，先人達はその時代から動物の骨を用いて極めて均等なランダマイザーを作り，安定した頻度を生成していた。このことから人間は，何か立方体状のものを何回も転がしているうちに，どの面もほぼ等しい頻度で出ることに気づいたのではなく，実際に投げる以前から直観的にこのことを理解していたと考えられる。その一方で，複数のさいころの目の出方については正しく理解することができなかった。例えば 1613 年から 1623 年の間に，ガリレオ（Galileo Galelei）に賭博についての相談を持ちかけた賭博者は，3 つのさいころを同時に投げた時，その目の総和 9 と 10 は同程度に出やすいと考えていた。しかしながら，3 つのさいころの和を用いた賭けを何度も行ううちに，総和 10 の方が，9 より出やすいのではないかと考えるようになり，その理由をガリレオに問うたのである。尚，ガリレオはこの賭博者の問いに対し，起こり得る結果を並べ上げることで，正しい解決に至った。

上述のガリレオの著作はそれ以上の発展を見せなかったが，17 世紀では賭け事がおもな刺激となり，パスカル（Blaise Pascal）とフェルマー（Pierre de Fermat）を中心として，頻度的な確率解釈に基づいた確率の数学理論が出現してきた。17 世紀まで発展が見られなかった理由としては，偶然現象が賭博だけでなく占いにも用いられており，それが政治的に重要な判断の材料となっていたことが要因であると考えられている。占いと政治は深く結びついていたことから科学的な扱いは避けられてきた。その後，ベルヌーイ（Jakob Bernoulli）は，確率に関して初めて極限定理を証明し，それは後の大数の法則の特殊な場合となった。このような確率の数学理論は，今日では古典的確率と呼ばれている。

このように，確率の数学理論の発展へのおもな刺激は賭け事であり，理論のおもな実践的成功例も賭け事への応用だったことから，頻度的な確率解釈が基本的な確率解釈となった。また，現実の問題への応用という点でも，最初に権力を持ったのは頻度主義者であった。頻度的な確率解釈が一般的に広まった背景には，フォードの自動車工場から始まった大量生産の技術があり，「大量技術」が工業以外の多くの分野でも普及したことが挙げられる。つまり，そこには現実に「無限母集団」に近いものが存在し，その特性が平均によって測られるような場合が多かったのである（竹内，2018，p.10）。このような社会的背景から，頻度的な確率解釈の実用性が増し，1920 年から 1930 年代には，フィッシャー（Sir Ronald Aylmer Fisher）やネイマン（Jerzy Neyman），ピアソン（Egon Sharpe Pearson）に代表される頻度主義者が，多数の観察による頻度こそが確率であり，恣意性を含む主観的な確率解釈は，正確さと客観性が要求される近代科学の信条に反しているとし，頻度的な確率解釈を強調した。それに加え，主観的な確率解釈の方法論であるベイズの定理の計算は複雑になることが多く，敬遠されていたこともあり，結果として主観的な確率解釈は弾圧された。

しかし，頻度主義では全体的にあらかじめ定めなければならない約束事も多く，結論の精密さに対するさまざまな条件の保証，用いる方法の不備など，個々の細かい方法のケアに注意を注がなければならず，思考や発想に齟齬が生じてしまうことが多い。このような理由から，恣意的ゆえに様々な分野で応用可能で，人間の思考過程にうまく沿っている主観的な確率解釈が徐々に活用の場面を増やしていった。主観主義者が英雄となったのは，第 2 次世界大戦の時である。戦時下の指導者たちは，完全な情報が得られるのを待たずに，人の生死に関わる意思決定を素早く最良の形で行わなければならなかったことから，長期的な頻度に基づく頻度的な確率解釈ではなく，データが得られる度に確率を更新する主観的な確率

解釈が採用されたのである。この時に活躍したのが，チューリング（Alan Mathieson Turing）である。チューリングは，主観的な確率解釈に基づいて直観的な推測を採用し，ベイズの定理を用いてそれを定式化することで，特定のメッセージを暗号化する際に用いられたエニグマ（ドイツ軍の暗号生成機）の設定をつきとめることを行った。これは，原因の確率の古典的な問題である。それ以後，主観的な確率解釈に基づいたベイズの定理の応用は，イギリス政府の働きかけにより軍の機密扱いになり，口外されなかった時期を経て，保険や医学などの諸学問に拡大していった。医学分野で有名なのは，アメリカの統計学者であるコーンフィールド（Jerome Cornfield）の功績である。コーンフィールドは，肺がんの原因として喫煙を挙げ，肺がん患者に占める喫煙者の比率により原因を特定した。彼は，事前確率として，広く一般大衆の肺がん発生率を採用して，この情報を，肺がん患者が喫煙者である割合と，肺がんでない患者が喫煙者である割合に関する最新の調査データと組み合わせた（これらは尤度に該当する）。その結果，事後確率として喫煙者であるという条件の下，肺がんである確率を算出することができた。コーンフィールドは，ベイズの定理を用いることで，全人口における疾病のリスクと喫煙者のグループにおける疾病のリスクを論理的につなぐことに成功したのである。頻度的な確率解釈に基づけば，喫煙者および非喫煙者の大規模なグループを長い間追跡調査して，おのおののグループで何人が肺がんになるかを調べることで，このことを明らかにすることができる。しかし，大人数を対象とした将来にわたる研究には多大な資金と時間がかかるため，現実的ではなかったのである。

そして，ベイズを実用化する上で障害となっていた積分計算を克服する方法が開発された 1980 年代以降，その応用は更に広がっていった。同時期に工業の分野においても「大量」の時代は終わり，企画された大量生産ではなく，それぞれ

に細かく必要に応じた「多種少量」生産の時代に入った。平均的な値の管理では不十分で，個々のケースについて高い精度が求められるようになり，頻度的な確率解釈が適用される範囲は狭くなっていった（竹内，2018)。

このように，歴史的に対立していた 2 つの解釈であるが，今日ではその対立は軟化している。例えば医学の分野においては，薬の効果を検証する場合は頻度的な確率解釈を用いて，医療検査などは主観的な確率解釈を用いるなど，学問の発展に伴いその適用場面の柔軟性が増している。つまり，全数調査など，多数のデータが得られたり，何かを立証したい場合には，「客観的に（統計的に）証明された」ものとして受け入れられるだろう結論を主張できるようになりたいなら，用いるべきは頻度的な確率解釈である。その一方で，例えば迷惑メールの振り分けのように，客観的に証明できるほどの数のデータは入手できないが，今あるデータの中で最大限合理的な判断を行いたい場合や，「無料」などのキーワードが本文中に含まれていれば迷惑メールである確率が高いと判断するといった個人的な判断も確率を推定する情報として扱いたい場合には（松原，2008)，用いられるべきは主観的な確率解釈となる。このように今日の諸学問では，その他の確率解釈を受容せずにある一つの確率解釈に基づいてすべての現象を説明しようとするのではなく，確率を応用する場面に応じて，確率解釈を柔軟に使い分けることが一般的となっている[2－1]。これは，第 1 章に倣えば頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通了解的な解釈といえる。

確率解釈の史的展開をまとめれば，まずは対称な立方体は，それ投げればどの面も同程度に出るであろうという直観的な考えから始まることがわかる。これは個人の信念に基づいて確率を考えていることから，主観的な確率解釈である。しかしここでの個人の信念は直観的なものであり，データに基づいたそれではない。ゆえに本研究ではこれを，「直観的主観的な確率解釈」と呼ぶこととしよう。次に，

何度も賭けを行う中で，多数回の試行を伴わない直観的な考えが適用できないことを認識する状況に直面し，頻度的に確率を解釈するようになった。さらにその後，頻度的な確率解釈が現実的で無かったり，素早く意思決定を行わなければならない状況に直面したことから，主観的な確率解釈が適用されるに至ったという展開が確認できる。また，今日的には，両者の共通了解的な解釈が一般的となっている。

２．確率解釈の史的展開への着目

次節では，確率解釈の形成過程の規範的モデルを構築する。実際には，学習者が確率解釈を形成していく過程は累積的増加ではなく，複雑なものである（例えば，Jones, Langrall, Thornton, and Mogill, 1997）。しかし，学習者の形成過程の規範的モデルを理論的に構築し，仮説的な軌道を示しておかなければ，実際の学習者の形成過程に関する建設的な議論ができない。そこで本研究では，確率解釈の形成過程は，確率解釈の史的展開と整合的であると考え，それを構築する。最初に，方法とその妥当性について検討する。

史的展開を用いる理由としては，第１に，数学史を援用して個の認識を捉える研究は少なくなく（例えば，Sfard and Linchevski, 1994；真野，2010），確率についてのそれも研究されていて（Steinbring, 2005；大滝，2012），数学教育の視座からは数学史と数学教育の相互交渉の可能性や必要性が示されているからである（岩崎，2003；大滝，2012）。そこには少なからず，『精神発生と科学史』（ピアジェ・ガルシア，1996）の影響が見て取れる。認識の個体発生と科学的認識の系統発生を関連づけるピアジェ理論については批判もあるが，中垣（2011, p.22）は，発展機序として inra，inter，trans というサイクルが存在することや，アリ

ストテレスのアンチペリスタシンや古代エジプトの単位分数分解が幼児にも出現することなどを単なる偶然と済ますのではなく，両者の間を形式的にも内容的にも関連づける必要を示唆している。

第２に，確率においては史的展開と概念形成の過程の相互交渉が可能であると考えられるからである。前項より，新たな確率解釈へと展開する際に，既有の確率解釈では解決できない問題状況に直面することで新たな確率解釈が用いられることになったが，この「解決できない問題状況への直面」が確率・統計の概念形成においては重要であるとされているからである。例えば Shaughnessy (1992) は，我々が新しい確率課題に遭遇し，現在のモデルの集合が新しい課題に対して不適切であることが判明した場合，確率を考えるための新しいパラダイムを進化させる契機となると述べている。さらに大谷（2015）も，確率・統計は不確実性を取り扱う方法であり，それが内容知化された知識体系であることから，現実問題を解決するために，その解決方法として概念が形成されると主張する。すなわち，確率解釈の史的展開と形成過程には，既有の確率解釈では解決できない状況に直面し，それを解決するために新たな確率解釈が必要となることで，高次の解釈へと展開していくという共通点が存在するのである。

第２節．確率解釈の形成過程の規範モデル

前節より，確率解釈の形成過程は，その史的展開と相互交渉が可能であることが示唆された。そこで前節で概観した確率解釈の史的展開に基づけば，確率解釈は，直観的主観的な確率解釈，頻度的な確率解釈，主観的な確率解釈への順で形成されて，最終的に共通了解的な解釈が養われるべきであるということとなる。この過程は，頻度的な確率解釈は直観に合っているから認識されやすく，主観的

な確率解釈は直観に反することから認識されづらいという人間の本性（例えば，ローゼンハウス，2013）とも整合的である。まずは認識されやすい頻度的な確率解釈から始めて，その後主観的な確率解釈を扱う方が，発達の過程としては自然である。これをまとめると，確率解釈の形成過程の規範的モデルは図２－１のようになる。以下では，この段階について詳述する。

頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通了解的な解釈
主観的な確率解釈
頻度的な確率解釈
直観的主観的な確率解釈

図２－１　確率解釈の形成過程の規範モデル

１．直観的主観的な確率解釈

直観的主観的な確率解釈とは，多数回の試行に基づかず，直観的に確率を解釈する段階である。人間は何か立方体状のものを何回も転がしているうちに，どの面もほぼ等しく出ることに気づいたのではなく，対称な立方体を投げればどの面も同じ割合で出ることが予め分っていたからこそ，さいころを作ったのである（後藤，2009）。このことを考慮すれば，直観的主観的な確率解釈では，1 つのランダマイザーについての確率は正しく考えることができる。しかしながら，ランダマイザーが複数であったり，1 つのランダマイザーを用いて複数回の試行を行った場合には，確率を正しく考えることができない。例えば 3 つのさいころを同時に投げた時の，それぞれの目の総和の出方について，9 と 10 が同程度に出やすいと考えてしまうという具合である。

２．頻度的な確率解釈

頻度的な確率解釈では，確率は「ある試行を多数回繰り返したときに，ある事象が起こる回数の全体に対する割合が近づいていく値」（国立教育政策研究所，2018，p.96）であると認識することとなる。ゆえに，多数回の試行を行うことにより確率を推定することができる事象の確率は求めることができるが，1 回限りの事象について確率を推定することはできない。仮に推定するとしても，それは直観的主観的な確率解釈に基づいたものであり，合理的なそれではないという状態である。また，試行の結果から確率を推定することから，頻度的な確率解釈では確率は事象そのものの性質であり，その不確実性の程度を表すとする（竹内，2018）。そのため，学習者は確率が事象そのものに対して適用されるものであると捉えることとなり（Devlin, 2014），確率を考える事象についての新たな情報を得たとしても，確率は変わらないと考えてしまう。この傾向は，時間的に後の出来事を情報として，前の出来事の確率を考える際に顕著に現れる（例えば，Fischbein and Schnarch, 1997; Borovcnik, 2012；五十嵐，2014；松浦，2015）。

３．主観的な確率解釈

主観的な確率解釈では，確率は「事象の生起に関する信念の度合いを表現したもの」（文部科学省，2019，p.95）であると認識することとなる。その際の信念は，直観的主観的な確率解釈のように，個人の経験や嗜好のみに依るものではなく，ある経験的そして論理的な制約[2－2)]を満たした時に合理的であると見なされるものとなる。なぜなら，既に頻度的な確率解釈を形成していることから，情報として客観的データを取り入れることができるからである。また，同じ事象に対しても，有する情報が異なれば個人によって確率が異なることから，学習者は，確率

が事象に対して適用されるのではなく，事象についての情報に対して適用されるものであると捉えることとなる（Devlin, 2014）。日常の事象が，多数回起こることは稀である。ゆえに確率が事象そのものに対して適用されるという認識では，事象に確率を割り当てることができなかったり，少数回の試行の結果を多数回の試行の結果と同一視し，誤った確率を割り当ててしまう恐れがある。そこでは，情報が得られる度に確率を更新していくことが重要で，そのためには確率は事象についての情報に対して適用されるという認識が必要となる。このように，確率は事象に対して適用されるものではなく，事象についての情報に対して適用されるものであるという解釈は，今日的に求められる認識である。一方で，事象に対して適用されるものであるという解釈が必要でないかと言えばそうではない。なぜなら，確率の単元で最初に扱われる問題では，確率が事象に対して適用されるものと解釈していても，事象についての情報に対して適用されるものと解釈していても同じ答えを導出することができ，そのうち，事象に対して適用されるものであると解釈する方が自然だからである。この確率に対する人間の本性的な考えは，「場面の内在的構成要素としての確率」と呼ばれている（Falk, 1979, p.66)。ゆえに，最初から事象についての情報に対して適用されるものとしての解釈を教え込むことは，学習者の自然な発想に反するものである。そのため，まずは確率が事象に対して適用されるものであるという自然な解釈から始めて，それが適用できない状況を乗り越えることで長期的な確率概念の形成が期待できる。

さらに，ここで注意されたいのは，主観的な確率解釈を形成しても，頻度的な確率解釈は棄却されないということである。確率解釈の史的展開に基づけば，主観的な確率解釈が台頭した後に，頻度的な確率解釈が棄却されたという史実はない。主観的な確率解釈が台頭してきた後は，確率を応用する場面に応じて，確率解釈を柔軟に使い分けることができるようになるのである。ゆえに，主観的な確

率解釈が形成されれば，それ以降は直面する問題状況に応じて適切に確率解釈を切り替えることができるようになると考える。これは，頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通了解的な解釈を形成したという状態である。

第３節．第２章のまとめ

第１章より，確率概念の哲学的側面（確率解釈）において目標とするのは，頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通了解的な解釈であった。そこで第２章では，学習者はどのようなプロセスを経て，頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通了解的な解釈を形成すべきかについて，その規範モデルを構築することを目的とした。本章を概括すると以下のようになる。

- 確率解釈の形成過程の規範モデルを構築するための視点として，確率解釈の史的展開を設定した。確率解釈の史的展開と形成過程には，既有の確率解釈では解決できない状況に直面し，それを解決するために新たな確率解釈が必要となることで，高次の解釈へと展開していくという共通点が存在した。
- 「直観的主観的な確率解釈」，「頻度的な確率解釈」，「主観的な確率解釈」，「頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通了解的な解釈」の４段階からなる確率解釈の形成過程の規範モデルを構築した。また，各段階から高次の段階へは，既有の確率解釈では解決できない状況に直面し，それを解決するために新たな確率解釈が必要となることで展開するものであると論じた。

註

２－１）勿論，研究者によっては今日でも頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈は相容れないと考える者もいるが（マグレイン，2013），一般的には共通了解的な解釈がスタンダードであるし（例えば，後藤，2009；松原，2010；マグレイン，2013），数学教育においてはそれが推奨されている（例えば，Jones, Langrall, and Mooney, 2007; Carranza and Kuzniak, 2008; Díaz, and Batanero, 2009; Borovcnik and Kapadia, 2018）。

２－２）経験的制約とは，例えばもしあるさいころを振ると $\frac{1}{3}$ の頻度で 6 の目が出たことを知っているならば，次に 6 が出るという信念の度合いを $\frac{1}{3}$ に合わせなければならないということであり，論理的制約とは，例えばこれから行なおうとしている実験が 5 つの結果をもつということしか知らない場合，それぞれの結果に対する信念の度合いを $\frac{1}{5}$ に合わせなければならないということである（渡辺，2008，p.141）。

第２章の引用および参考文献

五十嵐慶太（2014).「モデル化という視点から見た条件付き確率に関する困難性：「時間軸の問題」を用いた分析」．日本数学教育学会　『数学教育学論究　臨時増刊第 47 回秋期研究大会特集号』，第 96 巻，pp.1-8.

岩崎秀樹（2003).「磯田論文（2002)『数学史上の関数と極限の数学化過程』の『眺望』をめぐって」．日本数学教育学会『第 36 回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録：今後の我が国の数学教育研究』，pp. 180-182.

大滝孝治（2012).「数学的ミスコンセプションのモデル化：小数の法則を事例として」．全国数学教育学会『数学教育学研究』，第 18 巻，第 1 号，pp.43-50.

大谷洋貴（2015).「統計的概念の形成過程に関する研究：否定論に着目して」．全国数学教育学会『数学教育学研究』，第 21 巻，第 2 号，pp.113-121.

カプラン, M.・カプラン, E. (2007).『確率の科学史：「パスカルの賭け」から気象予報まで』．対馬妙（訳)．朝日新聞社.

ギリース, D. (2004).『確率の哲学理論』．中山智香子（訳)．日本経済評論社.

国立教育政策研究所（2018).「平成 30 年度　全国学力・学習状況調査【中学校】報告書」．https://www.nier.go.jp/18chousakekkahoukoku/report/data/18mmath.pdf.（最終閲覧：2020 年 1 月 27 日）

後藤蔚（2009).「偶然と確率の哲学」．未公刊博士学位論文，東洋大学.

真野祐輔（2010).「算数・数学学習における概念変容に関する基礎的研究：「数」領域の展開を中心に」．未公刊博士学位論文，広島大学.

竹内啓（2018).『歴史と統計学：人・時代・思想』．日本経済新聞出版社.

中垣啓（2011).「認知発達の科学としてのピアジェ理論：ピアジェの遺産を継承

するために」．日本教育心理学会『教育心理学年報』，第 50 巻，p.22.

ハッキング, I. (2013).『確率の出現』．広田すみれ・森元良太（訳）．慶応義塾大学出版会.

ピアジェ, J. ・ガルシア, R. (1996).『精神発生と科学史：知の形成と科学史の比較研究』．藤野邦夫・松原望（訳）．新評論.

マグレイン, S, B. (2013).『異端の統計学 ベイズ』．冨永星（訳）．草思社.

松浦武人（2015).「初等教育における確率概念の形成を意図した学習材の開発研究」．未公刊博士学位論文，広島大学.

松原望（2008).『入門ベイズ統計：意思決定の理論と発展』．東京図書.

松原望（2010).『ベイズ統計学概説：フィッシャーからベイズへ』．培風館.

文部科学省（2019).『高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説 数学編 理数編』．学校図書.

ローゼンハウス, J. (2013).『モンティ・ホール問題：テレビ番組から生まれた史上最も議論を呼んだ確率問題の紹介と解説』．松浦俊輔（訳）．青土社.

渡辺一弘（2008).「ベイジアンネットワークと確率の解釈」．京都大学哲学論叢刊行会『哲学論叢』，第 35 巻，pp.130-141.

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Didactica de la Matemática*, *No.2*, pp.5-27.

Borovcnik, M., & Kapadia,R. (2018). Reasoning with Risk: Teaching Probability and Risk as Twin Concepts. In C. Batanero & E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research* (pp.3-22). Springer International Publishing.

Carranza, P., & Kuzniak, A. (2008). Duality of probability and statistics teaching in french education. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics.* Granada: ICMI and IASE.

Devlin, K. (2014). The Most Common Misconception About Probability? In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking: Presenting plural perspectives. Advances in Mathematics Education, Vol. 7* (pp.ix-xiii). Berlin: Springer.

Díaz, C., & Batanero, C. (2009). University students' knowledge and biases in conditional probability reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education, Vol.4*, No.3, pp.131-162.

Falk. R (1979). Revision of probability and the time axis. *Proceedings of the Third International Conference for Psychology of Mathematics Education*, *Vol.3*, pp.64-66.

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *Vol.28*, No.1, pp.96-105.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1997). A framework for assessing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics*, *Vol.32*, pp.101-125.

Jones, G. A., Langrall, C. W., & Mooney, E. S. (2007). Research in probability: Responding to classroom realties. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 909-955). New York: Macmillan.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification: the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, Vol.26*, pp.191-228.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp.465-494). New York: Macmillan.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: an epistemological perspective*. Berlin, Germany: Springer.

