

学位論文要旨

数学教育における
確率概念の形成過程に関する研究

広島大学大学院教育学研究科
教育学習科学専攻 教科教育学分野
数学教育学領域

D171800 石橋 一昂

目次

序章 本研究の目的と方法

- 第1節 本研究の背景と目的
- 第2節 本研究の方法と論文構成

第1章 数学教育において形成を目指す確率概念

- 第1節 今日的な社会の意思決定環境
- 第2節 数学教育において形成を目指す確率概念
- 第3節 第1章のまとめ

第2章 哲学的側面からみた確率概念の形成過程の規範モデル

- 第1節 確率解釈の史的展開
- 第2節 確率解釈の形成過程の規範モデル
- 第3節 第2章のまとめ

第3章 数学的側面からみた確率概念の形成過程の規範モデル

- 第1節 条件付き確率の理解に関する学習者の実態調査
- 第2節 条件付き確率とその関連概念
- 第3節 否定論に基づく数学的概念形成過程
- 第4節 条件付き確率の数学的概念形成過程の規範モデル
- 第5節 第3章のまとめ

第4章 確率概念の形成過程の規範モデル

- 第1節 確率概念の形成過程の規範モデル
- 第2節 学習の原理
- 第3節 第4章のまとめ

第5章 確率概念の形成を目指した教材と授業

- 第1節 教材と授業の開発
- 第2節 授業の分析と考察
- 第3節 教材と授業の再開発
- 第4節 授業の分析と考察
- 第5節 第5章のまとめ

終章 本研究の成果と今後の課題

- 第1節 本研究の成果
- 第2節 本研究の意義
- 第3節 今後の課題

本研究における引用および参考文献一覧

本論文に関わる著者の主な先行研究

1. 本研究の背景と目的

高度情報化やグローバル化などと称される変化の激しい今日的な社会を生きる子供たちのために、学校教育においては意思決定能力の育成が重要視されている（例えば、Batanero et al., 2016）。全ての意思決定は確率に基づくものであるため（マンクテロウ, 2015）、確率は全市民必須の教養である。しかしながら、今日の確率教育は意思決定能力の育成という社会からの要請に応えられてはいない（例えば、小島, 2013；マンクテロウ, 2015）。今日的な社会では、確率に対する見方や意味理解（以下、「確率解釈」と記す）が重要であるにも関わらず、確率の授業では複雑な分数計算ばかりが扱われているという乖離が生じている。このことから、確率教育の焦点を、これまでの確率の数学的内容から確率解釈へとシフトする必要がある。

確率概念の哲学的側面である確率解釈を指導することの重要性は、これまでも指摘されてきた（例えば、Borovcnik and Kapadia, 2018）。しかしながら、上述のように学校教育全体が教科主義で展開してきたこともあり、確率概念の形成を、哲学的側面を中心として考察した研究は、管見の限りない。確率教育の焦点が確率解釈へとシフトする必要があることを考慮すれば、それがどのような過程を経て形成されるべきかを明らかにすることは急務である。

このように確率解釈が中心となるものの、それによってこれまで重要視されてきた確率概念のもう一方の側面である数学的側面が軽視されるかと言えばそうではない。確率解釈を形成していく上で、数学的側面との関連は不可欠である（例えば、柳川, 2007；Chernoff, 2008；Borovcnik, 2012）。ゆえに、確率解釈との関連を考慮しながら、確率概念の数学的側面の形成過程についても考察する必要がある。

さらに、松下ほか（2019）によれば、教育学が実践志向性という固有の特色を持つ学問である以上、教育学の実践性を実感し得る教育の機会を提供することは大きな意義を持つ。このことを考慮すれば、本研究を教育学・教科教育学の意義ある研究として位置づけるためには、確率概念の形成過程モデルを理論的に構築した後、それに基づいてどのような教材や授業がデザインされ、それは子供の学習に有効に働くのかについても考察する必要がある。

以上の課題意識を踏まえ、本研究の目的を「数学教育において、今日的な社会での意思決定に求められる確率概念の形成過程を明らかにするとともに、確率概念を形成するための授業を開発・実践すること」と設定する。その上で、次の3つを下位目的として設定する。

