Title	数学の授業における多様性伝達アプローチ : 実践から理論への接続
Author(s)	上ヶ谷, 友佑
Citation	中等教育研究紀要 ／広島大学附属福山中・高等学校 , 60 : 162 - 167
Issue Date	2020-03-31
DOI	
Self DOI	10.15027/49292
URL	https://ir.lib.hiroshima-u.ac.jp/00049292
Right	
Relation	

数学の授業における多様性伝達アプローチ

－実践から理論への接続－

上ヶ谷 友佑

本稿の目的は，数学の授業において「多様性伝達アプローチ」を用いた 2 つの授業実践の様子を報告し，実践の側から理論との接続を考えるための基礎資料を提供することである．多様性伝達アプローチは，授業で与えられた数学的問題を個人解決する過程で，複数の見解が実際に生じたことを教師が生徒達に伝えることによって，その後のペアトークおよび授業全体での議論を活性化することを企図した教育的手立てである．実践の様子を反省的に考察した結果，次の 2 点が明らかとなった．多様性伝達アプローチは，(1) 近年の数学教育におけるユーモア利用と，解釈の多様性に注目するという点で同じ構造を持ち，(2) そうした注目ゆえに，理論的観点からは，構成主義の架橋理論の 1 つである D. Tall のクリスタリン・コンセプト論との接続が期待される．

１．序論

数学教育における授業論は，かねてより構成主義に基づく授業論がいくつか提案されている．例えば，中原 (1995) の構成的アプローチ，Harel (2013) の DNR 原理，Simon (1995) の仮説的学習軌道論などが代表的である．これらの授業論では，学習者が主観的かつ能動的な知識構成の主体であるという構成主義の知識観 (Confrey & Kazak, 2006; von Glasersfeld, 1995) を背景に据えながら，そうした学習者が数学的知識を適切に構成できるようにするための学習活動の在り方が議論されている.そして,授業実践を見据えたこれらの理論は，一般に，構成主義と教室の架橋理論 (bridging theories) と呼ばれる (Confrey & Kazak, 2006)．しかしながら，これらの議論の多くは，理論の側から実践との接続を目指す方向性である．理論的発展・学問的体系化という観点から，こうした方向性は今後も一層推進されていくべきである一方，より強固な架橋・より効果的な架橋を目指す上では，その逆向き，実践の側から理論との接続を試みる方向性もまた重要であると考えられる．

実際，例えば，Simon (1995) の仮説的学習軌道論は，数学的課題設計論との関係で構成主義理論から教室実践への架橋という性格を強めてはいるものの (Simon, 2017; Simon et al., 2004; Simon & Tzur, 2004)，その起源においては，数学教師の意思決定のモデル化という，教室場面から構成主義への架橋理論としての性格を有していた (Simon, 1995)．また，近年の数学教育におけるユーモア利用の研究 (Van Dooren et al., 2019; 服部・上ヶ谷, 2019) は，構成主義理論への接続が企図されているわけではないものの，心理学的なユーモア理論から得られた数学教育実践のアイディアを，数学教育の理論へと接続する 1 つの試みとして理解できる．数学教育研究の在り方を，理論と実践の往還として規定する先行研究 (例えば，Ruthven & Goodchild, 2008; Wittmann, 2001) に倣えば，数学教育研究の理論的発展・学問的体系化は，理論と実践の両方向からの架橋が，今後も一層重要になると言ってよいであろう．

そこで本稿は，こうした数学教育研究の動向を踏まえながら，実践の側から理論との接続を考えるための，1 つの資料提供を目的とする．具体的に本稿では，授業において生徒達の数学的思考を活性化させるための手立て「多様性伝達アプローチ」[1)] を用いた 2 つの実践の様子について報告する．これらの実践は，広島大学附属福山中・高等学校の 2017 年度公開教育研究会・数学科・研究発表として，筆者によって報告された 2 つの実践である (上ヶ谷, 2017)．その後，これらの実践を支える教材論が，数理哲学的観点から論じられ (上ヶ谷, 2019)，これらの実践は，理論の側から実践との接続が試みられている実践でもある．本稿では，上述の目的に即し，これらの実践における教師の手立てに着目して，上ヶ谷 (2017) の議論を再構成しながら，「多様性伝達アプローチ」の数学教育研究上の理論的意義を検討する．

２．実践における手立て

本稿で提示する 2 つの実践は元々，「経験知の積み重ねとクリティカルシンキングを柱とした数学科授業」という当校数学科の研究テーマに即して立案された授業である．道田 (2015) によれば，クリティカルシンキング (批判的思考) の概念とは明確に定まった単一の概念で