第３章：数学的側面からみた確率概念の形成過程の規範モデル

第１章より，確率概念の数学的側面において目標とするのは，条件付き確率である。そこで第３章では，学習者はどのようなプロセスを経て，条件付き確率の概念を形成すべきかについて，その規範モデルを構築することを目的とする。

本章では最初に，条件付き確率の理解に関する学習者の実態調査を行い，現状を分析することとする。なぜなら本章では，教材や授業の開発を志向して，条件付き確率を目標とした確率概念の数学的側面の形成過程の規範モデルを構築するのであり，平成 21 年 3 月告示の高等学校学習指導要領（文部科学省，2009）下で実施されている授業により，既に条件付き確率の理解が達成されているのであれば，新たに条件付き確率の概念形成過程を構築する必要はなく，学習指導要領や教科書の分析で十分であるからである。

第１節．条件付き確率の理解に関する学習者の実態調査

１．調査概要

調査は 2016 年 8 月に，数学 A において条件付き確率をすでに学習している国立大学附属高等学校の 2 年生 80 名を対象として行われた。その際，調査の一般性を担保するためスーパー・サイエンス・ハイスクール（SSH）のクラスに所属する生徒は調査対象から除いた。解答方法は選択式としたが，明確な理由が無いにもかかわらず正しい解答を偶然選択する生徒がいることが想定されるため，解答用紙にはその解答を選択した理由を記述する欄を設け，理由の記述が全く無いものや，明確な理由を記入していないもの（例えば，「なんとなく」など）に関しては，無解答とした。

ある病原菌の検査では，病原菌に感染しているのに誤って「感染していない」という結果が出る確率が $\frac{1}{100}$ ，感染していないのに誤って「感染している」という結果が出る確率が $\frac{2}{100}$ である。全体の 1%がこの病原菌に感染している集団から 1 人を選んで検査するとき，次の確率は下の（ア）から（オ）のうち，どれでしょう。

「感染している」という結果が出たとき，実際には感染していない確率

（ア）$\frac{1}{100}$　（イ）$\frac{2}{3}$　（ウ）$\frac{49}{50}$　（エ）$\frac{1}{3}$　（オ）$\frac{1}{50}$

図３－１　調査問題

調査問題は，高等学校数学科教科書（坪井ほか，2011）の小単元「条件付き確率」の最後のページに掲載されている問題を参考に作成した（図３－１）。

選択肢は（ア）から（オ）の５つとした。まず（ア）は，取り出した個体が感染しているという事象の確率である。（イ）は，検査結果が陽性であるという条件の下での，取り出した個体が感染していないという事象の確率である。（ウ）は，取り出した個体が感染していないという条件の下での，検査結果が陽性であるという事象の余事象の確率である。（エ）は，検査結果が陽性であるという条件の下での，取り出した個体が感染していないという事象の余事象の確率である。（オ）は，取り出した個体が感染していないという条件の下での，検査結果が陽性であるという事象の確率である。

取り出した個体が感染しているという事象を A ，検査結果が要請であるという事象を E とする。このとき，感染していないという事象は $\bar{A}$ で表され

$$P(A)=\frac{1}{100},\quad P(\bar{A})=\frac{99}{100},\quad P_A(E)=\frac{99}{100},\quad P_{\bar{A}}(E)=\frac{2}{100}$$

陽性となるのはその個体が感染している場合と, 感染していない場合があり，それらの事象は互いに排反であるから

$$\begin{aligned}P(E)&=P(A\cap E)+P(\bar{A}\cap E)\\&=P(A)P_A(E)+P(\bar{A})P_{\bar{A}}(E)\\&=\frac{1}{100}\times\frac{99}{100}+\frac{99}{100}\times\frac{2}{100}\\&=\frac{99}{10000}+\frac{198}{10000}=\frac{297}{10000}\end{aligned}$$

求める確率は，条件付き確率 $P_E(\bar{A})$ であるから

$$P_E(\bar{A})=\frac{P(\bar{A}\cap E)}{P(E)}=\frac{198}{10000}\div\frac{297}{10000}=\frac{198}{297}=\frac{2}{3}$$

図３－２　調査問題の模範解答

（坪井ほか，2011，p.61）

２．調査結果と分析

調査の結果，正答である（イ）を選択した生徒は，全体の 45%であった。また，誤答の中で最も反応率が高いのは（オ）であった（23.75%）。（オ）を選択した生徒は，問題文中の「感染していないのに誤って「感染している」という結果が出る確率が $\frac{2}{100}$ である。」という文言を，問いである「「感染している」という結果が出たとき，実際には感染していない確率」と同義と捉えていると考えられる。

表３－１　調査問題（図３－１）の反応率

選択肢	反応率（%）	正答
（ア）　$\frac{1}{100}$	6.25	
（イ）　$\frac{2}{3}$	45	◎
（ウ）　$\frac{49}{50}$	2.5	
（エ）　$\frac{1}{3}$	5	
（オ）　$\frac{1}{50}$	23.75	
無回答	17.5	

さらに，上述の 2 つの文章を，条件付き確率ではなく積事象の確率として捉えてしまい，解答を導くことができなかったという記述も見られた。次に誤答の中で反応率が高いのは（ア）であった（6.25%）。（ア）の確率は，分母が全事象の確率である。すなわち，条件付き確率と，分母が全事象の確率とを混同していると捉えることができる。このことから，現行カリキュラム下で行われている条件付き確率の指導は生徒の条件付き確率の学習を十分に支援できているとは言えないことがわかった。

第２節．条件付き確率とその関連概念

前節より，条件付き確率の困難性として，学習者は条件付き確率 $P_A(B)$，積事象の確率 $P(A \cap B)$，事象の確率 $P(B)$ の 3 つを混同していることがわかった。またその要因として，条件付き確率（図３－３）と，独立事象の確率などの条件

事象 A が起こったときに，事象 B が起こる確率を，事象 A が起こったときの事象 B が起こる条件付き確率といい，$P_A(B)$ で表す。

各根元事象が同様に確からしい試行において，その全事象を U とする。また，A，B を 2 つの事象とし，$n(A) \neq 0$ とする[1－5)]。このとき，条件付き確率 $P_A(B)$ は，

「A を全事象とした場合の事象 $A \cap B$ の起こる確率」と考えられ，次のように表される。

$$\boldsymbol{P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}} \quad \ldots ①$$

①の右辺の分母と分子を $n(U)$ で割ると，

$$\frac{n(A)}{n(U)} = P(A), \quad \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = P(A \cap B)$$

であるから，次の等式が得られる。

$$\boldsymbol{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}} \quad \ldots ②$$

図３－３（再掲）　条件付き確率

（坪井ほか，2011，pp.55-56）

付き確率の関連概念との繋がりが学習者にとって希薄であることがわかった。ミュラー・シュタインブリング・ビットマン（2004）は，まずは現状分析が必要であり，その結果をもとにした学問的研究こそが，授業を始めとする教育の改善に貢献することができるとし，現実を分析し事実を明らかにすることが必要であると述べている。尚，ここでの現状・現実は，就職・進学試験や，地域規模の到達テストによって導き出すことが可能であるとしており，学習者の学力を指していることがわかる。そこで本研究では，前節での調査結果の分析を踏まえて，関連概念との繋がりによる条件付き確率の概念形成の過程を明らかにすることが，今

日の確率教育において重要な課題であると考え，関連概念との繋がりによる条件付き確率の概念形成過程を明らかにする。本節ではまず，条件付き確率の関連概念を同定する。

上述の混同の要因をそれぞれの公式の形から考えると，まず，条件付き確率 $P_A(B)$ において，積事象の確率 $P(A \cap B)$ はその分子にあたる。つまりこれら 2 つの混同は，条件が与えられたことによって標本空間が縮小されたことを考慮していないことに起因すると考えられる。また条件付き確率 $P_A(B)$ において事象 B の確率 $P(B)$ は，条件付き確率 $P_A(B)$ の定義である「事象 A が起こったときに，事象 B が起こる確率」（坪井ほか，2011，p.55）のうち，条件である「事象 A が起こったときに」という文言を捨象したものと一致する。つまりこれら 2 つの混同は，事象 A が起こったことを考慮していないことに起因すると考えられる。以上より，$P_A(B)$ と $P(A \cap B)$ の混同と，$P_A(B)$ と $P(B)$ の混同を整理すると，両者共に条件を正しく処理していないことが混同の要因である。具体的には，$P_A(B)$ は公式の分母が事象 A の確率であるのに対し，$P(A \cap B)$ と $P(B)$ の公式の分母は，全事象 U の確率である。そこで第 1 に，条件付き確率の関連概念を，全事象 U の確率を分母とする確率とし，それを便宜上「条件なし確率」と定義する。

また，Batanero and Borovcnik (2016) は，条件付き確率と独立事象の確率が，「複雑に絡み合っている」(Batanero and Borovcnik，2016，p.74) として，その困難性を指摘している。このことは前節での調査結果からも確認できる。先ほど，$P(B)$ は条件なし確率の要素としたが，独立事象の確率の定義が $P_A(B) = P(B)$ であるという視点から考慮すれば，$P_A(B)$ と $P(B)$ の混同は，条件付き確率と独立事象の確率を混同している例と捉えることもできる。すなわち，独立事象の確率は条件付き確率の関連概念であり，条件付き確率の困難性の克服には，独立事象の確率との関係や差異性を明確に認識する必要があることが指摘される。さら

に，独立事象の確率は条件付き確率により導出された乗法定理を用いて定義される（藤澤，2006)。以上より第 2 の関連概念として，「独立事象の確率」を設定する。

１．条件なし確率

上述の通り，本研究における「条件なし確率」とは，公式の分母を全事象 U とするもののうち，数学教育で条件付き確率を学習する以前のそれらを指す。具体的には，図３－４の通りである。

・確率の定義	$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(U)}=\dfrac{\text{事象 A の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}$
・積事象の確率	$P(A\cap B)$
・和事象の確率	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
・余事象の確率	$P(\bar{A})=1-P(A)$

図３－４　条件なし確率

２．独立事象の確率

坪井ほか（2012）によると，独立事象は次のように定義される（図３－５）。例えば，1 から 10 までの番号をつけた 10 枚のカードから 1 枚を取り出すとき，その番号が奇数であるという事象と，5 の倍数であるという事象は独立な事象である（坪井ほか，2012)。

一般に，2 つの事象 A，B において

$$\boldsymbol{P_A(B)=P(B)} \quad \ldots①$$

が成り立つとき，事象 A の起こることが事象 B の起こる確率に影響を与えない．このとき，事象 B は事象 A に**独立**であるという．

①が成り立つとき，乗法定理により，次の式が成り立つ．

$$\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A)P(B)} \quad \ldots②$$

$P(A)\neq 0$，$P(B)\neq 0$ とする．このとき，逆に②が成り立つとすると，その両辺を$P(A)$ で割って①が導かれるから，①と②は同値である．

同様に考えて，②は等式 $P_B(A)=P(A)$ とも同値である．

ゆえに，事象 B が事象 A に独立ならば，事象 A は事象 B に独立となる．したがって，$P(A\cap B)=P(A)P(B)$ が成り立つとき，2 つの事象は互いに独立であるといってよい．

図３－５　独立事象の確率

（坪井ほか，2012，pp.135-136）

第３節．否定論に基づく数学的概念形成過程

前節では，条件付き確率の困難性の要因を，条件なし確率や独立事象の確率との混同と特徴づけた。本研究ではこの困難性の克服に向け，条件付き確率の概念形成とその関連概念との関係について考察するための理論枠組みとして，否定論を採用する。

否定論を用いる理由は，次の 3 つである。第 1 に，本研究で条件付き確率の困難性の要因と考える，複数の概念を混同しているという状態は，すなわち概念 A と概念 B の区別が出来ていないということである。後に詳しく述べるが，否定論

では概念 A と非 A を明確化することで新たな概念 B を生み出し，それにより概念 A と概念 B の区別が明確となる過程を記述する。ゆえに概念の混同という本研究の解決したい課題に対し有効であると考える。第 2 に，確率を含む統計領域においては，不確実性を扱う領域であることから，現実問題を解決するために，その解決方法として概念が形成される（大谷，2015）。そのような性質においては，当該概念が現実問題を解決するために適用することができないという否定の作用がなければ，その概念の適用範囲が明確化できず，概念が一般化されていない状態となる。なぜなら，純粋数学の内容領域の概念形成では，問題を解決する文脈が必ずしも含まれないので，問題状況を切り離して一般化へと至ることは比較的容易であるが，一方で問題解決を目的とする統計的概念においては，現実問題が解決されれば，学習者にとって解決方法を対象化して一般化へと進む理由がないからである。ゆえに，条件付き確率においてもその概念形成は問題解決を目的として行われ，当該概念が現実問題を解決するために適用することができないという否定の作用が必要不可欠であると考える。第 3 に，否定論は，コンセプションの動態を記述する枠組みであることから，概念形成過程を考える上で有効な枠組みである。以上 3 つの理由から，本研究では否定論を理論的枠組みとする。

１．岩崎 (1992) の否定論

岩崎（1992）は，ベルグソン（Bergson, H. L.）らの否定に関する見識から，数学的認識の展開における否定の必要不可欠性を指摘している。氏は，数学的概念の発達は対象の本質の捉え方により決定するとし，その本質は，辞書的な意味である「中心的な構成分子，主要成分，中心的意味」ではなく，substance の語源から「下位にあるもの」･「それ自身を支えるもの」として捉える。すなわち，本

質とは「外部にあってそれ自身を限定したり，規定しうるもの」（岩崎，1992，p.16）であり，「（ある数学的概念）A であることを規定するすべての非 A（¬A）が，A の本質ということになる」（岩崎，1992，p.16）（丸括弧内は筆者追記）。例えば，数学的概念「（1 とその数以外の数で）わり切れる数」の本質は，「¬（わり切れる数）」すなわち「わりきれない数」である。つまり「わり切れる数」は，「「わり切れない数」でない数」として規定される。

２．否定論に基づく数学的概念形成過程

岩崎（1992）は，3 つの否定により数学的概念の形成過程を特徴づけた。次に中野・岩崎（1999）により，否定の役割が，当該概念の適用不可能性を示すものである外延的否定と，性質や定義の差異性を明確化するものである内包的否定とに分類・明確化された。その後大谷（2015）は，岩崎（1992）の否定論に，中野・岩崎（1999）の概念形成における否定の分類と役割の視点を補う形で，否定論に基づく概念形成の過程を示している。以下では，大谷（2016，p.145）の論考を引用し，各段階について概観する。

2.1. 外延の限定

岩崎（1992，pp.16-17）はまず，数学的概念の本質（substance）を意識する必要があると述べる。数学的概念の本質への意識化は，当該概念の適用不可能性を意識することに他ならない。なぜなら，数学的概念¬A を意識することは，概念 A のもつ性質を対象¬A に適用することができないことを意識することに換言できるからである。中野・岩崎（1999，pp.328-329）による否定の役割の分類に基づけば，このような否定の役割は，外延的否定である。外延的否定によって，概

念 A の外延 E_A が限定され，明確にされる。例えば，数「4」や「6」は概念「1 とその数自身のほかにわり切れる数をもつ数」（以下，「割り切れる数」とする）の外延に含まれているが，数「5」や「7」はそうではない。

2.2. 内包の明確化

岩崎（1992，p.17）によれば，新たな数学的概念 B は，前段階で意識された否定表現の概念¬A を否定によって肯定的に命名することで生じる。例えば，数学的概念「素数」への質的変容は，「¬（わり切れる数)」すなわち「わり切れない数」という否定的状況が，「1 とその数自身のほかに約数がない」（以下，「約数がない」とする）という否定的な特徴づけによって肯定的に命名されることで起こる。つまり「素数」は数「5」や「7」のような「約数がない数」として認識される。

岩崎（1992）の否定論における二重否定とは，数理論理学的な二重否定とは異なり，認識論的な二重否定である（岩崎，1992；大滝，2013 参照)。ゆえに，否定的状況の否定による肯定的命名は，肯定的状況である概念 A と否定的状況である概念¬A との差異を否定によって明確にし，後者を前者とは異なる新しい内包をもつ概念として捉え直すことである。概念 A の内包が否定されることによって，新たな概念 B の内包が，概念 A が有している性質ではない性質として明確になる。このような新しい概念の内包を明確にする否定は，中野・岩崎（1999, pp.329-330） による否定の役割の分類に基づけば，内包的否定である。この段階では，内包的否定により，概念 B の内包 I_B が明確になる。

2.3. 概念の再構成

岩崎（1992，p.17）は，否定に基づく概念形成の最後の否定として，基盤となった概念 A と¬A に対する，新しい数学的概念 B の観点からの否定をあげている。この否定により，概念 A と¬A に新たな秩序がもたらされる。概念 A は概念¬B として特徴づけられる。例えば，新しく形成された数学的概念「素数」の視座から，「わり切れる数」と「わり切れない数」について，「1 は素数ではない」や「2，3 は素数であるからこれ以上分けることができない」と否定して特徴づけることにより両者が組織される。この否定により，「4」や「6」のような「わり切れる数」は，「¬（素数）」すなわち「素数ではない数」として認識される。

否定によって新たな視点から概念を再構成することは，両者の適用範囲や性質を明確にすることである。つまり，新しい概念 B の内包 I_B の否定によって基の概念 A の内包 I_A が見直されたり，新しい概念 B の外延 E_B の否定によって基の概念 A の外延 E_A が見直されたりして，概念 A と概念 B が内包的・外延的に再構造化される。

以上の各段階は，表３－２と図３－６にまとめられる。「外延の限定」に至る前の状態では，数学的概念 A がどんな対象にも適用可能であると誤って認識している状態である。例えば，「全ての数はわり切れる数である」とみなしている状態といえる。

また，こうして創られる概念 B は，概念¬B との差異性の観点から新たな対象である概念 C に遭遇することで外延が限定される。その対象は概念 B の本質であることから，その本質の意識化は概念 B の適用範囲の明確化につながり，したがってその概念は適切に使用されることができるようになる。このことは，新たな概念を形成するためには，内包が明確にされた概念の外延を限定することまでを

射程に入れなくてはならないことを示唆する（大谷，2016，p.146)。

表３－２　否定論に基づく数学的概念形成の過程

（大谷，2015，p.117）

1. 外延の限定
概念 A の外延的否定により，外延 E_A が限定される段階
2. 内包の明確化
概念 A の内包的否定により，内包 I_B が限定される段階
3. 概念の再構成
概念 B の外延的否定や内包的否定により，概念 A と概念 B が再構成される段階

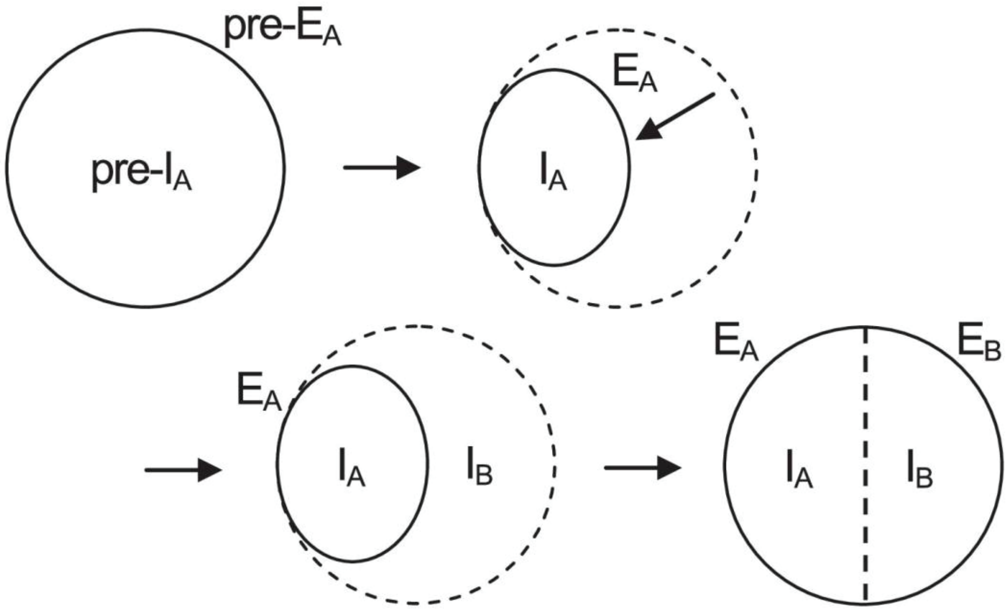

図３－６　否定に基づく概念形成における内包と外延

（大谷，2015，p.117）

第４節．条件付き確率の数学的概念形成過程の規範モデル

第 2 節より，条件付き確率とその関連概念は，「条件なし確率」，「条件付き確率」，「独立事象の確率」という順で並べることができる。ここで，本研究で形成過程を明らかにしたい概念である条件付き確率が真ん中に位置していることは，上述の「新たな概念を形成するためには，内包が明確にされた概念の外延を限定することまでを射程に入れなくてはならない」という大谷（2016，p.146）の論考とも整合的である。以上より本節では，第 1 に条件なし確率と条件付き確率の概念間の発達，第 2 に条件付き確率と独立事象の確率の概念間の発達について，否定論の視座から明確にしていく。

１．条件なし確率から条件付き確率へ

条件なし確率は，ある試行において，各根元事象が同様に確からしいときについて，起こり得るすべての場合のうち当該事象がどの程度起こることが期待できるかを考える場面で用いられる。一方，条件付き確率では，条件（情報）[3－1]を獲得することによって，それまで同様に確からしいと判断し，等確率であった 2 つ（以上）の事象の確率が，等確率でなくなる場合がある。例えば，1 から 10 までの番号をつけた 10 枚のカードから 1 枚を取り出す試行を考えると，条件が無い状況では取り出したカードの番号が 1 である確率と 2 である確率はどちらも $\frac{1}{10}$ と等しい。しかし取り出したカードの番号が奇数であるという条件を獲得すると，その番号が 1 である確率は $\frac{1}{5}$，2 である確率は 0 となって，両者の確率が異なり，2 つの事象が同様に確からしくなくなる。という具合である。すなわち，条件（情報）が与えられた場合，条件なし確率では，得られた条件（情報）を確