下位目的 1： 今日的な社会での意思決定に求められる確率概念を同定し，数学教育における目標を設定すること

下位目的 2： 確率概念の形成過程の規範モデルを構築すること

下位目的 3： 確率概念の形成を目指す授業を開発・実践すること

2. 本研究の方法と論文構成

本研究では，下位目的 1～3 を達成するために，理論的研究，調査研究，実験的研究の方法を採用する。下位目的に対応させれば，下位目的 1 に対しては理論的研究，下位目的 2 に対しては理論的研究と調査研究，下位目的 3 に対しては理論的研究と実験的研究の方法を採用する。

本研究の論文構成は下図の通りである。

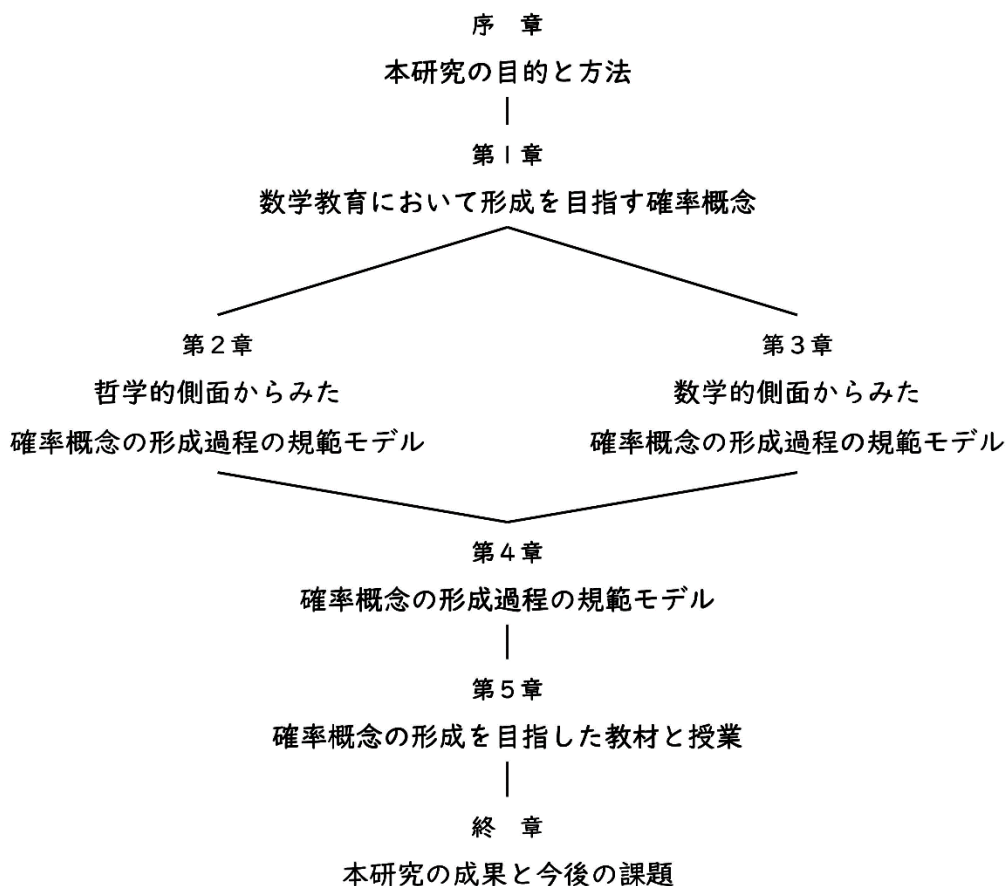


図 本研究の論文構成

3. 各章の概要：本研究の成果

第1章 数学教育において形成を目指す確率概念

第1章では、我が国の高等学校進学率が98%を超えているという現状を踏まえて（文部科学省，2019），中等教育を終えた学習者が，どのような確率概念を形成していることが望ましいかを意思決定の視点から考察し，数学教育において形成を目指す確率概念を同定した。

第1節では，竹村・吉川・藤井（2004）の「意思決定環境に応じた意思決定の分類」に基づいて，今日的な社会の意思決定環境を「リスク下または不確実性下の意思決定」と同定した。ここで，リスク下とは，選択肢を採択したことによる可能な結果に確率を割り振れる場合であり，不確実性下とは，選択肢を採択したことによる結果の確率がわからない状況である。今日的な社会には，この両方の性格があることがわかった。