はない．これまで，その思考様式の様々な特徴が，様々な論者によって指摘されてきたが，道田（2015）の整理に倣えば,クリティカルシンキングは,「批判」,「合理性」,「反省性」の３つを柱としてイメージすることができる．本稿でも，この３つがクリティカルシンキングの主要な特徴を表しているものと捉えることとしよう．

経験知の積み重ねという観点から見れば，問いの主体を生徒達へ委譲することが，実践的手立てとして重要であると思われる．例えば，教師に「本当にいつでも成り立つだろうか？」と問われる場面というのは，生徒達にとっては「自分達は特に疑わしいとは思っていないが，どういうわけか教師が疑問を投げかけてきている」場面であり得る．このとき，問いの主体は，教師であり，生徒達ではない．もちろん，教師による懐疑の姿勢が，生徒達に内面化され，生徒達も次第に懐疑の姿勢を身につけていく，という学習過程も重要ではある．しかし，そうした内面化がいつでも無条件に生じると期待することは，いささか過剰な期待であろう．教師が何かを問わないことには，生徒達の思考や懐疑が活性化されないかもしれないという教育者の直観と，だからと言って，生徒達が自ら思考したり懐疑したりする機会を，教育者がみすみす奪ってしまってはいけないという教育者の規範が，我々の目の前に，ジレンマとして横たわっている．

そこで考えるべきは，このジレンマの止揚である．ここでは，上ヶ谷（2015）が示した「数学指導の間接性」に着目したい．上ヶ谷（2015）は，仮説的学習軌道論に基づいて「予想する」という数学的方法について検討した結果，次の２点を明らかにした．第一に，教師から「どのように予想できるか？」と問われても，生徒達は主体的に予想することができない可能性がある．第二に，教師から，例えば「要領よく同じものをつくろう」と指示されたならば,「こうすれば要領よく同じものが作れるのではないか？」と予想を立てることができる．すなわち，本当に思考したり懐疑したりさせたいことは，教師から直接指示された別の思考や懐疑の過程において，間接的に発生するように仕向ければよい．このことは，クリティカルシンキングにも言えるはずである．

そこで，この間接性を実現するため，次の教育的手立てを考える．

[F1] 教材を工夫して，生徒達の中で複数の見解が生じるような問題を与える．
[F2] その問題を，まずは個人解決させる．教師は，机間支援として，個人解決の状況を観察する．
[F3] [F2] において複数の見解が生じていることを確認した上で，頃合いを見計らって「教室内で複数の見解が生じている」という事実を教室全体に伝え，ペアトークへと移行させる．
[F4] ペアトーク中は，必要に応じて積極的にペアへ介入する．その介入には，教室内の他者の見解を紹介することも含める．
[F5] 頃合いを見計らって全体での議論へと移行する．

このアプローチは，教室内に存在する見解の多様性を生徒達に伝達することを基軸とした手立てである．そこで以下では,このアプローチを「多様性伝達アプローチ」と呼ぼう．多様性伝達アプローチでは，[F3]のペアトークでの議論の内容が以下のどちらの場合であっても，クリティカルシンキングが誘発されると考えることができる．まず，二人の見解が一致していない場合は，異なる見解が目の前にあることで，自分の見解の「合理性」を今一度「批判」的に検証し,「反省」する機会となる．また，相手の見解を批判的に吟味する機会となる．これはクリティカルシンキングの３要素を満たしている．一方，二人の見解が一致している場合であっても，教室内において異なる見解が出ていることを教師より知らされているので，自分達の見解の「合理性」を今一度「批判」的に検証し,「反省」する機会となる．

[F2]や[F3]の段階で，教師が教室内のどの見解が正しい見解であるかについて価値判断をしていない（複数の見解が存在するという事実のみを伝えている）ので，たとえ二人の見解が一致していたとしても，自分達の見解が正しい見解であるのかをお互いに再度確認し合うという過程が発生する．見解が一致しない場合のみならず，見解が一致している場合であってもクリティカルシンキングを発揮することになるという点が，この多様性伝達アプローチの特色である．

[F2]の段階での個人への介入は，正しく問題の意味を把握していない生徒を支援する等，必要最小限に留める一方で，[F4]の段階では，ペアの議論を活性化させるため，積極的に介入する．例えば，二人の見解が一致して議論が終了してしまったペアには，教室内で生じた異なる見解が具体的にどんな見解であったかを紹介し，議論を促す．あるいは，教師がペアの見解に対して論駁を試み，自分達の見解の正しさについての，よりよい説明を考えるよう促す．