率計算に利用できていないことを意識させ，その適用範囲を限定させることができる。したがって，条件なし確率から条件付き確率への変容の最初の段階である外延の限定は，「(条件なし）確率[3－2]では，得られた条件（情報）を考慮した適切なモデルを導出することができないことを認識する」段階であると考えることができる。

外延の限定の段階より，それまで同様に確からしいと考えていた事象が，同様に確からしくなくなる場合の存在が明らかとなった。したがって，得られた条件（情報）を考慮できるようモデルを修正することが要求される。そこで，得られた条件（情報）の下で，当該事象の起きる確率を導出するようなモデルを，「条件付き確率」として捉え直す。

内包の明確化の段階より，関連概念である条件付き確率の内包が明らかになったら，今度はその視点から，条件なし確率を否定により特徴づける。条件なし確率とは，例えば「当該事象に対する条件（情報）を有していない確率」として捉え直すことができる。このようにすると両概念は再構成され，事象に対する条件（情報）を有しているか否かを基準として使い分けることができる。この過程をまとめると，表３－３のようになる。

２．条件付き確率から独立事象の確率へ

上述のように，2 つの事象 A，事象 B が独立であるとは，事象 A が起きたという条件に事象 B が起きる確率が依存しないということである（図３－５）。すなわち，ある事象の確率を考える際に，得られた情報を考慮しても，考慮していないモデルと同じ確率値が算出されることから，得られた情報が条件にはならない場合があることを意識させ，その適用範囲が限定される。したがって，条件付き

表３－３　条件なし確率から条件付き確率へ

1. 外延の限定
（条件なし）確率では，得られた条件（情報）を考慮した適切なモデルを導出することができないことを認識する
2. 内包の明確化
「それまで同様に確からしいと考えていた事象が同様に確からしくなくなる」ことから，条件（情報）の下で当該事象の起きる確率を導出するモデルである条件付き確率が必要となる
3. 概念の再構成
これまでの確率は，当該事象に対する条件（情報）を有していないモデルであって，それを「条件なし確率」と捉え直すことで，条件なし確率と条件付き確率の概念が再構成される

確率から独立事象の確率への変容の最初の段階である外延の限定は,「得られた情報を考慮しても，考慮していないモデルから算出された確率値と変わらない場合があること（すなわち，$P_A(B) = P(B)$）を認識する」段階であると考えることができる。

外延の限定より，$P_A(B) = P(B)$ となる場合が挙げられたことから，条件付き確率ではない別の言葉で定義する必要が生じる。そこで，「ある事象 A が起きたという条件（情報）に，事象 B が起きる確率が依存しない」ことを，事象 A と事象 B が独立であると命名することになる。さらに，独立事象の確率を定義する式として，乗法定理を用いて $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ と表す。以上をまとめて「独立事象の確率」として捉え直す。

表３－４　条件付き確率から独立事象の確率へ

1. 外延の限定
得られた情報を考慮しても，考慮していないモデルから算出された確率値と変わらない（すなわち， $P_A(B) = P(B)$ ）場合があることを認識する
2. 内包の明確化
「事象 A が起きたという条件（情報）に，事象 B が起きる確率が依存しない」とき，事象 A と事象 B が独立であると命名し，$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ と表す
3. 概念の再構成
条件付き確率は，次のように特徴づけられる ● $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ ● $P_A(B) \neq P(B)$ ， $P_B(A) \neq P(A)$

内包の明確化の段階より，関連概念である独立事象の確率の内包が明らかになったら，今度はその視点から，条件付き確率を否定により特徴づける。独立事象の確率の定義から，条件付き確率は「$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$」であり，「$P_A(B) \neq P(B)$ ， $P_B(A) \neq P(A)$」である。このような特徴づけから，2 つ（以上）の事象が対称関係にあるか否かを基準として 2 つの概念は使い分けることができる。この過程をまとめると，表３－４のようになる。

「独立」は日常語でもあり，数学教育の確率単元においても「独立試行の確率」という類似した表現もあること等から，独立事象の確率に対しては誤った理解も多い。事象が独立か従属かを判定するためには，事象の対称関係を示す式 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ を十分に理解する必要がある。複雑化する社会では，情報の取

捨選択が求められる。その時に得られた情報が，当該事象と独立か従属かが判定できなければ，適当でない推論を行う可能性がある。事象の独立性はそのように見えなくても成り立つことがある[3−3)]ので，独立か従属かを判定できることが，今日的に求められている。

３．条件付き確率の数学的概念形成過程の規範モデル

上述より，「条件なし確率から条件付き確率へ」（表３－３）と「条件付き確率

表３－５　条件付き確率の数学的概念形成の規範モデル

1. 外延の限定
（条件なし）確率では，得られた条件（情報）を考慮した適切なモデルを導出することができないことを認識する
2. 内包の明確化
「それまで同様に確からしいと考えていた事象が同様に確からしくなくなる」ことから，条件（情報）の下で当該事象の起きる確率を導出するモデルである条件付き確率が必要となる
3. 概念の再構成
これまでの確率は，当該事象に対する条件（情報）を有していないモデルであって，それを「条件なし確率」と捉え直すことで，条件なし確率と条件付き確率の概念が再構成される
4. 外延の限定
得られた情報を考慮しても，考慮していないモデルから算出された確率値と変わらない（すなわち，$P_A(B) = P(B)$）場合があることを認識する

から独立事象の確率へ」（表３－４）の数学的概念形成過程を構築した。新たな概念を形成するためには，内包が明確にされた概念の外延を限定することまでを射程に入れなくてはならないことを考慮して，これらの成果をまとめると，条件付き確率の数学的概念形成過程の規範モデルは，次のようになる（表３－５）。

第５節．第３章のまとめ

第１章より，確率概念の数学的側面において目標とするのは，条件付き確率であった。そこで第 3 章では，数学的概念として条件付き確率を対象として，その概念形成過程の規範モデルを構築することを目的とした。本章を概括すると以下のようになる。

- 現行カリキュラムにおいて条件付き確率を学習した生徒を対象として，条件付き確率の理解に関する調査を実施したところ，現行カリキュラムにおける条件付き確率の扱いは十分ではないことがわかった。また，学習者は条件付き確率 $P_A(B)$，積事象の確率 $P(A \cap B)$，事象の確率 $P(B)$ の 3 つを混同しているという困難性が明らかとなった。
- 関連概念との混同という条件付き確率の困難性を考慮して，条件付き確率の数学的概念形成過程の規範モデルを構築する視点として，概念 A と非 A を明確化することで新たな概念 B を生み出し，それにより概念 A と概念 B の区別が明確となる過程を記述する否定論を設定した。
- 第 4 節では，否定論に基づく数学的概念形成過程に基づいて，条件なし確率の外延が限定される段階から，条件付き確率の外延が限定される段階までの 4 つの段階として条件付き確率の数学的概念形成過程の規範モデルを構築した。

註

３－１）ここで「条件（情報)」と記す理由は,「条件」とは「約束や決定をする際に，その内容に関しての前提や制約となる事柄」（松村，2006）（下線は筆者加筆）であるからである。すなわち，この意味では，当該事象とその条件となる事象は常に関係（従属）していることを含意する。しかしながら 2 つ（以上）の事象が独立である場合には，ある事象がその他の事象の前提や制約となる場合はなく,条件としての機能を有さない。そこで本研究では，「ある物事の内容や事情についての知らせ」（松村，2006）（下線は筆者加筆）という意味である「情報」という言葉を加えることで事象の独立と従属を包含し,「条件なし確率」,「条件付き確率」,「独立事象の確率」の全てにおいて共通した表現を用いることとする。

３－２）「(条件なし）確率」とは，条件付き確率を学習した学習者から見れば，条件なし確率であるが，条件付き確率を未習である学習者から見れば，確率である確率を意味する。なぜなら条件付き確率を未習である学習者は，条件なし確率を条件なし確率として対比的に見ることができないので，確率としてしか認識できないからである。

３－３）例えば，さいころを 1 回投げるとき，2 の倍数が出るという事象を A，3 以上の目が出るという事象を B, 3 の倍数が出るという事象を C とする。このとき，

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\qquad P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\qquad P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

であるから　$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

よって，2 つの事象 A と B は独立である。

一方で，

$$P(B)=\frac{2}{3},\qquad P(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\qquad P(B\cap C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

であるから　$P(B\cap C)\neq P(B)\cdot P(C)$

よって，2 つの事象 B と C は従属である。

このように，事象の独立は容易に判断することができず，確率を計算することで初めて判定できる。

第３章の引用および参考文献

岩崎秀樹（1992).「数学学習における「否定」の研究(1)」．日本数学教育学会『数学教育論文発表会論文集』．第 25 巻，pp.13-18.

大滝孝治（2013).「確率ミスコンセプションの克服に関する否定論的考察：小数の法則を事例として」．全国数学教育学会『数学教育学研究』．第 19 巻，第 2 号，pp.109-115.

大谷洋貴（2015).「統計的概念の形成過程に関する研究：否定論に着目して」．全国数学教育学会『数学教育学研究』．第 21 巻，第 2 号，pp.113-121.

大谷洋貴（2016).「否定論を視点とした回帰直線の学習指導に関する一考察」．全国数学教育学会『数学教育学研究』．第 22 巻，第 2 号，pp.141-151.

坪井俊ほか 13 名（2011).『数学 A』．数研出版.

坪井俊ほか 13 名（2012).『数学 B』．数研出版.

中野俊幸・岩崎秀樹（1999).「数学教育における「否定」について(Ⅱ)：概念形成における「否定」の役割について」．日本数学教育学会『数学教育論文発表会論文集』．第 32 巻．pp.327-330.

藤澤洋徳（2006).『確率と統計』．朝倉書店.

松村明（2006).『大辞林第三版』．三省堂.

ミュラー, G. N.・シュタインブリング, H.・ビットマン, E. (2004).『PISA を乗り越えて：生命論的観点からの教育改革プログラム：算数・数学授業改善から教育改革へ』．國本景亀・山本信也(訳)．東洋館出版社.

文部科学省（2009).『高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編』．実教出版.

Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and Probability in High School.* Sense Publishers.

第４章：確率概念の形成過程の規範モデル

第２章と第３章では，確率概念を哲学的側面（確率解釈）と数学的側面とにわけ，それぞれの形成過程の規範モデルを構築した。本研究では確率解釈を軸として確率概念の形成[4－1]過程について考察するが，それには数学的側面との関連づけが不可欠であることから，本章では第２章と第３章で導出したそれぞれの側面の形成過程の規範モデルを関連づけ，確率概念の形成過程の規範モデルを構築する。さらに，本研究では教育学に固有の特色である実践志向性を重視し，教材と授業の開発を行う。本研究では特に，先行研究での考察がほとんどない主観的な確率解釈の学習と，主観的な確率解釈と条件付き確率の関連づけに焦点化し，まず本章ではそれらの学習の原理を導出する。

第１節．確率概念の形成過程の規範モデル

確率概念は現実問題を解決するために，その解決方法として形成されるものであるから（Shaughnessy, 1992; 大谷，2015），既有の確率解釈が適用できないと認識するためには，それをモデル化するための数学的側面が不可欠となる。ゆえに，確率解釈を形成していく上では，数学的側面との関連が不可欠である。しかしながら, 現在の数学教育では, これらの関連づけが重要であるにもかかわらず, 十分に検討されていないと指摘されている（例えば，Chernoff, 2008; Borovcnik, 2012）。そこで本節では，確率解釈を視点として確率概念の数学的側面を捉え，どのような順序で確率解釈と数学的側面を配列するかを検討する。

１．頻度的な確率解釈と確率概念の数学的側面

頻度的に確率を解釈する頻度論者は，ある事象が生起した可能性のあるすべての出来事を考えてそれをコレクティフ（collective）と呼び，その中でその事象が生起した回数の割合として確率を捉える（マンクテロウ，2015，p.4）。このように捉えれば，任意の 2 つの事象 A，B に対して，

$$P(A) + P(B) = P(A \cap B) + P(A \cup B)$$

であることがわかり, 確率概念の数学的側面が展開されていく（ギルボア, 2012）。

このことを踏まえて，まずは頻度的な確率解釈を認識し，それに基づいて確率概念の数学的側面が展開されることが望ましいと考えられる。以上をまとめると，図４－１になる。

確率概念	
哲学的側面（確率解釈）	**数学的側面**
頻度的な確率解釈	（条件なし）確率
直観的主観的な確率解釈	

図４－１　頻度的な確率解釈と確率概念の数学的側面との関連

２．主観的な確率解釈と確率概念の数学的側面

主観的な確率解釈を形成する際には, 条件なし確率を習得しておく必要がある。なぜなら，主観的な確率解釈が個人に特有で，すべての人に共通である必要はないが，その個人のなかでは整合的でなければならず，いかに主観的でもまったく

の思い付きであってはならないからである（松原，2010)。例えば，

$$P(A)=\frac{1}{2},\qquad P(B)=\frac{1}{3},\qquad P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

であれば，

$$P(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

であり，

$$P(A\cup B)=\frac{3}{4}$$

と与えることは，その個人の中でも数理的に成り立たず認められない。このように，主観的な確率解釈に対する最低限の無矛盾性が保証される必要がある。

主観的な確率解釈の形成前には，上述の内容が必要である一方，形成後に扱われるべき数学的な内容としては，条件付き確率が挙げられる。すなわち，この段階で，表４－１の「1. 外延の限定」,「2. 内包の明確化」,「3. 概念の再構成」が行われる。なぜなら，頻度的な確率解釈に基づいても条件付き確率は計算可能であるが，その意味づけが困難な場合があるからである。実際，頻度的な確率解釈の下で条件付き確率を指導した結果，条件付き確率やベイズの定理の理解に困難性が生じていることが，多くの実証的研究によって報告されている（例えば，Díaz and Batanero, 2009; Borovcnik, 2012)。ゆえに，条件付き確率は主観的な確率解釈の下で指導されるべきである。このことは，主観的な確率解釈はベイズの定理を方法論とする（マンクテロウ，2015）という見解や，ベイズの定理は主観的な確率解釈に数理を与えるものとして決定的に重要であるという見解（柳川，2007；マンクテロウ，2015；Batanero and Borovcnik, 2016）とも整合的であり，それらを関連づけることが望ましいと考える。

以上より，頻度的な確率解釈および条件なし確率を形成した後は，主観的な確率解釈を認識させ，それに基づいて条件付き確率を指導することが望ましいと考

表４－１（再掲）　条件付き確率の数学的概念形成の規範モデル

1. 外延の限定
（条件なし）確率では，得られた条件（情報）を考慮した適切なモデルを導出することができないことを認識する
2. 内包の明確化
「それまで同様に確からしいと考えていた事象が同様に確からしくなくなる」ことから，条件（情報）の下で当該事象の起きる確率を導出するモデルである条件付き確率が必要となる
3. 概念の再構成
これまでの確率は，当該事象に対する条件（情報）を有していないモデルであって，それを「条件なし確率」と捉え直すことで，条件なし確率と条件付き確率の概念が再構成される
4. 外延の限定
得られた情報を考慮しても，考慮していないモデルから算出された確率値と変わらない（すなわち，$P_A(B)=P(B)$）ことを認識する

えられる。以上をまとめると，図４－２になる。

さらに，主観的な確率解釈が形成されれば，それ以降は直面する問題状況に応じて適切に確率解釈を切り替えることができるようになると考えられることから，新たに頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通了解的な解釈へと展開する。また，条件付き確率の概念形成のためには，その外延を限定することまでを射程に入れなくてはならず（大谷，2016），第 3 章よりそれは，新たな概念として独立事象の確率に遭遇することである（表４－１の「4. 外延の限定」）。以上より，

確率概念の形成過程の規範モデルは，図４－３になる。

<table>
<tr><th colspan="2">確率概念</th></tr>
<tr><th>哲学的側面（確率解釈）</th><th>数学的側面</th></tr>
<tr><td rowspan="2">主観的な確率解釈</td><td>条件付き確率</td></tr>
<tr><td rowspan="2">（条件なし）確率</td></tr>
<tr><td>頻度的な確率解釈</td></tr>
</table>

図４－２　主観的な確率解釈と確率概念の数学的側面との関連

<table>
<tr><th colspan="2">確率概念</th></tr>
<tr><th>哲学的側面（確率解釈）</th><th>数学的側面</th></tr>
<tr><td rowspan="2">頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の
共通了解的な解釈</td><td>独立事象の確率</td></tr>
<tr><td rowspan="2">条件付き確率</td></tr>
<tr><td rowspan="2">主観的な確率解釈</td></tr>
<tr><td rowspan="2">条件なし確率</td></tr>
<tr><td rowspan="2">頻度的な確率解釈</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>直観的主観的な確率解釈</td></tr>
</table>

図４－３　確率概念の形成過程の規範モデル

第２節．学習の原理

前節では確率概念の形成過程の規範モデル（図４－３）を構築した。以下では，

図４－３に基づいて，確率概念の形成を目指す教材と授業の開発と実践を行う。その際，本研究では特に「主観的な確率解釈」と「主観的な確率解釈と条件付き確率の関連」に焦点化する。なぜなら，頻度的な確率解釈と確率概念の数学的側面とを関連づける授業（例えば，織田，2009；Prodromou, 2012; Abrahamson, 2014; Kazak, Wegerif, and Fujita, 2015）に関する研究は確認できる一方で，主観的な確率解釈や，主観的な確率解釈と条件付き確率の関連についての教材や授業に関する研究はほとんどないからである（Witmer, 2018)。

１．学習の原理α：主観的な確率解釈

前節までで，頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通了解的な解釈を目標とし，数学史を参照することで確率解釈の形成過程の規範モデルを構築した。歴史的に見て，確率解釈は，既有の解釈では解決できない問題が生じ，それを乗り越えるようにして新たな解釈が用いられるという形で発展してきた。本研究で着目する主観的な確率解釈については，社会の変化に伴って頻度的な確率解釈が適用される範囲が狭くなっていき，それを乗り越えるようにして広まっていったとまとめることができる（マグレイン，2013；竹内，2018)。一方で Shaughnessy (1992, p.469) によれば，個人あるいは集団の確率に関するパラダイムシフトは，新たな確率課題を解決することができないことを契機に生じる。これらを総合すると，確率解釈の史的展開と個人あるいは集団の確率に関するパラダイムシフトには，既有の解釈では解決できない状況に直面し，それを解決するために新たな解釈が必要となることで，高次の解釈へと展開していくという共通点を確認できる。すなわち，主観的な確率解釈については，まずは頻度的な確率解釈が形成されていて，それが適用できない状況に直面することで，新たな確率解釈として主

観的な確率解釈を学習するという展開が望ましいと考えられる。

頻度的な確率解釈が形成されていて，主観的な確率解釈が形成されていない状態とは，多数回の試行を行うことにより確率を推定することができる事象の確率は求めることができるが，1 回限りの事象について確率を推定することはできない状態である。また，頻度的な確率解釈では，試行の結果から確率を推定することから，確率は事象そのものの性質であり，その不確実性の程度を表すとする（竹内，2018）。そのため，学習者は確率が事象そのものに対して適用されるものであると捉える傾向にあり（Devlin, 2014），確率を考える事象についての新たな情報を得たとしても，確率は変わらないと考えてしまう。この傾向は，時間的に後の出来事を情報として，前の出来事の確率を考える際に顕著に現れる（例えば，五十嵐，2014）。

以上より，主観的な確率解釈は，「頻度的な確率解釈が適用できないと認識することを契機として学習される」ことが望ましい。本研究ではこの鉤括弧部分を，学習の原理 α と呼ぶこととする。

２．学習の原理 *β*：主観的な確率解釈と条件付き確率の関連

確率概念には哲学的側面（確率解釈）と数学的側面の 2 つの側面がある（ギリース，2004）。ゆえに確率概念の形成について考察する上では，確率解釈の形成に加えて，確率の数学的概念形成についても考えなければならないことを，前節までで確認した。さらに，それらは独立ではなく互いに関連づけることが重要である（例えば，Chernoff, 2008）。そこで，まずは条件付き確率の数学的概念形成について，否定論（岩崎，1992）に基づいてその過程を構築した第 3 章を参照して整理する。

・確率の定義	$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(U)}=\dfrac{\text{事象}A\text{の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}$
・積事象の確率	$P(A\cap B)$
・和事象の確率	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
・余事象の確率	$P(\bar{A})=1-P(A)$

図４－４（再掲）　条件なし確率

第 3 章では，関連概念との関係の認識の希薄化により指摘される条件付き確率の困難性に着目し，関連概念との否定関係により数学的概念形成の過程を特徴づけている否定論（岩崎，1992）に基づいて，条件付き確率の数学的概念形成の過程を構築した（表４－１）。否定論に基づけば，条件付き確率の数学的概念形成は，条件なし確率では，得られた条件（情報）を考慮した適切なモデルを導出することができないこと契機として始まる。ここで，条件なし確率とは，公式の分母を全事象 U とするもののうち，数学教育で条件付き確率を学習する以前のそれらを指す（図４－４）。

以上より，条件付き確率は、条件なし確率が適用できないことを契機として学習することが望ましい。さらに主観的な確率解釈との関連については，主観的な確率解釈をモデル化するためのものとして，条件付き確率が学習されることが望ましい。これらをまとめると，条件付き確率は，「条件なし確率では，主観的な確率解釈をモデル化できないことを認識し，主観的な確率解釈をモデル化するものとして学習される」ことが望ましいといえる。本研究ではこの鉤括弧部分を，学習の原理 β と呼ぶこととする。

第３節．第４章のまとめ

第４章では，まず，第２章および第３章を踏まえて，確率概念の形成過程の規範モデルを構築することを目的とした。次に，第１章で同定した目標に関わって，特に先行研究での考察が十分でない「主観的な確率解釈」と「主観的な確率解釈と条件付き確率の関連づけ」の学習の原理を導出することを目的とした。本章を概括すると以下のようになる。

- 先行研究より，確率概念の形成過程としては，まずはある確率解釈を認識し，それをモデル化するために数学モデルを学習する。次に，それが現実問題に適用できないことを契機に新たな確率解釈が認識される。その後，その新たな確率解釈をモデル化するために数学モデルを学習するという過程の繰り返しが想定された。これを踏まえて，前章までで哲学的側面と数学的側面とに分けて構築した確率概念の形成過程の規範モデルを関連させて，確率概念の形成過程の規範モデルを構築した。
- 第１章で設定した目標である「頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通了解的な解釈」と「条件付き確率」の概念形成を目指す学習の原理として，特に先行研究での考察が十分でない「主観的な確率解釈」と「主観的な確率解釈と条件付き確率の関連」の学習に関わって次の２つを導出した（図４－５）。

学習の原理 α：主観的な確率解釈

頻度的な確率解釈が適用できないと認識することを契機として学習される

学習の原理 β：主観的な確率解釈と条件付き確率の関連

条件なし確率では，主観的な確率解釈をモデル化できないことを認識し，主観的な確率解釈をモデル化するものとして学習される

図４－５　学習の原理

註

４－１）本研究では，確率概念の形成は，教師の意図的な指導によりもたらされるものと考えている。そのため，既有の確率解釈や，数学モデルが適用できない状況は，教師により与えられることを意図している。

第４章の引用および参考文献

五十嵐慶太（2014).「モデル化という視点から見た条件付き確率に関する困難性：「時間軸の問題」を用いた分析」．日本数学教育学会 『数学教育学論究　臨時増刊第 47 回秋期研究大会特集号』，第 96 巻，pp.1-8.