第2節では，リスク下または不確実性下の意思決定で要求され，数学教育の目標となり得る確率概念を，確率概念の哲学的側面と数学的側面とに分けて同定した。その結果，哲学的側面については，竹村・吉川・藤井（2004），ギルボア（2012），繁樹（2016）の知見から，「頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通了解的な解釈」を設定した。ここで，頻度的な確率解釈とは，試行の結果から確率を推定する立場であり，主観的な確率解釈とは，個人または集団の信念の度合いを確率として表す立場である。今日的な社会ではこの両方が援用されていて，場面に応じて使い分けられていることがわかった。数学的側面については，我々が実際の生活で必要とする確率は全て条件付き確率であることと（竹内，2014），確率は事象についての情報に対して適用されるものであり（Devlin, 2014），それに数理を与えるものとして条件付き確率（ベイズの定理）が決定的に重要であることから（柳川，2007），「条件付き確率」を設定した。

第2章 哲学的側面から見た確率概念の形成過程の規範モデル

第1章より，確率概念の哲学的側面（確率解釈）において目標とするのは，頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通了解的な解釈である。そこで第2章では，学習者はどのようなプロセスを経て，頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通了解的な解釈を形成すべきかについて，その規範モデルを構築した。

第1節では，確率解釈の史的展開を視点とし，それが確率解釈の形成過程の規範モデルを構築するための有効な視点であることを論じた。史的展開を視点とした理由は，第一に，種々の先行研究で数学史と数学教育の相互交渉を視点として，子供の発達過程の規範モデ

ルが構築されているからである。そこには少なからず、『精神発生と科学史』（ピアジェ・ガルシア，1996）の影響が見て取れる（大滝，2012）。第二に，確率・統計領域における概念形成に関する先行研究では，確率概念は，解決できない問題状況への直面によって高次のそれが形成されていくことが明らかにされており（Shaughnessy, 1992; 大谷，2015），それが確率解釈の史的展開と整合的であるからである。

第2節では，確率解釈の史的展開に基づいて，確率解釈の形成過程を，「直観的主観的な確率解釈」から「頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通的な解釈」までの4段階で表す規範モデルを構築した。また，各段階から高次の段階へは，既存の確率解釈では解決できない状況に直面し，それを解決するために新たな確率解釈が必要となることで展開するものであると論じた。

第3章 数学的側面からみた確率概念の形成過程の規範モデル

第1章より，確率概念の数学的側面において目標とするのは，条件付き確率である。そこで第3章では，数学的概念として条件付き確率を対象として，その概念形成過程の規範モデルを構築した。

第1節では，平成21年3月告示の高等学校学習指導要領（文部科学省，2009）（以下，「現行カリキュラム」とする）下で条件付き確率を学習した高校生を対象に調査を実施した。調査の目的は，現行カリキュラムにおける条件付き確率の指導の成果と課題の導出と，学習者の困難性の同定である。結果として，現行カリキュラムにおける条件付き確率の扱いは十分ではないことがわかった。また，学習者は条件付き確率 $P_A(B)$ ，積事象の確率 $P(A \cap B)$ ，事象の確率 $P(B)$ の3つを混同しているという困難性が明らかとなった。

第2節では，前節の調査結果により得られた学習者の困難性を，条件付き確率とその関連概念との混同と捉え，条件付き確率の関連概念として「条件なし確率」と「独立事象の確率」の2つを設定した。

第3節では，否定論に基づいた数学的概念形成過程（岩崎，1992；大谷，2015）を概観した。この枠組みを採用した理由は，否定論が，概念Aと非Aを明確化することで新たな概念Bを生み出し，それにより概念Aと概念Bの区別が明確となる過程を記述するからである。前節より，条件付き確率の困難性は，その関連概念との混同であったことから，この困難性に対し否定論は有効であると考えた。

第4節では，否定論に基づく数学的概念形成過程に基づいて，条件付き確率の数学的概念形成過程の規範モデルを，条件なし確率の外延が限定される段階から，条件付き確率の

外延が限定される段階までの4つの段階として構築した。

第4章 確率概念の形成過程の規範モデル

第4章では、まずは、第2章および第3章を踏まえて、確率概念の形成過程の規範モデルを構築した。次に、第1章で同定した目標に関わって、特に先行研究での考察が十分でない「主観的な確率解釈」と「主観的な確率解釈と条件付き確率の関連」の学習の原理を導出した。

第1節では、前章までで哲学的側面と数学的側面とに分けて構築した確率概念の形成過程の規範モデルを関連させて、確率概念の形成過程の規範モデルを構築した。第2章より、ある確率解釈が適用できないと認識するためには、その確率解釈が形成され、既存のものとなっていなければならない。Chernoff (2008) や Borovcnik (2012) によれば、確率解釈を形成するためには、数学的側面との関連づけも不可欠である。ゆえに数学的側面との関連が無いままに、確率解釈の形成だけが展開していくことは考え難い。また、上述の柳川 (2007) のように、確率解釈と数学的側面との関連を考慮した際、数学的側面は確率解釈に数理を与えるものとしての役割を担う。これらを考慮し、本節では、まずはある確率解釈を認識し、それをモデル化するために数学モデルを学習する。次に、それが現実問題に適用できないことを契機に新たな確率解釈が認識される。その後、その新たな確率解釈をモデル化するために数学モデルを学習するという過程が繰り返されてより高次の確率概念が形成されていく過程を表した、確率概念の形成過程の規範モデルを構築した。

第2節では、前節に基づいて、第1章で設定した目標である「頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の共通的な解釈」と「条件付き確率」の概念形成を目指す学習の原理として、特に先行研究での考察が十分でない「主観的な確率解釈」と「主観的な確率解釈と条件付き確率の関連」の学習に関わって、「 α ：主観的な確率解釈は、頻度的な確率解釈が適用できないと認識することを契機として学習される」、「 β ：条件付き確率は、条件なし確率では、主観的な確率解釈をモデル化できないことを認識し、主観的な確率解釈をモデル化するものとして学習される」という2つの学習の原理を導出した。

第5章 確率概念の形成を目指した教材と授業

第5章では、第4章で導出した学習の原理 α 、 β に基づいて教材と授業を開発・実践し、その分析と考察を通して確率概念の形成を目指した教材と授業の条件と、その具体例を示した。

第 1 節では、学習の原理 α , β を満たす学習を支援する教材の条件として、「a: 事象についての情報に対して確率は適用されると考えさせる」と「b: 結果に対する原因の確率を考えさせる」を導出し、それに基づいて教材と授業を開発した。

第 2 節では、国立大学附属高校の 1 年生を対象に授業を実施し、その分析と考察を行った。その結果、学習の原理 α , β に基づく学習を支援する教材と授業として一定程度有効であったものの、頻度的な確率解釈を適用できないことと、主観的な確率解釈を認識させる状況設定が、十分ではなかった。

第 3 節では、前節の成果と課題を踏まえ、前節で十分ではなかった、頻度的な確率解釈を適用できないことと、主観的な確率解釈を認識させる場面に焦点を当て、その学習を支援する教材と授業を再開発した。その際、Tarr and Jones (1997) の「条件付き確率の認識の発達段階」に基づいて、生徒が既存の確率解釈である頻度的な確率解釈が適用できないことと、新たな確率解釈として主観的な確率解釈を認識しやすい問題状況を設定した。具体的には、原因が確定している状況で原因の確率を問う問題であれば、それらの認識は促されると考えた。

第 4 節では、扱う教材が中学 2 年生以上の確率計算を必要としなかったことと、高校 1 年生は第 2 節での授業実践で既に主観的な確率解釈を認識しており、本教材と授業で対象とする生徒の条件には含まれなかったことから、国立大学附属中学校の 2 年生を対象に授業を実施し、その分析と考察を行った。その結果、前節で開発した教材とは異なるが、ある生徒 (Mit) から原因が確定している状況の例が提示され、それが、生徒が頻度的な確率解釈を適用できないことと、主観的な確率解釈を認識することの契機となった。以上より、原因が確定する状況で主観的な確率解釈を扱うことで、既存の確率解釈である頻度的な確率解釈が適用できないことと、新たな確率解釈として主観的な確率解釈を認識させることができることがわかった。またこの結果から、新たな教材の条件として、「c: 主観的な確率解釈の導入場面においては、原因の確率を考えさせる際、原因が確定しない状況と確定している状況の両方の状況で、原因の確率を考えさせる」を導いた。