岩崎秀樹（1992).「数学学習における「否定」の研究(1)」．日本数学教育学会『数学教育論文発表会論文集』．第 25 巻，pp.13-18.

大谷洋貴（2015).「統計的概念の形成過程に関する研究：否定論に着目して」．全国数学教育学会『数学教育学研究』，第 21 巻，第 2 号，pp.113-121.

大谷洋貴（2016).「否定論を視点とした回帰直線の学習指導に関する一考察」．全国数学教育学会『数学教育学研究』．第 22 巻，第 2 号，pp.141-151.

織田勇一（2009).「中学校数学科における確率指導の改善：数学的確率と統計的確率の相互作用に着目して」．日本数学教育学会『数学教育論文発表会論文集』，第 42 巻，pp.397-402.

ギルボア, I. (2012).『意思決定理論入門』．川越敏司・佐々木俊一郎（訳)．NTT 出版.

ギリース, D. (2004).『確率の哲学理論』．中山智香子（訳)．日本経済評論社.

竹内啓（2018).『歴史と統計学：人・時代・思想』．日本経済新聞出版社.

マグレイン, S, B. (2013).『異端の統計学 ベイズ』．冨永星（訳)．草思社.

松原望（2010).『ベイズ統計学概説：フィッシャーからベイズへ』．培風館.

マンクテロウ, K. (2015).『思考と推論：理性・判断・意思決定の心理学』．服部雅史・山祐嗣（訳)．北大路書房.

柳川尭（2007).「ベイズの定理とバイオ統計学」. 大賀雅美（編),『数学セミナー』，第 46 巻，第 2 号，pp.13-17．日本評論社.

Abrahamson, D. (2014). Rethinking Probability Education: Perceptual Judgment as Epistemic Resource. In E. J. Chernoff, & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking: Presenting plural perspectives. Advances in Mathematics Education, Vol. 7* (pp.239-260). Berlin: Springer.

Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and Probability in High School*. Sense Publishers.

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Didactica de la Matemática*, *No.2*, pp.5-27.

Chernoff, E. J. (2008). The state of probability measurement in mathematics education: A first approximation. *Philosophy of Mathematics Education Journal, Vol.23*, pp.1-23.

Devlin, K. (2014). The Most Common Misconception About Probability? In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking: Presenting plural perspectives. Advances in Mathematics Education, Vol. 7* (pp.ix-xiii). Berlin: Springer.

Díaz, C., & Batanero, C. (2009). University students' knowledge and biases in conditional probability reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education, Vol.4*, No.3, pp.131-162.

Kazak, S., Wegerif, R., & Fujita, T. (2015). Combining scaffolding for content and scaffolding for dialogue to support conceptual breakthroughs in understanding probability. *ZDM Mathematics Education*, *Vol.47*, Issue.7, pp.1269-1283.

Prodromou, T. (2012). Connecting experimental probability and theoretical probability. *ZDM Mathematics Education*, *Vol.44*, Issue.7, pp.855-868.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp.465-494). New York: Macmillan.

Witmer, J. (2018). To Bayes or Not to Bayes? (The Answer Is Yes). In D. Ben-Zvi, K. Makar, and J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp.426-428), Springer International Publishing.

第５章：確率概念の形成を目指した教材と授業

第４章では，確率概念の形成過程の規範モデルを構築し，それに基づいて学習の原理α，βを導出した。本研究では確率概念の形成は教師の意図的な指導により達成されるものであると考えていることから，学習の原理α，βのように学習者が学習するためには，教材や他者の支援が不可欠である。そこで本章では，学習の原理α，βに基づいた学習を支援することを目指した教材と授業を開発・実践し，その分析と考察を通して，確率概念の形成を目指した教材と授業の条件と，その具体例を示すことを目的とする。

第１節．教材と授業の開発

１．教材開発

学習の原理α，β（図５－１）より，まずは主観的な確率解釈を学習し，次にそれをモデル化するものとして条件付き確率を学習するという授業展開が望まし

学習の原理α：主観的な確率解釈

頻度的な確率解釈が適用できないと認識することを契機として学習される

学習の原理β：主観的な確率解釈と条件付き確率の関連

条件なし確率では，主観的な確率解釈をモデル化できないことを認識し，主観的な確率解釈をモデル化するものとして学習される

図５－１（再掲）　学習の原理

教材の条件ａ（学習の原理αより）： 　これまでは事象に対して確率は適用されると考えてきたと想定されるから，事象についての情報に対して確率は適用されると考えさせる 教材の条件ｂ（学習の原理βより）： 　これまでは原因に対する結果の確率を考えてきたから，結果に対する原因の確率を考えさせる

図５－２　学習の原理 α，β に基づいた学習を支援する教材の条件ａ，ｂ

いと考えられる。ゆえに授業の始めには，学習者が頻度的な確率解釈が適用できないと認識する状況を設定する必要がある。そのような状況は，主観的な確率解釈にはあって，頻度的な確率解釈にはない考え方を要求するような教材によって設定できる。このような教材が具備すべき条件は，少なくとも次の２つである（図５－２）。

まず，教材の条件ａについて説明する。前述の通り，頻度的な確率解釈では，学習者は確率を，事象に対して適用されるものであると捉えている傾向にある。この認識は，頻度的な確率解釈で解決できる問題においては不都合が生じないから，頻度的な確率解釈のみを形成している学習者にとっては合理的な認識である。しかしながら，この認識では全ての確率的事象に対して十分であるとは言えない。例えば「時間軸の問題」（図５－３）において，確率が事象そのものに適用されると考えている学習者は，２つ目の白玉が取り出される前に，既に１つ目の玉は取り出されているのだから，２つ目の玉が何色であれ，１つ目の玉の色の確率には影響を与えないと考えてしまう（Fischbein and Schnarch, 1997; 松浦，2006；五十嵐，2014)。しかし正しくは，２つ目の玉が白玉であることがわかったことで，

翼は，2 つの白玉と 2 つの黒玉が入った箱を受け取りました。翼は，箱から玉を 1 つ取り出し，それを見ずに横に置きました。翼が，2 つ目の玉を取り出して見ると白玉でした。このとき，最初の玉が白玉である確率を求めなさい。

図５－３　時間軸の問題

既に取り出されている 1 つ目の玉が白玉である確率は下がる。このように，確率は事象そのものに対して適用されるものではなく，事象についての情報に対して適用されるものである（Devlin, 2014)。この認識は，確率を人間の客観的事象についての主観的判断，その主観的評価を表すものと考える主観的な確率解釈（竹内，2018）と整合的である。ゆえに，「確率は事象に対して適用される」と認識している学習者に対し，「確率は事象についての情報に対して適用される」と認識することを要請するような問題状況が必要である。

次に，教材の条件 b について説明する。頻度的な確率解釈では，原因に対する結果の確率を考える。一方で主観的な確率解釈では，それに加えて結果に対する原因の確率を考えることもできるようになる。その意味で頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈は「ちょうど逆の立場」（松原，2013，p.286）である。ゆえに，これまで原因に対する結果の確率を考えていた学習者が，結果に対して原因の確率を考える必要があるような問題状況が必要である。さらに，条件なし確率が適用できないことは，結果の確率を考える頻度的な確率解釈に基づく場合よりも，原因の確率を考える主観的な確率解釈に基づく場合に認識されやすい。なぜなら，例えば「当たりくじ 2 本を含む 4 本のくじがある。修二と彰がこの順に 1 本ずつくじを引くとする。いま修二がくじを引いて当たりであった。このとき，彰がく

じを引いて当たりである確率を求めなさい。ただし，引いたくじは元に戻さないこととする。」という結果の確率を求める問題では，修二が当たりを引いたという条件付き確率と考えるよりも，修二が当たりを引いた後の，「当たり１本とはずれ2 本の計 3 本」を全事象とする条件なし確率と考えるほうが，条件なし確率しか学習していない学習者にとっては自然だからである。一方，次章で詳しく述べるが，原因の確率を求める問題では，条件なし確率と考えることが自然でないことから，学習者が条件なし確率を適用できないことを認識しやすい。すなわち，条件付き確率の導入場面では，原因の確率を求める教材を用いることで，学習者が条件付き確率の必要性を認識しやすくなる。この点からも，教材の条件 b が必要であるといえる。

以上の条件を満たす教材として，本研究では図５－４を開発した。問①，②ともに Y くんが当たりを引く確率を求める問題であるが，問①は Y くんは自分の引いたくじが，当たりかどうかがわからない状況，問②はそれがわかっている状況となっていて，Y くんにとっては有する情報が異なるが，確率を求めるあなたにとっては，確率を求めるための情報はどちらも同じであるという問題である。すなわち，あなたにとって，得られる情報そのものは異なるが，確率を求めるための情報としては同じである。この問題によって，情報の与えられ方が異なっていたとしても，得られた情報が同じであれば確率も同じになるということを強調することができると考える。以上より，問①，②は，確率は事象についての情報に適用されることを強調した問題であり，教材の条件 a を満たすものである。

また，問①，②ともに，2 番目にくじを引くあなたが当たりであったときに，1 番目にくじを引く Y くんの当たる確率を求める問題である。すなわち，あなたが当たりを引いたという時間的に後の出来事（結果）を条件とし，Y くんが当たりであったという時間的に前の出来事（原因）の確率を求める問題である。これ

は，教材の条件 b を満たすものである。

当たりくじが 2 本，はずれくじが 8 本入った 10 本のくじがある。このくじを，最初に Y くんが 1 本引き，2 番目にあなたが 1 本引くことにする。このとき，2 つのもしも①，②を考える。それぞれについての問いに答え，そのように答えた理由を書きなさい。ただし，引いたくじは戻さないものとする。

問①：もしも，Y くんがくじを引いたにもかかわらず，当たりかどうかを確認せずにこちらの様子を伺っているとしたら･･･この状況で，あなたが当たりを引いたとしたら，Y くんが当たっている可能性は，あなたがくじを引く前より，上がる？ 下がる？ 変わらない？

問②：もしも，Y くんがくじを引いて，当たったかどうかを確認したにもかかわらず，すました顔で当たったかどうか教えてくれなかったとしたら･･･この状況で，あなたが当たりを引いたとしたら，Y くんが当たっている可能性は，あなたがくじを引く前より，上がる？ 下がる？ 変わらない？

図５－４　主観的な確率解釈の導入場面で扱う教材

２．授業開発

学習の原理 α，β（図５－１）より，まずは主観的な確率解釈を学習し，次にそれをモデル化するものとして条件付き確率を学習するという授業展開が想定される。以下ではこの展開に基づいて，授業を開発する。

授業ではまず，生徒に問①，②を解かせる。その際，問①，②は主観的な確率

解釈や条件付き確率の学習前に扱われる教材であるから，生徒は次の２パターンに分かれると想定される，１つは，あなたがくじを引く時点で，Ｙくんは既にくじを引いているから，Ｙくんが当たる確率は「変わらない」と解答するパターンである。もう１つは，すべての場合を数え上げることで，Ｙくんが当たる確率は「下がる」と解答するパターンである。そこで，個人解決が終了した後に周囲との議論の時間を設ける。この周囲との議論で，「変わらない」と答えた生徒が「下がる」と答えた生徒の意見を聞くことで，既有の確率解釈である頻度的な確率解釈が適用できない場面を設定することができる。これは原理αに基づいた学習の支援を目指した活動である。次に，問①と②において「下がる」が正答であると認識できても，既有のモデルである条件なし確率では，それをモデル化して表現することができないことを認識させ，条件付き確率を導入する。これは原理βに基づいた学習の支援を目指した活動である。

生徒に問①，②を解かせた後は，条件付き確率を導入して，問①，②の確率を求める。その際，条件付き確率の公式は難解であることから，多くの先行研究（例えば，Böcherer-Linder and Eichler, 2017; Böcherer-Linder, Eichler, and, Vogel, 2018）で条件付き確率の指導に効果的であることが示されている面積図を利用して，条件付き確率を説明し，問①，②の確率を求める。最後に，確認問題を解かせ，授業の感想を書かせる。

対象となる生徒は，まずは原理αより，頻度的な確率解釈を学習していて，主観的な確率解釈を学習していない生徒である。次に原理βより，条件なし確率を学習していて，条件付き確率を学習していない生徒である。現行カリキュラム（文部科学省，2009）においては，確率は頻度的な確率解釈のみで展開されていることから，数学Ａで条件付き確率を学習する前の生徒が対象の生徒に該当する。

第２節．授業の分析と考察

１．授業の実際

分析対象とする授業は，2018 年 10 月に国立大学附属高校 1 年生 40 名（男子 23 名・女子 17 名）を対象に行われた。本時までに確率の定義，確率の基本法則，独立な試行の確率，反復試行の確率の学習は終了していて，条件付き確率は学習していない。問①，②の題材であるくじ引きについては，中学校 2 年生の確率の授業において，公平であることを確認している。また，ここまでは現行カリキュラム（文部科学省，2008，2009）に基づいて授業が行われているので，生徒の既有の確率解釈は頻度的な確率解釈であると考えられる。授業者は当該クラスの授業を普段から担当している教師であり，授業前に筆者の研究目的を共有している。

最初に，解答用紙を配布し，問①，②を解かせた。問題は教師が 1 問ごとに教室前のテレビに提示し, まずは個人で解答させ, その後周囲で話し合いをさせた。この時，問①，②で登場する「あなた」は解答者自身であることを伝えた。次に，周囲との話し合いの結果で答えが変わるようであれば，別欄で設けた解答欄に修正後の解答を書くよう指示した。また，問②を提示した後に，問①の解答を修正しないようにも指示した。

以下は，問①を個人で解き終わった後の，教師（T）と生徒（Ike，Tsu，Doi）とのやり取りの抜粋である。

T：　Ike くんはどう思いますか？上がる，変わる，下がらない，どう思いますか？

Ike：え，どうなんすかね。ほんと全然わかんないっす。ちょっとみんなの聞い

てからで。

T：　あ，みんなの聞きたい。あ，いいですね。じゃあみんなの聞いてみましょうか？じゃあそしたら，Tsu くんどう思いましたか？

Tsu：下がる。

T：　あ，下がる。Tsu くんは下がるという風に答えてくれました。

Ike：そしたら俺も下がる。

T：　え，なんでなんで？

Ike：えっと，あの元々，$\frac{2}{10}$ じゃないですか。たぶん。Y くんが当たる確率が。でなんか，計算したら，結構下がったんですよ。

T：　計算したら結構下がった。はいはいはい。

Ike：2 つ確率を出して，それを足して，分のこれなんですよ。すごい，下がったんで，下がるんじゃないか。

T：　あーなるほど。下がるんじゃないかという意見がありますけど，みなさんどうでしょうか？はい，えっとじゃあ他にも，もう一人くらい聞いてみてもいいですか？

Ike：先生，Tsu くんの理由も。

T：　え，聞きたい。じゃあ Tsu くんはどう考えましたか？

Tsu：えっと，Y くんがえっと，はずれを引いた方が，その，自分が当たりを引く確率が高いので，自分が当たりを引いたとしたら，Y くんがはずれ…を引いている…ちょっと難しいです。

T：　お，ちょっと難しいです。今のはみなさん，どう考えますか？もう一人くらい聞いてみましょう。これ難しいですよね。えっと，そしたら，もう一人聞いとこうかな。そしたら，Doi さん。Doi さんはどう考えましたか？

Doi：変わらない。

T：　お，変わらない派，なるほどなるほど，なんで変わらない派？

Doi：えっと，私が引いたときに，もう Y くんは引いていて，だから変わらない。

T：　あーなるほど。だってもう手元に掴んでるんだもんね。運命は変えようが，ないかもしれませんね。そうかもしれませんね，そういう考え方もあるかもしれませんね，みなさんはどう思いますか？はい。じゃあ色んな意見が出ましたけれども，えっと今の議論後の意見を踏まえてですね，選択肢を変える場合は変えるで書いてみてください。そして理由も合わせて書いてみてください。

問①についての教師と生徒のやりとりを見ると，まず Ike は「下がる」を選択したが，その理由を説明できなかった。「計算したら…」と発言しているものの，その計算についても上手く説明できなかったことから，授業後に回収したワークシートには残していなかった。次に Tsu も「下がる」を選択したが，その理由を説明できなかった。Tsu のワークシートを見ると，下がるを選択した理由として，Y くんがはずれてあなたが当たる確率よりも，Y くんとあなたのどちらも当たる確率の方が低いからという趣旨の内容が書かれていた。最後に指名された Doi は，時間的に後の出来事は，前の出来事の確率には影響を与えないという理由から，「変わらない」を選択していた。

クラス全体では，まずは個人解決の時間に，18 名が「下がる」を選択し，22 名が「変わらない」を選択した（表５－１）。教師と生徒（Ike，Tsu，Doi）のやりとりの後，再度教師は再度周囲との議論の時間を設定し，必要があれば周囲との話し合い後の解答欄の加筆・修正をするよう促した。結果的に，2 名の生徒が「変

表５－１　問①の解答類型と人数

問	解答類型	個人による解答（人）	周囲との話合い後の解答（人）	正答
①	上がる	0	0	
	下がる	18	21	◎
	変わらない	22	19	

わらない」から「下がる」へと変更しただけで，回収した解答用紙に記載されたYam の「下がるのもあると思ったけど，なぜなのか理由がピンときそうでこなかったから変わらない」というコメントにあるように，どちらの立場の生徒も，自分とは異なる立場の生徒を説得することができなかった。

問①の解答の加筆・修正の時間を少し設けた後，問②を提示し，まずは個人で解かせた。以下は，問②を個人で解き終わった後の，教師と生徒（Kod と Yok）とのやり取りである。

T：　はい，じゃあみなさん，理由書けましたか？じゃあこの問題もちょっと何人か理由聞いてみましょうか。Kod くん。Kod くんこれどう思いましたか？

Kod：下がる。

T：　あ，下がる。と思う。はいはいはい，何で下がると思いましたか？

Kod：えっと，私が当たった時，えっと，Y くんが…ちょっと無理です。

T：　あ，ちょっと無理です。まぁでもとりあえず下がると。なかなか説明するの難しいかもしれないですね。えっとじゃあもう一人くらい聞いてときま

しょうか，次は，Yok くん。

Yok : 変わらない。さっきの問題と同じで，先にもう引いているから変わらないにしたんで，変わらない。

T : なるほど。先にもう引いちゃっているから，結果は変わらないだろうと。なるほど，そういう考え方もあるかもしれませんね。はい，じゃあみなさん，今の話を踏まえて，1 分ほどでですね。最後の議論後の理由を書いてもらえますか？おねがいします。

問②についての教師と生徒のやりとりを見ると，まず Kod は「下がる」を選択したが，その理由を上手く説明することができず，「ちょっと無理です」と説明を中断してしまった。次に指名された Yok は，問①での Doi と同じ，時間的に後の出来事は，前の出来事の確率には影響を与えないという理由から，「変わらない」を選択した。クラス全体では，まずは個人解決の時間に，19 名が「下がる」と解答し，21 名が「変わらない」と解答した（表５－２）。2 人の意見が出た後，教師は再度周囲との議論の時間を設定し，必要があれば周囲との話し合い後の解答欄の加筆・修正をするよう促した。しかし，解答を変えた生徒はいなかった。

表５－２　問②の解答類型と人数

問	解答類型	個人による解答（人）	周囲との話合い後の解答（人）	正答
②	上がる	0	0	
	下がる	19	19	◎
	変わらない	21	21	

問①，②の解答が終わり，解答用紙を回収した後，教師は教室全体で意見がまとまらなかったことに言及しながら，それを説明するモデルとして条件付き確率を導入した。まずは，問題文を面積図を用いて整理し（図５－５），Y くんが当たる確率と，あなたが当たる確率を求めた。その後，条件付き確率を定義し（図５－６），問①，②の答えを求めた。以下は，その時の教師の発言である。

T：いやー，これ結構難しかったですよね。今，考えてもらったことをですね，数 A ではこれから確率として整理していこうと思います。これから，事象 A を Y くんが当たるという事象，事象 B をあなたが当たるという事象という風に捉えていこうと思います。まずは，Y くんが当たる確率を考えることにしましょう。えーと，10 マス×9 マスの格子状の表が乗っていると思いますね。Y くんが当たる確率っていうのは，10 本中 2 本あたりを引いてくればいいわけですから，こんな風に分けてみましょうかね。こんな風に割合としては分けることができるかなと思います。$\frac{1}{5}$，$\frac{4}{5}$ ってことですね。はい。で，それからですね，あなたが当たる確率，これをまた分けていきましょう。あなたが当たる事象 B っていうのはですね，Y くんが当たっている場合は，当たりの本数が減っているはずですから，9 通りのうちの 1 通りしかありませんね。だから，ここですね，1 マス分こんな風に書けるかなと思いますね。で，残り $\bar{A}$ の中にもあなたが当たるという事象っていうのがあるはずですね，$\bar{A}$ の中では 2 通り，当たりが 2 本残ってますから，9 本中当たり 2 本分の割合でとれるかなということで，こんな風に B をとれるかなと思いますね。逆に言えば残った部分ですね，これが全部 $\bar{B}$ になるということですね。こんな風に考えてみましょう。えーと，ここ 10×9

の 90 マス全部で用意しましたが，当たりくじとはずれくじの本数を考えると，えーっと，起こり得るすべての事象は，10×9 で 90 通りですね，場合の数の考え方で，90 通り考えることができるかと思います。90 通りのうちの，こんだけ分があなたが当たる確率で，こんだけ分があなたが当たらない確率だということがわかります。で，マス目の数を数えてもらったらわかるかなと思いますが，えー，B の場合っていうのは，ここに 2 マスと，ここに 18 マス，それから，$\bar{B}$ の方っていうのは，A の中にある $\bar{B}$ っていうのが，16 と，56，16 と 56 で 72。こんな感じですか？で，18 と 72 で分けれてるっていうことは，B が起こる確率っていうのが，$P(B)$ と書くと，全部で 90 通りあるうちの 18 通りですから，ちょうど $\frac{1}{5}$ ってことですね。当然ですけど $P(A)$ は $\frac{1}{5}$ だったわけですから，同じっていうことがこれで確認できますかね。

じゃあ，このことを踏まえて，ちょっと考え方を整理していきましょう。じゃあ何で，スライドの途中で出てきた問題がややこしかったのか，ということですね。それは，条件付き確率という考え方を知ると，解消できるかなと思います。はい，全事象 U の中に 2 つの事象 A，B について，A が起こったことがわかったとして，この時 B が起こる確率を，A が起こったときの B の条件付き確率といいます。この条件付き確率を，こんな風に表します。A が起こった時の B の起こる確率で，ここに小さく A を書きます。これが条件付き確率の記号です。で，条件付き確率の意味をもうちょっと整理してみると，A に属する根元事象だけを考えた時，その中で B の起こる確率になります。さっき書いた図で言うと，A が起こるっていうのは，ここの 18 マス分だけでしたね。18 マス分の，ここ 2 マス分が，A が起こ

った状態でなおかつ B が起こる。A が起こった場合を考えたときだけの，B が起こる確率ですね。こんな風に考えることができますね。計算して求めようと思えば，18 個中 2 個ということなので，一般的には，ですね。こんな風に書くことができます。A と B が両方同時に起こる確率と，A が起こった前提で B が起こる確率は, 意味が違うことに注意してください。で，まあ一応，分母に $n(A)$ をつける関係上，$n(A)$ が 0 と等しい時は，条件付き確率は考えないことにします。で，あと，もう一つですね，個数分の個数で計算ができるんだったら，$P_A(B)$ は割合分の割合で考えることもできますよ，ということで，こんな感じですね。$P(A)$ 分の $P(A \cap B)$ ということで，A が起こる確率分の，A と B が同時に起こる確率。これでも求めることができます。では問①，②について考えていきましょう。まず問①を考えてみましょう。可能性という言葉を確率と読み替えるならば，考えないといけないことは，B が起こったという状況下で，A が起こる確率。これを考えないといけません。B が起こったという状況は，18 マス，全部であったかなと思いますね，18 マス中の 2 マス分，これが B と A が両方起こる確率です。条件付き確率の定義に従うと，18 個中の 2 個で，$\frac{1}{9}$ ですね。上がるか下がるかで言えば，下がる。でしょうか。もともと Y くんが当たる確率は，$\frac{2}{10}$，つまり $\frac{1}{5}$ だったわけですが，あなたが当たりを引いてしまったことによって，$\frac{1}{9}$ に確率が下がっているということですね。気をつけないといけないのは，上がるとか下がるとか言ってますが，$P(A)$ 自体はずっと $\frac{1}{5}$ ですよ。これは気を付けてください。だけど，B が起こったというのがわかった $P_B(A)$ については $\frac{1}{9}$ ということで，$P(A)$ よりも

小さくなった。まぁこんな風に考えることができます。Y くんの当たる確率が，もうくじを掴んじゃってるのに変動するっていうのは不思議な感じがするかもしれませんね。

問①の解説を終え，問②の解説に入る前に，教師が問①と②の違いについて生徒（Nit）を指名して聞いた。教師がこの質問をした理由は，周囲との話し合いの際に「誰の目線から確率を考えているのか？」という議論をしていたグループ[5－2)]がいたからである。以下は，教師と生徒 Nit とのやりとりの抜粋である。

T：　問②では，見たけど教えてくれなかった場合を考えましたね。この場合，問①の場合と比べてどうなるか，ちょっと聞いてみましょうかね。問①の場合と，問②の場合とくらべて，どんな感じになりますか？じゃあ，聞いてみましょう。Nit さん。

Nit：変わらない。

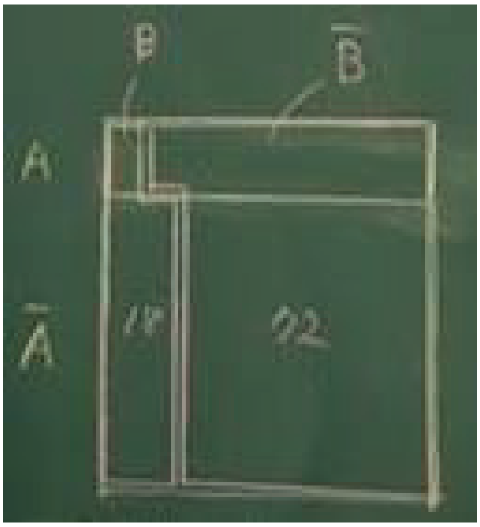

図５－５　問①，②を表す面積図

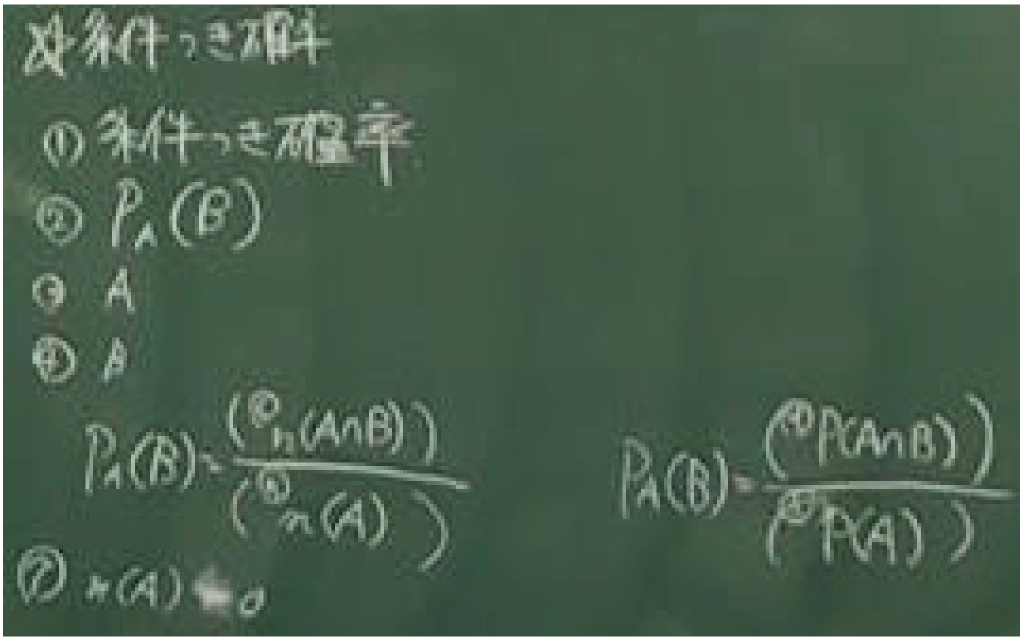

図５－６　条件付き確率[5－1)]

T：　そうですね。問①と問②は，結論が同じになるはずです。これ，先ほど議論しているときに，誰から見た確率なのかということを言っていてくれてた人がいたかと思いますね，そうなんですよ。誰から見ての確率なのか，これが意外と大事なんですよね。Y くんが引いたくじを，Y くんが見ようと見まいと，見た結果があなたに伝わらないんだったら，あなたから見て，Y くんの当たる確率は，変動しません。ね，Y くんにとっては，見て当たってたらそりゃ 100%当たってたってことになるかもしれませんが，えー，情報を伝えるか伝えないかが，あなたから見ての確率に影響が出ると，まぁそんな風に考えることができるかなと思います。ちょっと不思議なことがあったかもしれませんね。既に掴んでいるのに，後から確率が変化するっていうことで，時間を遡って過去に既に決まっているかもしれないこと確率が変化したりすると，そんなことが起こります。自分にとって情報が

無いんだったら，運命は決まっていたとしても確率で表現できる，まぁそんな風な話になります。

以上のように教師は授業をまとめ，確認問題を解かせた。確認問題は，時間軸の問題（図５－３）とした。条件付き確率を利用して正しく答えを求めることができた生徒は，40 名中 37 名であった（92.5%）。

２．分析と考察

本節では，開発した教材と授業が学習の原理 α，β に基づいた学習を支援することができたかについて検証する。対象として，問①と②で「変わらない」と答えた生徒と，「下がる」と答えた生徒を一名ずつ選び（Yam と Tsu），彼らの発言やワークシートの記述に基づいて分析と考察を行う。

まず，学習の原理 α についてである。問①で，まずは個人解決で半数の生徒が「変わらない」と答え，もう半数が「下がる」と答えた。この点は，授業計画段階での予想通りであった。しかし，Yam のコメントからわかるように，「変わらない」と答えた生徒は，自分とは異なる考えをする他者の存在を認識しているものの，それに納得することはできなかった。この要因としては，「下がる」と答えた生徒の理由が，「どちらも当たる可能性は低いから，あなたが当たれば Y くんが当たる可能性は下がる」というものであったことが挙げられる。この理由は，条件なし確率を利用して $P(A \cap B) < P(\bar{A} \cap B)$ であることを根拠としているのであって，それでは時間的に前の出来事が後の出来事の確率に影響を与えることが説明できていない。「下がる」と答えた Tsu が授業の感想として，「条件付き確率を用いれば説明ができた」と書いているように，「下がる」と答えた生

徒は，自身の考えを表現するモデルを有していなかったことから，適切に説明することができなかったのである。

以上より，「変わらない」を選択した生徒は，「下がる」と答えた生徒の理由に納得できなかったことから，生徒同士の対話だけでは頻度的な確率解釈が適用できないことを認識することは十分にできなかった。一方で，Yam の「下がるのもあると思った」というコメントからわかるように，主観的な確率解釈を認識することはできていた。すなわち，「下がる」と「変わらない」で意見が分かれる教材の問題設定と，生徒同士の対話によって，学習の原理 α に基づいた学習を一定程度支援することができたといえよう。

次に，学習の原理 β についてである。上述の Tsu ように，問①と②で「下がる」と答えた生徒は，確率は事象に対して適用されない場合もあることを認識しているが，それを説明するモデルを有していなかった。このことから，条件なし確率では自身の考えを適切に表現できなかったことで，主観的な確率解釈をモデル化する新たなモデルを必要とする場面を設定できたと考えられる。さらに Tsu が「条件付き確率を用いれば説明ができた」とコメントしていることから，主観的な確率解釈をモデル化するものとして，条件付き確率を学習していることがわかる。

また，Yam のように「変わらない」と答えた生徒も，上述のように「下がる」という解答の理由として条件なし確率を用いた理由には納得していないことから，「下がる」という解答に対しては，既有のモデルである条件なし確率が適用できないことを認識している。ゆえに，条件なし確率では，主観的な確率解釈をモデル化することができないことを認識させる場面を設定できたことがわかる。さらに Yam は，授業の感想で「同じくじでも後に引いた人の結果を知っているか，知らないかだけで先に当たりを引ける確率が変わるのが驚きだった」と

書いていて，確認問題は条件付き確率を利用して正答している。このことから，「変わらない」と解答した生徒も，条件付き確率を根拠とすることで「下がる」という主観的な確率解釈に基づく解答に納得し，それと同時に，頻度的な確率解釈が適用できない場合もあることを認識している。以上より，「下がる」と「変わらない」のどちらを答えた生徒に対しても，まずは主観的な確率解釈を認識させ，その後に条件付き確率を導入することによって，学習の原理 β に基づいた学習を支援することができたといえよう。

さらに，確認問題の正答率は 92.5%であった。勿論，条件付き確率を習った直後であることが正答率を高めた要因の一つであるとは考えられる。しかし，松浦（2006）が図５－３と同型の問題で実施した調査では，問題が「最初の玉が白玉である確率は，黒玉である確率と比べて大きいか，同じか，小さいか」という，解答の理由を問わない選択式の形式で提示されたにもかかわらず，高校１年生の正答率は 36%であった。松浦（2006）の調査では解答の理由は問われなかったことから，正解者のうち条件付き確率を利用して確率を求めることができた生徒はさらに少ないだろう。ゆえに正答率 92.5%という結果から，開発した教材と授業が，学習の原理 α，β に基づく学習を支援する教材と授業として一定程度有効であったことが確認された。

第３節　教材と授業の再開発

第１節で開発した，学習の原理 α，β に基づいた教材と授業は，学習の原理 α，β に基づく学習を支援する教材と授業として一定程度有効であったものの，頻度的な確率解釈を適用できないことと, 主観的な確率解釈を認識させる状況設定が, 十分ではなかった。そこで本節では，学習者が頻度的な確率解釈が適用でないと

認識しやすい教材と授業の開発を行うことを目的とする。

学習者に頻度的な確率解釈が適用できないことと，主観的な確率解釈を認識させるためには，主観的な確率解釈がより認識されやすい状況を学習者に提示する必要がある。そこで本研究では，主観的な確率解釈の認識の段階を，「条件付き確率の認識の発達段階」（Tarr and Jones, 1997）を用いて捉えることとする。Tarr and Jones (1997) の枠組みを用いた理由は２つある。第１に，この枠組みは，反復しない状況（Without replacement situations）における条件付き確率の認識を，小中学生の実態調査に基づいて４つの段階で記述したものである。ここで，反復しない状況とは，多数回の試行を前提としない状況であり，本研究においては主観的な確率解釈を適用する状況といえるからである。第２に，４つの段階は，条件付き確率を数学モデルを用いずに非形式に認識する段階から，数学モデルを用いて形式的に認識する段階として表されている。これが，本研究においては，学習者がまずは頻度的な確率解釈ではないものとして主観的な確率解釈を学習する段階から，主観的な確率解釈をモデル化するものとして条件付き確率を学習するまでの段階と捉えることができるからである。以上より Tarr and Jones (1997) の枠組みは，第１節で開発した教材よりも低次の認識の段階で，学習者に主観的な確率解釈を学習させる教材を開発するための視点となり得ると考えた。

１．Tarr and Jones (1997) の「条件付き確率の認識の発達段階」

Tarr and Jones (1997) はアメリカ合衆国の４年生から８年生の生徒 15 名を対象に，質問紙調査とインタビュー調査を実施し，条件付き確率の認識の発達段階を明らかにしている（表５－３）。また，Tarr and Lannin (2005) は飴の問題（図５－７）を題材とし，表５－３の各段階に説明を与えている。そこで以下では

表５－３　条件付き確率の認識の発達段階

(Tarr and Jones, 1997)

第１段階 （主観的）	第２段階 （過渡的）	第３段階 （非形式な量的）	第４段階 （数的）
・反復する状況と反復しない状況のどちらにおいても，「確実」および「不可能」な事象が起こるときを認識する。 ・一般に，反復する状況と反復しない状況のどちらにおいても，事象の条件付き確率を考える際に主観的推論を使用する。 ・予測を立てる際に，与えられた数的情報を無視する。	・反復しない状況において<u>いくつかの</u>事象の確率が変わることを認識するが，その認識は不完全であり，いつも直前に起こった事象に制限される。 ・条件付き確率を決定する際に，数量を不適切に使用する。例えば，標本空間に 2 つの結果が含まれていれば，いつも 2 つの結果は同様に確からしいと仮定する。 ・条件付き確率についての意思決定をする際に，代表性が困難性の要因として働く。 ・主観的な判断に戻ってしまうかもしれない。	・反復しない状況において<u>全ての</u>事象の確率が変わることを認識する。 ・反復する状況と反復しない状況のどちらにおいても，2 つの事象の関連性を判断する際に，標本空間を正しく構成し続けることができる。 ・不正確ではあるが，反復しない状況での確率の変更を定量化できる。	・反復する状況と反復しない状況のどちらにおいても，確率値を割り当てる。 ・反復する状況と反復しない状況のどちらにおいても，試行の前後の事象の確率を比較するために数的推論を使用する。 ・2 つの事象が関連しているために必要な条件を述べる。

Tarr and Lannin (2005) に基づいて各段階の様相を説明する。

第１段階の学習者は，主観的な判断に頼ってしまう。そのため，事象の結果は自ら制御できると信じており，与えられた情報は無視してしまう。例えば図５－７において，別のぶどう味の飴を取り出す可能性は変わりましたか？と尋ねられたら，「いいえ。私はぶどう味の飴が好きだから，ぶどう味だけが欲しい」と答えるという具合である。その一方で，確実に起こる事象や，不可能な事象については認識することができる。

第２段階の学習者は，条件付き確率を考える際に，定量的な情報を扱うことができるが，直前の結果にあまりにも多くの信頼を置いてしまう傾向がある。これは，代表性ヒューリスティックの影響であると考えられている。代表性ヒューリスティックとは，事例の典型例や代表例が，基底事例として選択されやすいというものである（松浦，2006)。この段階の学習者は，図５－７において，ぶどう味の飴が取り出されたことにより，瓶の中のぶどう味の飴の数が減ったため，ぶどう味の飴を取り出す可能性は下がったと主張することはできる。しかし，他の味

飴の入れ物（瓶）には，ぶどう味４つ，さくらんぼ味３つ，りんご味２つ，レモン味１つの飴が入っています。今，ぶどう味の飴を１つ取り出して食べました。このとき，この瓶から別のぶどう味の飴を取り出す可能性は変わりますか？あるいは，ぶどう味の飴を取り出す前と同じですか？さくらんぼ味の飴を取り出す可能性はどうですか？…りんご味の飴についてはどうですか？…レモン味の飴についてはどうですか？説明してください。

図５－７　飴の問題

（Tarr and Lannin, 2005, p.223）

の飴については，瓶の中の数が変わっていないので，取り出す可能性は変わっていないと主張する。

第 3 段階の学習者は，条件付き確率を考える上で，情報が果たす役割について適切に認識することができる。この段階の学習者は，正確な確率値を割り当てることはできないが，標本空間を正しく構成し，条件が加わればそれを適切に更新することができ，全ての事象の条件付き確率が反復しない状況において変化することを認識している。したがって図５－７においては,「レモン味の飴はぶどう味の飴との個数の差が 3 つあったが，ぶどう味の飴が 1 つ取り出されたことによりその差が 2 つになったので，レモン味の飴を取り出す可能性が高まった。」という具合に説明することができる。

第 4 段階の学習者は，問題状況を解釈する時に，確率値を割り当てることができる。また彼らは，2 つの事象が独立であるか従属であるかが重要であることも認識している。図５－７においては,「ぶどう味の飴を取り出す前は $\frac{4}{10}$ だったが，1 つ取り出された今は，ぶどう味の飴を瓶に戻さない限り，$\frac{3}{9}$ である。」という具合である。このように，2 つの事象が独立しているか否かという条件を学習者が提示することができる点で，確率的推論における洗練さが表れている。

２．教材開発

Tarr and Jones (1997) によると，第 1 段階の学習者は，事象の確率が変わることを認識できないが，確実または不可能な状況は認識できる。ゆえに原因が確定している状況であれば, 学習者は主観的な確率解釈を認識できると想定される。すなわち，教材の条件 b について，主観的な確率解釈や，主観的な確率解釈と条

問 B：当たりくじが１本，はずれくじが２本入った３本のくじがあります。Y くんとあなたは，この順でくじを引きます。Y くんは，後から引きたかったので，一旦くじを引きましたが，何を引いたかは見ないで，そのまま持っておきました。次に，あなたがくじを引くと，それは当たりでした。このとき，Y くんが引いたくじが当たりである確率は，Y くんとあなたがくじを引く前と比べて，上がりましたか？下がりましたか？変わりませんか？

図５－８　原因が確定する状況の問題

件付き確率の関連づけの導入場面であれば，その原因は確定する状況であるべきという内容が付加されることになる。この仮説に基づいて開発した教材が，問 B（図５－８）である。

問 B は，最初に引いた Y くんのくじが当たりであるという事象が，次に引いたあなたのくじがあたりであるという情報によって確定するという問題である。時間的に前の出来事である Y くんのくじについての確率を考えているので，教材の条件 b は満たしている。また，その確率が，あなたのくじが当たりであったことから変動するため，教材の条件 a も満たしている。さらに，Y くんのくじが，はずれであると確定することから，原因が確定する状況を設定することができている問題である。