4. 本研究の意義と今後の課題

本研究の意義は、次の3つである。

- 意義1： 数学教育の確率単元の目標を、確率概念の哲学的側面と数学的側面とに分けて
定した点
- 意義2： 確率概念の形成過程の規範モデルを、哲学的側面を軸として、それに数学モデル
を与える形で構築した点
- 意義3： 主観的な確率解釈とそれに基づいた条件付き確率の授業を実践した点

本研究に残された課題は多いが、代表的な課題は、以下の3つである。

- 課題1： 更なる教材の開発と授業の実践
- 課題2： 確率概念の形成過程に基づいた確率カリキュラムの開発
- 課題3： 統計教育との関連

本要旨における引用および参考文献

- 岩崎秀樹 (1992). 「数学学習における「否定」の研究(1)」。日本数学教育学会『数学教育論文発表会論文集』. 第25巻, pp.13-18.
- 大滝孝治 (2012). 「数学的ミスコンセプションのモデル化：小数の法則を事例として」。全国数学教育学会『数学教育学研究』, 第18巻, 第1号, pp.43-50.
- 大谷洋貴 (2015). 「統計的概念の形成過程に関する研究：否定論に着目して」。全国数学教育学会『数学教育学研究』. 第21巻, 第2号. pp.113-121.
- ギルボア, I. (2012). 『意思決定理論入門』. 川越敏司・佐々木俊一郎 (訳). NTT 出版.
- 小島寛之 (2013). 『数学的決断の技術：やさしい確率で「たった一つ」の正解を導く方法』.
朝日新書.
- 繁樹算男 (2016). 「コメント」。日本行動計量学会『行動計量学』, Vol. 43, No. 1, pp.45-51.
- 竹内彰通 (2014). 「統計的な考え方と結果の見方」。日本統計学会・数学セミナー編集部 (著),
『数学セミナー増刊統計学ガイダンス』, pp.6-10. 日本評価社.
- 竹村和久・吉川肇子・藤井聡 (2004). 「不確実性の分類とリスク評価－理論枠組の提案－」.
社会技術研究会『社会技術研究論文集』, Vol.2, pp.12-20.
- ピアジェ, J. ・ガルシア, R. (1996). 『精神発生と科学史：知の形成と科学史の比較研究』.
藤野邦夫・松原望 (訳). 新評論.

- 松下佳代ほか 19 名 (2019). 「大学教育の分野別質保証のための教育課程編成上の参照基準 教育学分野 (第一次案)」.
- マンクテロウ, K. (2015). 『思考と推論：理性・判断・意思決定の心理学』. 服部雅史・山祐嗣 (訳). 北大路書房.
- 文部科学省 (2009). 『高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編』. 実教出版.
- 文部科学省 (2019). 「学校基本調査－調査の概要」.
http://www.mext.go.jp/component/b_menu/other/_icsFiles/afieldfile/2019/08/08/1419592_2.pdf (最終閲覧：2020年1月27日)
- 柳川堯 (2007). 「ベイズの定理とバイオ統計学」. 大賀雅美 (編), 『数学セミナー』, 第 46 巻, 第 2 号, pp.13-17. 日本評論社.
- Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., & Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*. Springer International Publishing.
- Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Didáctica de la Matemática*, No.2, pp.5-27.
- Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2018). Reasoning with Risk: Teaching Probability and Risk as Twin Concepts. In C. Batanero & E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research* (pp.3-22). Springer International Publishing.
- Chernoff, E. J. (2008). The state of probability measurement in mathematics education: A first approximation. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 23, pp.1-23.
- Devlin, K. (2014). The Most Common Misconception About Probability? In E. J. Chernoff, & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking: Presenting plural perspectives. Advances in Mathematics Education, Vol. 7* (pp.ix-xiii). Berlin: Springer.
- Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.465-494). New York: Macmillan.
- Tarr, J. E., & Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, Vol.9, pp.39-59.