３．授業開発

授業ではまず，くじ引きは引く順番に依らず公平であることを確認した後，問 A（図５－９）を提示して生徒に考えさせる。ここで，問 B ではなく問 A を提示

問Ａ：当たりくじが３本，はずれくじが２本入った５本のくじがあります。Ｙくんとあなたは，この順でくじを引きます。Ｙくんは，後から引きたかったので，一旦くじを引きましたが，何を引いたかは見ないで，そのまま持っておきました。次に，あなたがくじを引くと，それは当たりでした。このとき，Ｙくんが引いたくじが当たりである確率は，Ｙくんとあなたがくじを引く前と比べて，上がりましたか？下がりましたか？変わりませんか？

図５－９　問Ａ

する理由としては，最初から問Ｂを提示してしまうと，生徒は既有の頻度的な確率解釈が適用できないことと，主観的な確率解釈を認識しづらいと考えるからである。学習の原理αに基づくと，まずは頻度的な確率解釈が適用できないことを認識しなければならない。しかし問Ｂは表５－３の第１段階であるため，生徒によっては頻度的な確率解釈が適用できないことを認識できないままに，問Ｂに正答してしまう可能性が考えられる。そこでまずは問Ａで頻度的な確率解釈に基づいた解答を促し，その後問Ｂを提示し考えさせることで，問Ａでの自身のパフォーマンスと，問Ｂでのそれの違いを認識させることができ，結果として頻度的な確率解釈が適用できず，主観的な確率解釈の存在にも気づかせることができると考えた。

問Ａについて生徒に考えさせた後は，生徒を複数人指名して自身の考えを発表させる。ここでは「下がる」を選択する生徒と「変わらない」を選択する生徒がいると考えられる。「下がる」を選択する生徒は，全ての場合を数え上げたり，前節の高校１年生のように，１人だけ当たる確率よりも，２人とも当たる確率の方

が小さいからという理由で，「下がる」を選択すると考えられる。「変わらない」を選択する生徒は，既にＹくんはくじを引いているから，たとえそれを見なかったとしても確率は変わらないという理由で，「下がる」を選択すると考えられる。「下がる」と「変わらない」それぞれの生徒に発表させた後，再度生徒同士の話し合いの時間を設定する。その後，生徒の様子を見て，問Ｂを提示し，それについて考えさせ，問Ａについての自身の思考を反省させる。

最後に，確率が変動するという事実から，生徒によってはくじ引きが公平でないと誤って考えてしまう生徒がいることが想定されるため，再度くじ引きは公平かどうかを問い，くじ引きはそれを始める段階では引く順番に依らず公平であって，情報が加われば当たる確率が変わるということを整理して理解させる。

第４節．授業の分析と考察

１．授業の実際

分析対象とする授業は，2019 年 2 月に国立大学附属中学校 2 年生 41 名（男子 20 名・女子 21 名）を対象に行われた。本時までに確率の意味，確率の求め方，いろいろな確率の学習は終了している。前時では，くじ引きが引く順番に依らず公平であることを確認している。また，ここまでは現行カリキュラム（文部科学省，2008）に基づいて授業が行われているので，生徒の既有の確率解釈は頻度的な確率解釈であると考えられる。授業者は当該クラスの授業を普段から担当している教師であり，授業前に筆者の研究目的を共有している。

最初に，前時の確認として，図５－１０を解かせ，樹形図を用いて全て数え上げることにより，くじ引きは公平であることを教室全体で確認した（図５－１１）。その後，教師は図５－１０と同じ状況下で，「Ｙくんはくじを後から引いたことに

当たりくじが 3 本，はずれくじが 2 本入った 5 本のくじがあります。Y くんとあなたは，この順でくじを引きます。Y くんとあなたの当たりやすさに違いはありますか？

図５－１０　前時の確認問題

したい」ということを実際にくじを用いながら生徒に伝え，問 A を提示した。その際，まずは個人で解答させ，その後周囲で話し合いをするよう指示した。また，周囲との話し合いの結果で答えが変わるようであれば，別欄で設けた解答欄に修正後の解答を書くようにも指示した。

以下は，問 A を個人で解き終わり，周囲で話し合いをしている生徒 4 人（Kom，Sak，Hir，Oka）のやり取りの抜粋である。彼らは Oka を Y くん，Hir をあなたと見立てて，ボールペンを用いて実際にくじ引きをやりながら確認をしていた。

Kom：もし，Oka がこれ（当たり）を引いとったら，$\frac{2}{4}$，$\frac{1}{2}$ じゃん？それで，Oka がはずれを引いとったら，$\frac{3}{4}$ じゃん？

Sak：見るタイミングが違うだけじゃろ？

Kom：そうそうそう。だから Oka が引いとって，で，Hir が引いたのに，変わるわけないじゃん。

Kom：Hir が取っとるのに，当たりがあっても，当たりがあっても変わらんじゃん，わかる意味？

このグループの生徒は，全員「変わらない」と解答していた。クラス全体では，「変わらない」を選択した生徒は 30 名で，「下がる」を選択した生徒は 8 名，「変

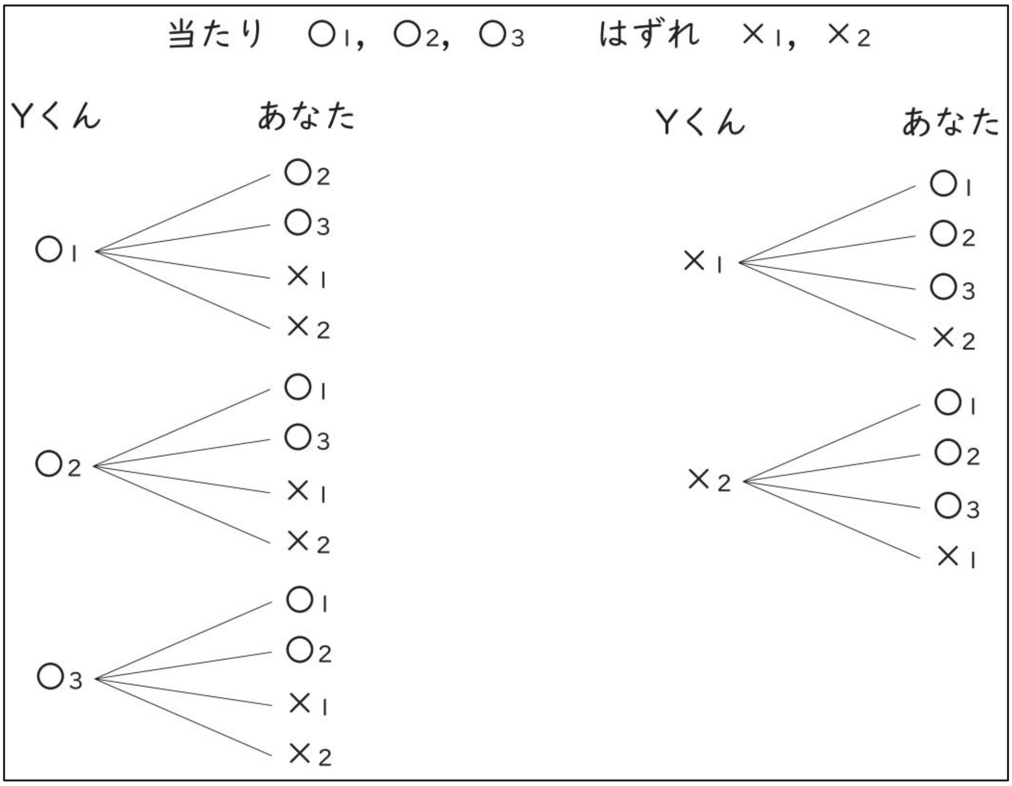

図５－１１　確認問題（図５－１０）の樹形図

わらない」と「下がる」の両方を選択した生徒は３名であった。「上がる」を選択した生徒はいなかった。

周囲との話し合いの後，教師は生徒を複数人指名し，選択した解答とその理由を説明させた。以下はその際の，教師（T）と生徒（Iwa, Hir, Yon, Sug）とのやり取りの抜粋である。

T：　じゃあえっと，一旦手を止めて前を向いてください。皆さんどうでしょうか？えっと，Iwa くん。Iwa くんは今どっち派ですか？

Iwa：変わらない。

T：　あ，変わらない派。なぜですか？

Iwa：どっちが先に見ても，引いた順番は同じなので，引いてる時点で，当たり

かはずれかは確定しているんで，先に見たからとか，そういうのは関係ない。

T：　あーなるほどね，関係ないんじゃないか。そうですね。だってもうがっちり掴んでますもんね，そうですね。そうかもしれませんね。はい，他の人聞いてみましょう。Hir くん。

Hir：変わらないです。

T：　お，変わらない派。理由は？

Hir：どっちみち，引いた時点で決まっているから。

T：　お，引いた時点で当たってるかはずれてるか決まってるもんね，なるほど。だから確率は変わりません。そういう考え方もあるかもしれませんね。はい，他にも聞いてみましょう。えっとじゃあ，Yon さん。Yon さんはどれ派？

Yon：迷ってる。

T：　どれとどれで迷ってる？

Yon：下がると，変わらないで迷ってる，

T：　お，下がると変わらないで迷ってる。おーなるほどなるほど，じゃあ，変わらないと思っている気持ちを教えて。

Yon：なんか，さっき二人が言ってたように，引いた時点で決まっているので，変わらない気もするんですけど，でもなんか，あなたが当たりを引いたってわかったときに，残りの本数が 2 本で，はずれの本数も 2 本って確定するから，下がる気もします。

T：　あ，当たりの本数が減ったから下がる気もする。どうですか，皆さん。変わらない派の人たちもどうですか？当たりの本数は減っちゃいましたね，どうですか？もう一人くらい聞いてみようかな，はい，じゃあそしたら

Sug くん。Sug くんはどっち派？

Sug：下がる派です。

T： あ，はっきりと下がる派。ほぉ，なぜですか？

Sug：人間は引いただけじゃ当たりかわからないから，見ないといけないから。

T： ほう，人間は見ないといけないから。

Sug：だから，相手が当たりを引いたとわかった時に，当たりくじが 2 本とはずれくじが 2 本のくじになり下がる。

T： なり下がる。ほう，ゲームの設定自体がそこで変わっちゃうっていうわけね。相手が当たりを引いた瞬間に，今までやってたゲームが変わっちゃう。ほう，なるほど，それは斬新な考え方ですね。それはあるかもしれませんね。じゃあもう一度，議論に戻ってもらいましょうか？今の意見を聞いて，考えが変わる人は，右側のページに考えを書いて下さい。

問 A についてのやり取りを見ると，Iwa と Hir は，Y くんは既にくじを引いているからという理由で「変わらない」を選択した。次に指名された Yon は，「変わらない」と「下がる」のどちらも選択した。「…変わらない気もするんですけど，…下がる気もします。」という発言からもわかるように，「変わらない」と「下がる」のどちらも答えであると判断しているのではなく，どちらか一方のみが答えであるとは理解しているものの，決め切れていなかった。最後に指名された Sug は，くじは見ないとわからないという理由から，「下がる」を選択した。

再度周囲との話合いの時間になると，Kom，Sak，Hir，Oka の 4 人は次のようなやり取りをした。

Sak : 引いた時点で，残りは 4 本になるから，くじ自体が変わってると考える。

Hir : 下がる気がしてきた。え，何これ。例えば，俺がはずれを引いたとするじゃん。そしたら，確率は上がる。そしたら，当たり引いたら確率下がるじゃん。で，それで釣りあっとるから，それでもういけるんかな。

Kom, Sak, Oka：あー。

Sak：そういう可能性があるか。

Oka：だから結局かけ算したら変わんない，みたいな。分数があるとかけたくなるみたいな。

Hir：そんな気がする。

Oka：それな。

Kom：いいんじゃね？それで。

Hir：それって変わるわけはないじゃん。

Sak：だって引いたときのくじの形はそのままじゃん。当たりって聞いてから引くんだったら変わると思うけど。

Hir は，「下がる」という Yon や Sug の発言から，他の確率解釈の存在を認識し，「下がる気がしてきた。え，何これ。」と頻度的な確率解釈が適用できないことを認識し始めていた。しかし自身の考えを整理し直すと，「釣りあっとる」という発言にあるように，結局は「変わらない」という選択が正しいと判断することとなった。他の 3 人（Kom, Sak, Oka）は Yon や Sug の発言を聞いても依然として「変わらない」と考えていた。

その後，授業計画では問 B（図５－８）を提示する予定であったが，教師がある生徒（Mit）の発言を取り上げた。

T：　今の段階で，変わらない派の人（16名の生徒が挙手)。今の段階で，下がる派の人（25名の生徒が挙手)。あーということは，変わらない派の人が多い感じ？上がる派の人は，おらんか。じゃあちょっとですね。これなかなか面白いなぁと思ったんで聞いてもらっていいですか？Mit くん，今さっき説明してたの言ってあげてもらっていい？

Mit：えっと，もしあなたが3人いるとして，もしそのあなたが全員当たりだったら，Y くんが当たる確率は0になるから，下がると思います。

T：　わかった？わかった？

何人かの生徒：あーそういうことか。

T：　じゃあ，あなた3人指名してみましょう。

（生徒3人を「あなた」として指名し，実際にやってみる）

T：　どうですか？どうですか？あなたが 3 人いれば，確率はどうなりますかね？でも実際この問題は，あなたは 1 人でしたね。あなたが 1 人だった場合，どうなるでしょうか？はい。もう一回考えてみてください，どうぞ。

Iwa，Hir，Yon，Sug が考えを発表した後に周囲で話し合った結果，「下がる」を選択した生徒は8名から16名に増えた。増えた7名の内訳は，最初に「変わらない」と「下がる」の両方を選択していた3名と，Sug と Mit の周囲にいた生徒5名である。その後，Mit は，自分の「下がる」という選択を周囲に説明するために，Y くんの後にくじを引くあなたを当たりの本数分（3本なので3人）増やし，そのあなたが全員当たりであるという状況を設定した。このような設定にすることで，Y くんのくじは確実に外れることになる。事前に用意していた問 B とは異なる状況ではあるものの，Mit が設定した状況は，原因が確定する状況である。以下は，Mit の例を聞き，教師と生徒でそれを実際にやってみた後の，Kom， Sak，Hir，Oka の 4 人のやり取りである。

Kom：そんな気もしてきた。

Sak：なんこれー。下がる説あるなー。

Kom：あるある。

（Hir と Oka は頷く）

Mit の発言を聞くまでは，「変わらない」を選択していた 4 人であったが，Mit が，原因が確定する状況を提示した後は「下がる」という選択の方が適切であると考えるようになった。その他の「変わらない」を選択していた生徒も，多くが「下がる」という選択に納得し始めていた。しかし，その理由を原因が確定しない問 A の状況下では適切に説明できていなかったことから，教師は次のように発問し，前時の確認問題（図５－１０）の解説で用いた樹形図（図５－１１）を用いながら，全体で問 A についても「下がる」が正しいことを確認した。以下は，教師と生徒（Sak，Kom，Nak，Sai，Kus）とのやり取りの抜粋である。

T：　じゃあ，周りと議論している人いると思いますが，一旦手とめて前向いてください。はい。えっと，いま解いてもらっている Y くんが当たる確率を解く前に，これをちょっと考えてもらいましょうかね。Y くんが先に引きます。Y くんが当たりを引きました。としましょう。見てね。うん。その時に，あなたが次に当たる確率は，何分の何ですか？うん。これちょっと聞いてみましょう。はい。Y くんはもう既に当たりを引いたということをわかっています。はい，じゃあ Sat さん。Y くんが当たりを引いちゃったので，くじの中は当たり 2 本はずれ 2 本になります。あなたがこれから引

くときに当たる確率は？

Sak： $\frac{1}{2}$

T： おー，$\frac{1}{2}$ 。そうですよね。4 本中２本が当たりなので，Y くんが当たりを引いたってわかったら，あなたが当たりを引く確率は変わるんですよね。さっき， $\frac{3}{5}$ とかって言ってたけど。はい，じゃあ，反対向きを考えてみましょう。Y くんは引いたけど隠したままです。えー，あなたが当たりを引いたとわかりました。Y くんが当たる確率はどうなりますか？ですね。はい。これ樹形図見ながら考えると，わかりやすいんじゃないかなと思います。あなたが当たったってときを考えろって言われてるんだから，考えればいいのは，ここかな？これを考えればいいよね。うん。あなたが当たったのは，この 12 パターンだけでしたね。

Kom：あ，そうか。

T： で，あなたが分かっているときに，Y くんが実際に握っているやつが，まぁ，決まってるかもしれんよ。決まってるかもしれんけど，当たっている確率は？って話になると，さっきの話と逆で，えーっと同じように考えることができますね。この 12 通りって，それぞれ全部同様に確からしいですかね。ちょっと聞いてみましょう。Nak くん。この 12 通りって同様に確からしいですか？同じくらい起こりやすいといえる？20 個だったときは，起こりやすさ全部同じくらいだったんですよね？12 個になったら起こりやすさ変わるかな？

Nak：変わらない。

T： そうですね。樹形図の一個一個の場合は全部同様に確からしかったわけですから，えー，12 通りに減ったとしても，同様に確からしいですね。う

ん。で，このうち，ですね。Y くんが当たっているのは，何通りありますか？ということですね。数えてみましょう。数えたらなんぼになりますか？Sai くん。Y くんが当たっているのは何通りありますか？

Sai：えーと，6 通り。

T： そうですね。Y くんが当たるのは，6 通りですね。何分の何で計算したら良いでしょうか？そしたらですね，次の人は，Kus さん。同様に確からしい 12 通りのうち，6 通りっていうのは確率何分の何ですか？

Kus：$\frac{1}{2}$

T： そうですね。$\frac{1}{2}$。約分する前は？

Kus：$\frac{6}{12}$

T： そうですね。Y くんが当たる確率は，$\frac{6}{12}$ だから $\frac{1}{2}$ だという風に計算できそうですね。握ってしまっているので，確率が変わるっていうのは変な感じがするかもしれませんね。でも，当たりが出尽くしちゃったあとだったら，自分が握っているのは 100%はずれ確定だって，みなさん言えると思うんですよね。うん。同じように，えー，当たりの本数が変わっちゃうと，握っていて当たってるかはずれてるかは決まってはいるけれども，確率自体は変化するかもしれない。ね。そんな風にとることができるんじゃないでしょうか。実際計算したら半分になりますしね。えー，あるいは，ちょっと違う見方して，4 本残っていて，2 本のそのうち当たりだから $\frac{2}{4}$ で $\frac{1}{2}$ 。こういう計算した人もいるかもしれませんね。それでも構いません。状況としては同じですね。

指名された生徒は，教師の問いに適切に答えることができ，問 A で「下がる」が正答である理由を，確率を求めて説明することができた。最後に教師は，くじ引きは引く順番に依らず公平であることと，本時の内容とを混同し，くじ引きが公平ではないと勘違いしてしまう生徒がいることを想定し，くじ引きは公平であるかどうかを以下のように生徒 Sib に問い，本時のまとめとした。

T：　じゃあ，皆さんこれで求めることはできましたが，これってくじ引き不公平なんですかね？隠したり，見たりすると確率は変わるってことですよね？これ，くじ引きって不公平なんですかね？ちょっと聞いてみようかな。周りで議論してみようか。

T：　じゃあ，Sib さん。結局くじ引きって不公平なんですかね？

Sib：公平

T：　そうですね。さっき計算しましたね。最初にね。くじを引く前の段階では，2 人の当たる確率はどちらも $\frac{3}{5}$ でしたね。引いてったら，本数が変わるから，確率がころころと変わるかもしれません。えっと，前の人が当たったかどうかで，次当たるか当たりにくくなるかどうかは変わるから，くじは不公平かもしれないって書いててくれた人もいるかもしれません。それはある意味ではその通りですね。え一引き始めたら，確率は変わりますからね。でも，くじを引く前の段階では，みんな公平だったので，くじを引く順番を決めるまでは，ちゃんとみんな公平です。なので，そんなに競い合うように何番目を引くかを争わなくてもいいかもしれませんね。

２．分析と考察

授業ではまず，前時の復習を行い，くじ引きはくじを引く順番に依らずに公平であることを確認した。次に，問 A を解かせた結果,「変わらない」を選択した生徒は 30 名で,「下がる」を選択した生徒は 8 名,「変わらない」と「下がる」の両方を選択した生徒は 3 名であった。この結果は，事前の予想通りであり，多くの生徒が既有の頻度的な確率解釈を用いて，確率は事象に対して適用されるものであるという考え方を示した。また，授業後に回収したワークシートの記述から,「下がる」を選択した生徒と,「変わらない」と「下がる」を選択した生徒のうち，全ての場合を数え上げた結果，2 人ともが当たる確率よりも 1 人だけ当たる確率の方が低いという理由で,「下がる」を選択していた生徒は 7 名であった。第 2 節での分析結果を考慮すれば，このような生徒は，全ての場合を数え上げただけであって，確率は事象についての情報に対して適用されるものであると考えているとは言い難い。確率は事象についての情報に対して適用されるものであると考えていると判断できる生徒は，授業内で指名された Sug，Yon，Mit と，もう一人（Kod）の計 4 名であった。結果として，最初に問 A を解かせることで，まずは頻度的な確率解釈に対して自覚的になる場面を設定できた。

次に，教師が Iwa，Hir，Yon，Sug の 4 名の生徒の意見を取り上げ，再度周囲との話し合いを時間を設定すると，8 名の生徒が，新たに「下がる」を選択した。これは，Sug が全体に対して行った説明と，Mit が Mit の周囲の生徒に対して行った, あなたが 3 人いた場合の説明に納得した生徒であった。一方で, Kom, Sak, Hir，Oka のように「下がる」を選択した生徒がいることを認識しながらも，依然として「変わらない」を選択する生徒も半数以上いた。この結果は，第 2 節での分析と同様に，原因が確定しない状況では，生徒は頻度的な確率解釈を適用でき

ないと認識しづらいということを示している。

問 A についての生徒同士の話し合いが終了した後，教師は Mit を指名した。ここでは，原因が確定する状況を提示することを目的として問 B を提示する予定であった。しかし，Mit の例も問 B と同様の状況を設定していたことから，教師が問 B を与えるよりも，Mit の説明を全体で共有した方が良いと判断し，Mit を指名した。Mit が自身の考えた例を説明し，教室で実際に実験した後に再度話し合いの時間を設けると，最初は「変わらない」を選択していた多くの生徒が「下がる」に選択し直した。Yon や Sug の意見を聞いても「変わらない」を選択し続けていた Kom らのグループも，「そんな気もしてきた。」や「なんこれー。下がる説あるなー。」といった発言からもわかるように，「下がる」という選択が適切であると判断していることがわかる。このことから，原因が確定する状況では，確率は事象に対して適用されるのではなく，事象についての情報に対して適用されるということを認識できることがわかる。また，その認識は原因が確定する状況のみに限定されるのではなく，それを契機として原因が確定していない状況にも適用されている。すなわち，原因が確定する状況において原因の確率を問うことによって，頻度的な確率解釈が適用できないことを認識することを契機として，新たに主観的な確率解釈を学習するという，学習の原理 α に基づいた学習が行われることが示された。

さらに，本節の結果より新たな教材の条件が導かれる。それは，「主観的な確率解釈の導入場面においては，原因の確率を考えさせる際，原因が確定しない状況と確定している状況の両方の状況で，原因の確率を考えさせる」である。原因が確定しない状況だけでは，第 2 節での授業のように，頻度的な確率解釈を有する生徒が，それが適用できないと認識しづらい。一方で原因が確定している状況だけでは，生徒は自らのパフォーマンスの違いに自覚的にならず，既有の頻度的な

確率解釈が適用できないと認識できないと同時に，新たな確率解釈として主観的な確率解釈を認識することもできない。ゆえに，本節での授業のように，まずは原因が確定しない状況で頻度的な確率解釈に基づいた選択を行い，その後に原因が確定している状況が提示されることで，頻度的な確率解釈が適用できないことと，主観的な確率解釈を認識することが期待される。以上より学習の原理α，βに基づいた学習を支援する教材の条件は，図５－１１となる。

教材の条件 a（学習の原理αより）： 　これまでは事象に対して確率は適用されると考えてきたと想定されるから，事象についての情報に対して確率は適用されると考えさせる 教材の条件 b（学習の原理βより）： 　これまでは原因に対する結果の確率を考えてきたから，結果に対する原因の確率を考えさせる 教材の条件 c（Tarr and Jones (1997) より）： 　主観的な確率解釈の導入場面においては，原因の確率を考えさせる際，原因が確定しない状況と確定している状況の両方の状況で，原因の確率を考えさせる

図５－１１

学習の原理 α，β に基づいた学習を支援する教材の条件 a，b，c

第５節．第５章のまとめ

第５章では，第４章で導出した学習の原理α，βに基づいた学習を支援することを目指した教材と授業を開発・実践し，その分析と考察を通して，確率概念の

形成を目指した教材と授業の条件と，その具体例を示すことを目的とする本章を概括すると以下のようになる。

- 学習の原理 α，β に基づいた学習を支援する教材の条件として，「a：これまでは事象に対して確率は適用されると考えてきたと想定されるから，事象についての情報に対して確率は適用されると考えさせる」と，「b：これまでは原因に対する結果の確率を考えてきたから，結果に対する原因の確率を考えさせる」を理論的に導出した。
- 教材の条件 a，b に基づいて開発した教材で授業を行った結果，開発した教材と授業は，学習の原理 α，β に基づく学習を支援する教材と授業として一定程度有効であったものの，頻度的な確率解釈を適用できないことと，主観的な確率解釈を認識させる状況設定が，十分ではなかった。具体的には，原因が確定しない状況における原因の確率を問われた場合，既有の頻度的な確率解釈を適用できないと認識しづらいことが明らかとなった。
- 原因が確定する状況において原因の確率を問う問題状況を設定することで，生徒は既有の頻度的な確率解釈を適用できないことと，主観的な確率解釈を認識できることがわかった。またこの結果から，新たな教材の条件として，「c：主観的な確率解釈の導入場面においては，原因の確率を考えさせる際，原因が確定しない状況と確定している状況の両方の状況で，原因の確率を考えさせる」を導いた。

註

５－１）授業では，生徒にワークシートを配布し，空欄を補充させながら条件付き確率の説明をした。図５－６中の①～⑨は，ワークシートに書かれた

空欄の番号を表している。

５－２）以下は，机間指導中に，Y くんの立場から確率を考えていた生徒（Nob）が，自身の考えを教師に伝えた場面の抜粋である。

（問①について）

Nob : Y くんが，当たりかはずれかわかんないじゃないですか。わからないから，あなたが当たる確率は，$\frac{1}{9}$ の場合もあるし，$\frac{2}{10}$ の場合もあるじゃないですか。で, それで, 最初 Y くんが当たる確率は $\frac{2}{10}$，$\frac{1}{5}$ じゃないですか。でも当たったたって言っていることによって，Y くんはまだみていないけど, えーっと, 見てない札が 9 個あるから, そのうちの当たりは一個だから，$\frac{1}{5}$ から $\frac{1}{9}$ になった。

（問②について）

Nob : もう，Y くんが確認している時点で，Y くんが当たるかはずれるかは，決まっているからです。見てる時点で，はずれか当たりかは Y くんは知っているんで。その後に，もうそこで Y くんが当たっていたら，当たっているっていう事実がそこにあるじゃないですか。その後にあなたが何をひいても，Y くんが当たってるんだったら当たってるっていう事実は変らないから，確率は最初のままと一緒。

第５章の引用および参考文献

五十嵐慶太（2014).「モデル化という視点から見た条件付き確率に関する困難性：「時間軸の問題」を用いた分析」．日本数学教育学会『数学教育学論究　臨時増刊第 47 回秋期研究大会特集号』，第 96 巻，pp.1-8.

竹内啓（2018).『歴史と統計学：人・時代・思想』．日本経済新聞出版社.

松浦武人（2006).「児童の確率判断の実態に関する縦断的・横断的研究」．全国数学教育学会『数学教育学研究』，第 12 巻，pp.141-151.

松原望（2013).『松原望 統計学』．東京図書.

文部科学省（2008).『中学校学習指導要領解説　数学編』．教育出版.

文部科学省（2009).『高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編』．実教出版.

Böcherer-Linder, K., & Eichler, A. (2017). The impact of visualizing nested sets. An empirical study on tree diagrams and unit squares. *Frontiers in Psychology*, 7.

Böcherer-Linder, K., Eichler, A., & Vogel, M. (2018). Visualising Conditional Probabilities: Three Perspectives on Unit Squares and Tree Diagrams. In C. Batanero & E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research* (pp.73-88). Springer International Publishing.

Devlin, K. (2014). The Most Common Misconception About Probability? In E. J. Chernoff, & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking: Presenting plural perspectives. Advances in Mathematics Education 7* (pp.ix-xiii). Berlin: Springer.

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *Vol.28*, No.1, pp.96-105.

Tarr, J. E., & Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, *Vol.9*, pp.39-59.

Tarr, J. E., & Lannin, J. K. (2005). How Can Teachers Build Notions of Conditional Probability and Independence? In Jones G. A. (Ed.) *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp.215-238). Springer US.

終章：本研究の成果と今後の課題

第１節．本研究の成果

本研究では，確率教育が意思決定能力の育成という学校教育への要請に応えることができていないことに課題意識を持ち，「数学教育において，今日的な社会での意思決定に求められる確率概念の形成過程を明らかにするとともに，確率概念を形成するための授業を開発・実践すること」を目的とした。以下では，この目的に対して各章で取り組んだ内容をそれぞれ概観する。

１．数学教育において形成を目指す確率概念

第 1 章では，我が国の高等学校進学率が 98%を超えているという現状を踏まえて（文部科学省，2019a），中等教育を終えた学習者が，どのような確率概念を形成していることが望ましいかを意思決定の視点から考察し，数学教育において形成を目指す確率概念を同定した。

第 1 節では，竹村・吉川・藤井（2004）の「意思決定環境に応じた意思決定の分類」に基づいて，今日的な社会の意思決定環境を「リスク下または不確実性下の意思決定」と同定した。ここで，リスク下とは，選択肢を採択したことによる可能な結果に確率を割り振れる場合であり，不確実性下とは，選択肢を採択したことによる結果の確率がわからない状況である。今日的な社会には，この両方の性格があることがわかった。

第 2 節では，リスク下または不確実性下の意思決定で要求され，数学教育の目標となり得る確率概念を，確率概念の哲学的側面と数学的側面とに分けて同定した。その結果，哲学的側面については，竹村・吉川・藤井（2004），ギルボア（2012），

繁桝（2016）の知見から,「頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通了解的な解釈」を設定した。ここで，頻度的な確率解釈とは，試行の結果から確率を推定する立場であり，主観的な確率解釈とは，個人または集団の信念の度合いを確率として表す立場である。今日的な社会ではこの両方が援用されていて，場面に応じて使い分けられていることがわかった。数学的側面については，我々が実際の生活で必要とする確率は全て条件付き確率であることと（竹内，2014），確率は事象についての情報に対して適用されるものであり（Devlin, 2014），それに数理を与えるものとして条件付き確率（ベイズの定理）が決定的に重要であることから（柳川，2007），「条件付き確率」を設定した。

２．哲学的側面からみた確率概念の形成過程の規範モデル

第１章より，確率概念の哲学的側面（確率解釈）において目標とするのは，頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通了解的な解釈である。そこで第２章では，学習者はどのようなプロセスを経て，頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通了解的な解釈を形成すべきかについて，その規範モデルを構築した。

第１節では，確率解釈の史的展開を視点とし，それが確率解釈の形成過程の規範モデルを構築するための有効な視点であることを論じた。史的展開を視点とした理由は,第一に,種々の先行研究で数学史と数学教育の相互交渉を視点として，子供の発達過程の規範モデルが構築されているからである。そこには少なからず,『精神発生と科学史』（ピアジェ・ガルシア，1996）の影響が見て取れる（大滝，2012）。第二に，確率・統計領域における概念形成に関する先行研究では，確率概念は，解決できない問題状況への直面によって高次のそれが形成されていくことが明らかにされており（Shaughnessy, 1992; 大谷，2015），それが確率解釈の史

的展開と整合的であるからである。

第 2 節では，確率解釈の史的展開に基づいて，確率解釈の形成過程を，4 段階で表す規範モデルを構築した。また，各段階から高次の段階へは，既有の確率解釈では解決できない状況に直面し，それを解決するために新たな確率解釈が必要となることで展開するものであると論じた。

３．数学的側面からみた確率概念の形成過程の規範モデル

第 1 章より，確率概念の数学的側面において目標とするのは，条件付き確率である。そこで第 3 章では，数学的概念として条件付き確率を対象として，その概念形成過程の規範モデルを構築した。

第 1 節では，平成 21 年 3 月告示の高等学校学習指導要領（文部科学省，2009）（以下，「現行カリキュラム」とする）下で条件付き確率を学習した高校生を対象に調査を実施した。調査の目的は，現行カリキュラムにおける条件付き確率の指導の成果と課題の導出と，学習者の困難性の同定である。結果として，現行カリキュラムにおける条件付き確率の扱いは十分ではないことがわかった。また，学習者は条件付き確率 $P_A(B)$，積事象の確率 $P(A \cap B)$，事象の確率 $P(B)$ の 3 つを混同しているという困難性が明らかとなった。

第 2 節では，前節の調査結果により得られた学習者の困難性を，条件付き確率とその関連概念との混同と捉え，条件付き確率の関連概念として「条件なし確率」と「独立事象の確率」の 2 つを設定した。

第 3 節では，否定論に基づいた数学的概念形成過程（岩崎，1992；大谷，2015）を概観した。この枠組みを採用した理由は，否定論が，概念 A と非 A を明確化することで新たな概念 B を生み出し，それにより概念 A と概念 B の区別が明確と

なる過程を記述するからである。前節より，条件付き確率の困難性は，その関連概念との混同であったことから，この困難性に対し否定論は有効であると考えた。

第 4 節では，否定論に基づく数学的概念形成過程に基づいて，条件付き確率の数学的概念形成過程の規範モデルを，条件なし確率の外延が限定される段階から，条件付き確率の外延が限定される段階までの 4 つの段階として構築した。

４．確率概念の形成過程の規範モデル

第 4 章では，まずは，第 2 章および第 3 章を踏まえて，確率概念の形成過程の規範モデルを構築した。次に，第 1 章で同定した目標に関わって，特に先行研究での考察が十分でない「主観的な確率解釈」と「主観的な確率解釈と条件付き確率の関連」の学習の原理を導出した。

第 1 節では，前章までで哲学的側面と数学的側面とに分けて構築した確率概念の形成過程の規範モデルを関連させて，確率概念の形成過程の規範モデルを構築した。第 2 章より，ある確率解釈が適用できないと認識するためには，その確率解釈が形成され，既有のものとなっていなければならない。Chernoff (2008) や Borovcnik (2012) によれば，確率解釈を形成するためには，数学的側面との関連づけも不可欠である。ゆえに数学的側面との関連が無いままに，確率解釈の形成だけが展開していくことは考え難い。また，上述の柳川（2007）のように，確率解釈と数学的側面との関連を考慮した際，数学的側面は確率解釈に数理を与えるものとしての役割を担う。これらを考慮し，本節では，まずはある確率解釈を認識し，それをモデル化するために数学モデルを学習する。次に，それが現実問題に適用できないことを契機に新たな確率解釈が認識される。その後，その新たな確率解釈をモデル化するために数学モデルを学習するという過程が繰り返されて

より高次の確率概念が形成されていく過程を表した，確率概念の形成過程の規範モデルを構築した。

第２節では，前節に基づいて，第１章で設定した目標である「頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通了解的な解釈」と「条件付き確率」の概念形成を目指す学習の原理として，特に先行研究での考察が十分でない「主観的な確率解釈」と「主観的な確率解釈と条件付き確率の関連」の学習に関わって，「α：主観的な確率解釈は，頻度的な確率解釈が適用できないと認識することを契機として学習される」，「β：条件付き確率は，条件なし確率では，主観的な確率解釈をモデル化できないことを認識し，主観的な確率解釈をモデル化するものとして学習される」という２つの学習の原理を導出した。

５．確率概念の形成を目指した教材と授業

第５章では，第４章で導出した学習の原理α，βに基づいて教材と授業を開発・実践し，その分析と考察を通して確率概念の形成を目指した教材と授業の条件と，その具体例を示した。

第１節では，学習の原理α，βを満たす学習を支援する教材の条件として，「a：事象についての情報に対して確率は適用されると考えさせる」と「b：結果に対する原因の確率を考えさせる」を導出し，それに基づいて教材と授業を開発した。

第２節では，国立大学附属高校の１年生を対象に授業を実施し，その分析と考察を行った。その結果，学習の原理α，βに基づく学習を支援する教材と授業として一定程度有効であったものの，頻度的な確率解釈を適用できないことと，主観的な確率解釈を認識させる状況設定が，十分ではなかった。

第３節では，前節の成果と課題を踏まえ，前節で十分ではなかった，頻度的な

確率解釈を適用できないことと，主観的な確率解釈を認識させる場面に焦点を当て，その学習を支援する教材と授業を再開発した。その際，Tarr and Jones (1997) の「条件付き確率の認識の発達段階」に基づいて，生徒が既有の確率解釈である頻度的な確率解釈が適用できないことと，新たな確率解釈として主観的な確率解釈を認識しやすい問題状況を設定した。具体的には，原因が確定している状況で原因の確率を問う問題であれば，それらの認識は促されると考えた。

第 4 節では，扱う教材が中学 2 年生以上の確率計算を必要としなかったことと，高校 1 年生は第 2 節での授業実践で既に主観的な確率解釈を認識しており，本教材と授業で対象とする生徒の条件には含まれなかったことから，国立大学附属中学校の 2 年生を対象に授業を実施し，その分析と考察を行った。その結果，前節で開発した教材とは異なるが，ある生徒（Mit）から原因が確定している状況の例が提示され，それが，生徒が頻度的な確率解釈を適用できないことと，主観的な確率解釈を認識することの契機となった。以上より，原因が確定する状況で主観的な確率解釈を扱うことで，既有の確率解釈である頻度的な確率解釈が適用できないことと，新たな確率解釈として主観的な確率解釈を認識させることができることがわかった。またこの結果から，新たな教材の条件として，「c：主観的な確率解釈の導入場面においては，原因の確率を考えさせる際，原因が確定しない状況と確定している状況の両方の状況で，原因の確率を考えさせる」を導いた。

第 2 節．本研究の意義

本研究の意義は，次の 3 つである。第一に，数学教育の確率単元の目標を，確率概念の哲学的側面と数学的側面とに分けて同定した点である。見方・考え方を軸として目標を設定した本研究は，資質能力の育成を重視するこれからの学校教

育の目標論に対して，示唆を与えることが期待される。第二に，確率概念の形成過程の規範モデルを，哲学的側面を軸として，それに数学モデルを与える形で構築した点である。見方・考え方を軸とした概念形成の過程は，数学的な内容の系統とは異なるもう 1 つの系統（奈須，2015 ; 大谷，2018）であると言える。これは資質能力ベースのカリキュラムの中軸となり得ることから，本研究は，確率単元における資質能力ベースカリキュラム開発に向けた基礎的研究として位置づけることができ，また，数学教育における資質能力ベースカリキュラム開発の方法の事例を示したといえる。第三に，主観的な確率解釈とそれに基づいた条件付き確率の授業を実践した点である。主観的な確率解釈をトピック的に扱う教材の開発は幾つか為されているが，確率概念の形成過程を考慮し行われた授業は管見の限りない。主観的な確率解釈と，それに基づいた条件付き確率の指導を系統立てて行うことができた本研究は，今日的な社会における意思決定の育成に寄与できる点で意義深いものである。

第 3 節．今後の課題

本研究に残された課題は多いが，代表的な課題として，以下に 3 つ挙げる。

1 つ目は，更なる教材の開発と授業の実践である。第 5 章において，主観的な確率解釈と条件付き確率に関する授業実践は行ったが，その他の授業実践には至っていない。そこで今後は，確率概念の形成過程の規範モデルに基づいて，更なる授業の計画と実践を行いたい。

2 つ目は，確率概念の形成過程に基づいた確率カリキュラムを開発することである。本研究の成果を確率教育全体へ還元するためにも，第 5 章のような授業開発に加えて，確率概念の形成過程に基づいた確率カリキュラム開発を行っていき

たい。ハウスン・カイテル・キルパトリック（1987）によれば，カリキュラムは少なくとも目的，内容，方法，評価の 4 つを含んだものである。本研究の成果と比較すれば，方法や評価についての考察は十分であるとは言い難い。ゆえに今後は，方法や評価に関しても考察したい。また，確率学習は，数学科における他の単元の学習の影響を多分に受けることが明らかにされていることから（大滝，2014），この点についても配慮が必要である。

3 つ目は，統計教育との関連について考察することである。確率はそれ自体でも十分に価値あるものであるが，現実場面への応用という観点から考えると，統計教育との関連も重要である。特に近年は統計教育において推測統計が積極的に扱われ始めていたり（文部科学省，2019b），ベイズ統計学への着目もされ始めていることから（文部科学省，2019c），その基盤としての確率教育の在り方も考えていきたい。

終章の引用および参考文献

岩崎秀樹（1992).「数学学習における「否定」の研究(1)」. 日本数学教育学会『数学教育論文発表会論文集』. 第 25 巻，pp.13-18.

大滝孝治（2012).「数学的ミスコンセプションのモデル化：小数の法則を事例として」. 全国数学教育学会『数学教育学研究』, 第 18 巻，第 1 号，pp.43-50.

大滝孝治（2014).「確率概念の形成におけるミスコンセプションの研究」. 未公刊博士学位論文，広島大学.

大谷洋貴（2015).「統計的概念の形成過程に関する研究：否定論に着目して」. 全国数学教育学会『数学教育学研究』. 第 21 巻，第 2 号. pp.113-121.

大谷洋貴（2018).「学校数学における統計カリキュラムの開発に関する研究」. 未公刊博士学位論文，広島大学.

ギルボア, I. (2012).『意思決定理論入門』. 川越敏司・佐々木俊一郎（訳). NTT 出版.

繁桝算男（2016). 「コメント」. 日本行動計量学会『行動計量学』, Vol. 43,　No. 1，pp.45-51.

竹内彰通（2014).「統計的な考え方と結果の見方」. 日本統計学会・数学セミナー編集部（著),『数学セミナー増刊統計学ガイダンス』, pp.6-10. 日本評価社.

竹村和久・吉川肇子・藤井聡（2004). 「不確実性の分類とリスク評価－理論枠組の提案－」. 社会技術研究会『社会技術研究論文集』, Vol.2，pp.12-20.

奈須正裕（2015).「コンピテンシー・ベイスの教育と教科の本質」. 奈須正裕・江間史明（編),『教科の本質から迫る コンピテンシー・ベイスの授業づくり』(pp.8-34). 図書文化社.

ハウスン, G. ・カイテル, C. ・キルパトリック, J. (1987).『算数・数学科のカリ

キュラム開発』．島田茂・澤田利夫（監訳）．共立出版．

ピアジェ, J. ・ガルシア, R. (1996)．『精神発生と科学史：知の形成と科学史の比較研究』．藤野邦夫・松原望（訳）．新評論．

文部科学省（2009）．『高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編』．実教出版．

文部科学省（2019a）．「学校基本調査－調査の概要」．http://www.mext.go.jp/component/b_menu/other/__icsFiles/afieldfile/2019/08/08/1419592_2.pdf. （最終閲覧：2020 年 1 月 27 日）

文部科学省（2019b）．『高等学校学習指導要領(平成 30 年告示)解説 数学編 理数編』．学校図書．

文部科学省（2019c）．『高等学校学習指導要領(平成三十年告示)解説 理数編』．東京書籍．

柳川尭（2007）．「ベイズの定理とバイオ統計学」．大賀雅美（編),『数学セミナー』，第 46 巻，第 2 号，pp.13-17．日本評論社．

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Didactica de la Matemática*, No.2, pp.5-27.

Chernoff, E. J. (2008). The state of probability measurement in mathematics education: A first approximation. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, *23*, pp.1-23.

Devlin, K. (2014). The Most Common Misconception About Probability? In E. J. Chernoff, & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking: Presenting plural perspectives. Advances in Mathematics Education, Vol. 7* (pp.ix-xiii). Berlin: Springer.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics. In D. A.

Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.465-494). New York: Macmillan.

Tarr, J. E., & Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, *Vol.9*, pp.39-59.

本研究における引用および参考文献一覧

五十嵐慶太・宮川健（2013).「学校数学における確率を捉える枠組みの一提案：数学的モデルとしての確率という視点から」. 日本数学教育学会 『数学教育学論究 臨時増刊第 46 回秋期研究大会特集号』, 第 95 巻，pp.17-24.

五十嵐慶太（2014).「モデル化という視点から見た条件付き確率に関する困難性：「時間軸の問題」を用いた分析」. 日本数学教育学会 『数学教育学論究 臨時増刊第 47 回秋期研究大会特集号』, 第 96 巻，pp.1-8.

市川伸一・下條信輔（2010).「3 囚人問題研究の展開と意義をふり返って」. 日本認知心理学会『認知心理学研究』, 第 7 巻，第 2 号，pp.137-145.

岩崎秀樹（1992).「数学学習における「否定」の研究(1)」. 日本数学教育学会『数学教育論文発表会論文集』. 第 25 巻，pp.13-18.

岩崎秀樹（2003).「磯田論文（2002)『数学史上の関数と極限の数学化過程』の『眺望』をめぐって」. 日本数学教育学会『第 36 回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録：今後の我が国の数学教育研究』, pp. 180-182.

岩崎秀樹・大滝孝治・新居広平（2012).「数学教育における目的・目標論再考」. 日本数学教育学会『日本数学教育学会誌』, 第 94 巻，第 11 号，pp.26-29.

大滝孝治（2012).「数学的ミスコンセプションのモデル化：小数の法則を事例として」. 全国数学教育学会『数学教育学研究』, 第 18 巻，第 1 号，pp.43-50.

大滝孝治（2013).「確率ミスコンセプションの克服に関する否定論的考察：小数の法則を事例として」. 全国数学教育学会『数学教育学研究』. 第 19 巻，第 2 号，pp.109-115.

大滝孝治（2014).「確率概念の形成におけるミスコンセプションの研究」. 未公刊

博士学位論文，広島大学.

大谷洋貴（2015).「統計的概念の形成過程に関する研究：否定論に着目して」．全国数学教育学会『数学教育学研究』，第 21 巻，第 2 号，pp.113-121.

大谷洋貴（2016).「否定論を視点とした回帰直線の学習指導に関する一考察」．全国数学教育学会『数学教育学研究』．第 22 巻，第 2 号，pp.141-151.

大谷洋貴（2018).「学校数学における統計カリキュラムの開発に関する研究」．未公刊博士学位論文，広島大学.

織田勇一（2009). 「中学校数学科における確率指導の改善：数学的確率と統計的確率の相互作用に着目して」. 日本数学教育学会『数学教育論文発表会論文集』，第 42 巻，pp.397-402.

カプラン, M.・カプラン, E. (2007).『確率の科学史：「パスカルの賭け」から気象予報まで』．対馬妙（訳)．朝日新聞社.

川嵜道広（1990).「学校数学における確率教材の研究」．平林一榮先生頌寿記念出版会（編)，『数学教育学のパースペクティブ』(pp.397-412) ． 聖文社.

ギルボア, I. (2012).『意思決定理論入門』. 川越敏司・佐々木俊一郎（訳). NTT 出版.

ギリース, D. (2004).『確率の哲学理論』．中山智香子（訳)．日本経済評論社.

国立教育政策研究所（2018). 「平成 30 年度　全国学力・学習状況調査【中学校】報告書」.
https://www.nier.go.jp/18chousakekkahoukoku/report/data/18mmath.pdf.（最終閲覧：2020 年 1 月 27 日）

Kruschke, J. K. (2017).『ベイズ統計モデリング』．前田和寛・小杉考司（監訳). 共立出版.

小島寛之（2013).『数学的決断の技術：やさしい確率で「たった一つ」の正解を

導く方法』．朝日新書．

後藤蔚（2009）．「偶然と確率の哲学」．未公刊博士学位論文，東洋大学．

コルモゴロフ, A. N. (2010).『確率論の基礎概念』. 坂本實（訳）. ちくま学芸文庫.

小山正孝（2010).『算数教育における数学的理解の過程モデルの研究』. 聖文新社.

繁桝算男（2016).「コメント」．日本行動計量学会『行動計量学』, Vol. 43，No. 1，pp.45-51．

真野祐輔（2010）．「算数・数学学習における概念変容に関する基礎的研究：「数」領域の展開を中心に」．未公刊博士学位論文，広島大学．

スタノヴィッチ, K. E. (2017)．『現代世界における意思決定と合理性』．木島泰三（訳）．太田出版．

竹内彰通（2014).「統計的な考え方と結果の見方」．日本統計学会・数学セミナー編集部（著),『数学セミナー増刊統計学ガイダンス』, pp.6-10．日本評価社．

竹内啓（2018）．『歴史と統計学：人・時代・思想』．日本経済新聞出版社．

竹村和久・吉川肇子・藤井聡（2004）．「不確実性の分類とリスク評価：理論枠組の提案」．社会技術研究会『社会技術研究論文集』，Vol.2，pp.12-20．

田村坦之（2004).「意思決定論とその応用に関する最近の動向」．システム制御情報学会『システム／制御／情報』，Vol.48，No.5，pp.178-183．

中央教育審議会（2016）．「幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）」．https://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/__icsFiles/afieldfile/2017/01/10/1380902_0.pdf．（最終閲覧：2020 年 1 月 27 日）

坪井俊ほか 13 名（2011）．『数学 A』．数研出版．

坪井俊ほか 13 名（2012）．『数学 B』．数研出版．

テトロック, P. E.・ガードナー, D. (2016)．『超予測力：不確実な時代の先を読む

10 カ条』. 土方奈美（訳）. 早川書房.

中垣啓（2011).「認知発達の科学としてのピアジェ理論：ピアジェの遺産を継承するために」. 日本教育心理学会『教育心理学年報』, 第 50 巻, p.22.

中野俊幸・岩崎秀樹（1999).「数学教育における「否定」について(Ⅱ)：概念形成における「否定」の役割について」. 日本数学教育学会『数学教育論文発表会論文集』. 第 32 巻. pp.327-330.

中原忠男（2017).「教科教育学とその課題」. 日本教科教育学会（編),『教科教育研究ハンドブック：今日から役立つ研究手引き』(pp.10-15). 教育出版.

奈須正裕（2015).「コンピテンシー・ベイスの教育と教科の本質」. 奈須正裕・江間史明（編),『教科の本質から迫る コンピテンシー・ベイスの授業づくり』(pp.8-34). 図書文化社.

西村圭一（2016).『数理的意思決定力の育成に関するホリスティック・アプローチ研究』. 共同印刷.

ハウスン, G. ・カイテル, C. ・キルパトリック, J. (1987).『算数・数学科のカリキュラム開発』. 島田茂・澤田利夫（監訳). 共立出版.

ハッキング, I. (2013).『確率の出現』. 広田すみれ・森元良太（訳). 慶応義塾大学出版会.

ピアジェ, J. ・ガルシア, R. (1996).『精神発生と科学史：知の形成と科学史の比較研究』. 藤野邦夫・松原望（訳). 新評論.

平林一榮（1990).「川嵜道広氏の論文を読んで：『直観的確率教授』の理論にむけて」. 平林一榮先生頌寿記念出版会（編),『数学教育学のパースペクティブ』(pp.413-414). 聖文社.

広田すみれ・増田真也・坂上貴之（2006).『心理学が描くリスクの世界　改訂版：行動的意思決定入門』. 慶應義塾大学出版会.

広田すみれ（2011).「リスクコミュニケーションにおける確率を用いた不確実性伝達の心理学的課題」. 心理学論評刊行会『心理学論評』, 第 54 巻, 第 2 号, pp.153-167.

藤澤洋徳（2006).『確率と統計』. 朝倉書店.

マグレイン, S, B. (2013).『異端の統計学 ベイズ』. 冨永星（訳). 草思社.

松浦武人（2006).「児童の確率判断の実態に関する縦断的・横断的研究」. 全国数学教育学会『数学教育学研究』, 第 12 巻, pp.141-151.

松浦武人（2015).「初等教育における確率概念の形成を意図した学習材の開発研究」. 未公刊博士学位論文, 広島大学.

松尾知明（2016).「知識社会とコンピテンシー概念を考える：OECD 国際教育指標（INES）事業における理論的展開を中心に」. 日本教育学会『教育学研究』, Vol. 83, No. 2, pp.140-153.

松原望（2008).『入門ベイズ統計：意思決定の理論と発展』. 東京図書.

松原望（2010).『ベイズ統計学概説：フィッシャーからベイズへ』. 培風館.

松村明（2006).『大辞林第三版』. 三省堂.

松下佳代ほか 19 名（2019).「大学教育の分野別質保証のための教育課程編成上の参照基準教育学分野（第一次案)」.

マンクテロウ, K. (2015).『思考と推論：理性・判断・意思決定の心理学』. 服部雅史・山祐嗣（訳). 北大路書房.

ミュラー, G. N.・シュタインブリング, H.・ビットマン, E. (2004).『PISA を乗り越えて：生命論的観点からの教育改革プログラム：算数・数学授業改善から教育改革へ』. 國本景亀・山本信也(訳). 東洋館出版社.

文部科学省（2008).『中学校学習指導要領解説　数学編』. 教育出版.

文部科学省（2009).『高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編』. 実教出版.

文部科学省（2019a).「学校基本調査－調査の概要」.

http://www.mext.go.jp/component/b_menu/other/__icsFiles/afieldfile/2019/08/08/1419592_2.pdf.（最終閲覧：2020 年 1 月 27 日）

文部科学省（2019b).『高等学校学習指導要領(平成 30 年告示)解説 数学編 理数編』. 学校図書.

文部科学省（2019c).『高等学校学習指導要領(平成三十年告示)解説 理数編』. 東京書籍.

柳川尭（2007).「ベイズの定理とバイオ統計学」. 大賀雅美（編),『数学セミナー』, 第 46 巻, 第 2 号, pp.13-17. 日本評論社.

ローゼンハウス, J. (2013).『モンティ・ホール問題：テレビ番組から生まれた史上最も議論を呼んだ確率問題の紹介と解説』. 松浦俊輔（訳). 青土社.

渡辺一弘（2008).「ベイジアンネットワークと確率の解釈」. 京都大学哲学論叢刊行会『哲学論叢』, 第 35 巻, pp.130-141.

Abrahamson, D. (2014). Rethinking Probability Education: Perceptual Judgment as Epistemic Resource. In E. J. Chernoff, & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking: Presenting plural perspectives.* Advances in Mathematics Education 7 (pp.239-260). Berlin: Springer.

Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and Probability in High School.* Sense Publishers.

Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., & Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability.* Springer International Publishing.

Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., & Sánchez, E. (2017). Teaching Learning of Probability. In G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the*

13th International Congress on Mathematical Education (pp.439-442). Springer International Publishing.

Böcherer-Linder, K., & Eichler, A. (2017). The impact of visualizing nested sets. An empirical study on tree diagrams and unit squares. *Frontiers in Psychology*, 7.

Böcherer-Linder, K., Eichler, A., & Vogel, M. (2018). Visualising Conditional Probabilities: Three Perspectives on Unit Squares and Tree Diagrams. In C. Batanero & E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research* (pp.73-88). Springer International Publishing.

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Didactica de la Matemática*, No.2, pp.5-27.

Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2018). Reasoning with Risk: Teaching Probability and Risk as Twin Concepts. In C. Batanero & E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research* (pp.3-22). Springer International Publishing.

Carranza, P., & Kuzniak, A. (2008). Duality of probability and statistics teaching in french education. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics*. Granada: ICMI and IASE.

Chernoff, E. J. (2008). The state of probability measurement in mathematics education: A first approximation. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, *Vol.23*, pp.1-23.

Devlin, K. (2014). The Most Common Misconception About Probability? In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking: Presenting plural perspectives. Advances in Mathematics Education, Vol. 7* (pp.ix-xiii). Berlin: Springer.

Díaz, C., & Batanero, C. (2009). University students' knowledge and biases in conditional probability reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education, Vol.4*, No.3, pp.131-162.

Doswell, C., & Brooks, H. (2019). Probabilistic forecasting - A primer. https://www.nssl.noaa.gov/users/brooks/public_html/prob/Probability.html. (最終閲覧：2020 年 1 月 27 日)

Falk. R (1979). Revision of probability and the time axis. *Proceedings of the Third International Conference for Psychology of Mathematics Education*, *Vol.3*, pp.64-66.

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The Evolution with Age of Probabilistic, Intuitively Based Misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *Vol.28*, No.1, pp.96-105.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1997). A framework for assessing young children's thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics*, *Vol.32*, pp.101-125.

Jones, G. A., Langrall, C. W., & Mooney, E. S. (2007). Research in probability: Responding to classroom realties. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 909-955). New York: Macmillan.

Kahneman, D., & Tversky, A. (2000). *Choices, values, and frames*. New York:

Cambridge University Press.

Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow*. New York, USA: Farrar, Straus and Giroux.

Kazak, S., Wegerif, R., & Fujita, T. (2015). Combining scaffolding for content and scaffolding for dialogue to support conceptual breakthroughs in understanding probability. *ZDM Mathematics Education*, *Vol.47*, Issue.7, pp.1269-1283.

Otaki, K. (2019). Frequentist probability in Japanese school curricula. *Educação Matemática Pesquisa, São Paulo*, *Vol.21*, No.4, pp.100-111.

Pratt, D., & Kazak, S. (2018). Research on Uncertainty. In D. Ben-Zvi, K. Makar, & J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp.193-227). Springer, Cham.

Prodromou, T. (2012). Connecting experimental probability and theoretical probability. *ZDM Mathematics Education*, *Vol.44*, Issue.7, pp.855-868.

Saenen, L., Heyvaert, M., Van Dooren, W., & Onghena, P. (2015). Inhibitory control in a notorious brain teaser: the Monty Hall dilemma. *ZDM Mathematics Education*, *Vol.47*, pp.837-848.

Saenen, L., Heyvaert, M., Van Dooren, W., Schaeken, W., & Onghena P. (2018). Why Humans Fail in Solving the Monty Hall Dilemma: A Systematic Review. *Psychologica Belgica*, *Vol.58*, No.1, pp.128-158.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification: the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, Vol.26*, pp.191-228.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and* *learning*, (pp.465-494). New York: Macmillan.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: an epistemological perspective*. Berlin, Germany: Springer.

Tarr, J. E., & Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, *Vol.9*, pp.39-59.

Tarr, J. E., & Lannin, J. K. (2005). How Can Teachers Build Notions of Conditional Probability and Independence? In Jones G. A. (Ed.) *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp.215-238). Springer US.

Witmer, J. (2018). To Bayes or Not to Bayes? (The Answer Is Yes). In D. Ben-Zvi, K. Makar, and J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp.426-428), Springer International Publishing.

本論文に関わる著者の主な先行研究

【学術論文（査読有）】

1. 石橋一昴（2016).「中等教育における確率のカリキュラム開発に向けた一考察：確率概念の形成のための定義と偶然概念に焦点を当てて」. 全国数学教育学会『数学教育学研究』，第 22 巻，第 2 号，pp.133-140. https://doi.org/10.24529/jasme.22.2_133.
2. 石橋一昴（2017).「意思決定に求められる確率判断能力の育成に向けた確率教育に関する一考察：ベイズの定理に着目して」. 全国数学教育学会『数学教育学研究』，第 23 巻，第 2 号，pp.83-90. https://doi.org/10.24529/jasme.23.2_83.
3. 石橋一昴（2017).「確率教育における独立概念の理解へ向けた指導内容と方法の一考察」. 日本教科教育学会『日本教科教育学会誌』，第 40 巻，第 3 号，pp.37-46.
4. 石橋一昴（2018).「リスクリテラシーの育成に向けた確率に関する教育内容の研究」. 全国数学教育学会『数学教育学研究』，第 24 巻，第 2 号，pp.1-9.
5. 石橋一昴（2019).「確率解釈の形成を志向する確率カリキュラム開発」. 全国数学教育学会『数学教育学研究』，第 25 巻，第 2 号，pp.11-25.

【発表集録（査読有）】

1. 石橋一昴（2016).「学校数学における確率の認知過程を捉える枠組みの一提案」. 日本数学教育学会『第 49 回秋期研究大会発表集録』， pp.275-278.
2. 石橋一昴（2017).「確率解釈を視点とした条件付き確率の困難性の要因」. 日

本数学教育学会『第 50 回秋期研究大会発表集録』, pp.317-320.

3. Ippo Ishibashi, Masataka Koyama, & Kazuya Kageyama (2018). Factors Affecting Difficulty of Conditional Probability in the Japanese Probability Curriculum. *Proceedings of the 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education, Vol.1*, pp.469-477.
4. 石橋一昴 (2018).「否定論の視点から見た条件付き確率の概念形成に関する研究」. 日本数学教育学会『第 51 回秋期研究大会発表集録』, pp.73-80. https://ir.lib.hiroshima-u.ac.jp/ja/00048203.
5. 石橋一昴 (2019).「原因の確率の理解を目標とした条件付き確率の学習を支援する教材と授業の条件」. 日本数学教育学会『第 52 回秋期研究大会発表集録』, pp.65-72. https://ir.lib.hiroshima-u.ac.jp/ja/00048299.
6. Ippo Ishibashi (in press). Task design for the teaching of Bayesian inference: A case using the Falk phenomenon. *The 14th International Congress on Mathematical Education*.

謝　辞

本学位論文を執筆するにあたり，多くの方々にお世話になりました。主任指導教員の小山正孝先生には，私の興味・関心を最大限尊重していただきながら，ご指導いただきました。色々なことに興味・関心があった私は，自分自身の一貫した視座を見失いそうになることが何度かありましたが，その都度小山先生には，私の研究に一貫する視座を見出していただき，研究の方向性を示していただきました。おかげ様で，一貫した視座の下で学位論文を執筆することができました。また，特別研究や授業では，研究者や教育者としての姿勢も学ばせていただきました。ありがとうございました。

広島大学大学院教育学研究科の寺垣内政一先生には，本学位論文の副査としてご指導いただきました。寺垣内先生には数学者の立場から，筆者の目指している確率の哲学的側面と数学的側面との関連についてご意見をいただきました。本学位論文が目標とするところは何か？それは数学教育としてはどのような意味があるのか？ということを常に考えさせていただきました。ありがとうございました。

広島大学大学院教育学研究科の松浦武人先生には，本学位論文の副査としてご指導いただきました。松浦先生は主に初等教育の確率教育研究をされておりますので，主に中等教育の確率教育に焦点を当てている本学位論文の土台について，ご意見をいただきました。また各学会では私の発表に足を運んでくださり，研究の方向性を示していただきました。ありがとうございました。

広島大学大学院教育学研究科の影山和也先生には，本学位論文の副査としてご指導いただきました。影山先生には特別研究にもご出席いただき，毎回的確なご意見をいただきました。また，国際学会でご一緒させていただく機会が多く，国

際的に活躍する研究者の姿勢を学ばせていただきました。ありがとうございました。

一昨年度まで講座事務として勤務されていた森満緑さん，一昨年度より講座事務として勤務されている青山径子さんには，私が研究に専念できるように，様々な面でサポートしていただきました。ありがとうございました。

多くの先輩と後輩にもお世話になりました。ありがとうございました。特に，大滝孝治さん，早田透さん，上ヶ谷友佑さん，袴田綾斗さん，福田博人さん，大谷洋貴さんには，学会でお会いした時だけでなく，メール等でも度々ご指導いただきました。また，博士課程後期の学生生活の過ごし方についても，ご自身の経験を踏まえながら教えていただきました。河村真由美さんには，お忙しい中，本学位論文を細部にわたってチェックしていただき，多くのご指摘を賜りました。皆さまに感謝申し上げます。ありがとうございました。

広島大学附属福山中・高等学校の先生方にも，大変お世話になりました。広島大学附属福山中・高等学校では，博士課程後期 1 年次には教諭として，3 年次には非常勤講師として勤務させていただきました。私の研究活動にご理解いただき，研究と仕事の双方で多くの先生方に多くのご支援を賜りました。ありがとうございました。

広島大学だけではなく，他大学の先生方や大学院生の方々，小中高の先生方にもお世話になりました。皆さまのご指導やご指摘のどれが欠けても，本学位論文は完成させることができませんでした。ありがとうございました。また，私に教師という仕事の素晴らしさを教えてくれた武田高等学校柔道部顧問の竹本功先生，私の学部生時代の指導教員であり，大学院進学後もいつも気にかけていただいた広島大学大学院工学研究科の向谷博明先生にも感謝申し上げます。ありがとうございました。

謝辞を書かせていただくなかで，改めて多くの方々に支えていただき今の自分があると感じます。本当であればお世話になったすべての方のお名前を挙げさせていただきたいのですが，それはできませんので，後日直接お礼を言わせていただきます。名前を挙げさせていただいた方々にも，もっとお礼を言わなければならないので，後日直接お礼を言わせていただきます。また，これからも変わらぬご指導，ご支援をお願いいたします。

最後になりましたが，陰ながら支えてくれた両親，祖母，弟に感謝申し上げます。ありがとうございました。これからも迷惑かけますが，よろしくお願いします。