３．実践例

本節では，多様性伝達アプローチを活用した２つの実践例を示す．なお，本文中に示された［F1］～［F5］の記号は，前節で示した［F1］～［F5］に対応する．なお，授業者はいずれも筆者である．

(1) 一次方程式を手ぎわよく解く

簡単な一次方程式の解き方を学んだ後,「方程式を『手ぎわよく』解こう」と題して，学習活動を組織した．実際，当校が使用している数学の教科書では，一次方程式の解法手順を考える節において,「手ぎわよく」解くことが主題となっている．

その活動で扱われる問題に，以下のような「手ぎわよく」解くことが難しいと思われる問題を混ぜた［F1］．

$$\frac{5}{73}(4x-3)=\frac{125}{98}(4x-3)$$

$$\frac{4}{21}\left(\frac{5}{3}x-\frac{2}{7}\right)+2=x+\frac{4}{21}\left(\frac{5}{3}x-\frac{2}{7}\right)$$

個人解決を経た後，授業者が確認した限り，教室内で，どう工夫してよいか困惑している生徒や，律儀に展開して解いている生徒，パッと見て途中式なしで即座に答えのみを書き出した生徒などが現れた［F2］．すなわち，方程式の「解き方」について見解が分かれている状態であった．そこで授業者は，多様な解き方が教室中で見られる旨を全体に伝え，ペアトークへと移行した［F3］．ペアトークにおいては，例えば，面倒臭がらずに計算しさえすれば，方程式それ自体は，その気になれば解くことができるが，工夫の仕方がわからないと述べ合うペアや，1 つ目の方程式で $4x-3$ というまとまりに着目しているにもかかわらず，$\frac{5}{73}$ と $\frac{125}{98}$ という異なる数に同じ $4x-3$ を掛けて同じ数になるはずがない，と主張するペア（$4x-3=0$ の可能性を暗黙的に除外してしまっている）が現れるようになった．

授業者は，前者のタイプのペアには，一部の生徒達が $\frac{5}{73}$ と $\frac{125}{98}$ の両方に同じ数を掛けたら，等しくなる場合を探していた旨を伝え，$4x-3$ を 1 つのまとまりとして見ることを促した［F4］．また，後者のタイプのペアは，最初，$4x-3$ は 0 ではないから等しくならないと言い張っていた．そのため授業者は，そうしたペアに対しては，「x にどんな値を代入しても 0 にはならないのか？」と問うた［F4］．そのペアは，問われた直後，二人ともしばらく目を丸くしていたが，ほどなくして，声を揃えて「あ，あった〜」と解の存在に気付いたようであった．

なお，図 1 は，後者のペアの内の 1 人がワークシートに書き込んでいた内容である．1 つ目の方程式を，最初は展開して解いており，あとからヒューリスティックに解決する方法に気付いた様子がうかがえる．この生徒は，2 つ目の方程式に関しても，最初は展開して解こうとしていたようである．

その後，授業としては，アルゴリズムではない解き方をした生徒を中心に指名して板書させ，全体で解法を共有して終了した［F5］．数学的な厳密さという観点では，こうしたヒューリスティックな解決法を採用する場合，この方程式の解が確かに高々1 つしかないことを確認すべきである．しかし，中学校 1 年生であるという学齢を鑑み，今回，その点については教師が簡単に紹介するのみに留め，学習者達にそこまでの説明は求めなかった．

(2) 反比例の応用

反比例の応用として，長方形の面積の最大化問題に取り組ませた．ただし，教室内で複数の見解が発生するように，問題文にわざと解釈の余地を残した問題提示を行った［F1］．具体的には，図 2 のように提示した．図 2 の「こんな風」の部分は，実際に口頭で「こんな風」と言いながら，黒板上で実演しながら示した．長方形を作る際，長方形の辺が軸と平行（あるいは，垂直）になっているかどうかは，あえて確認しなかった．このときの,「こんな風」が，長方形の辺が軸と平行であることを含意しているなら，長方形の面積は点 A の取り方に依らず 32 で一定であるが，長方形の辺の引き方に制約がないならば，対角線を長く取れば取るほど，いくらでも大きな長方形を作ることができる．この問題提示の仕方ならば，この点で，生徒達の見解が分かれることが予想される．

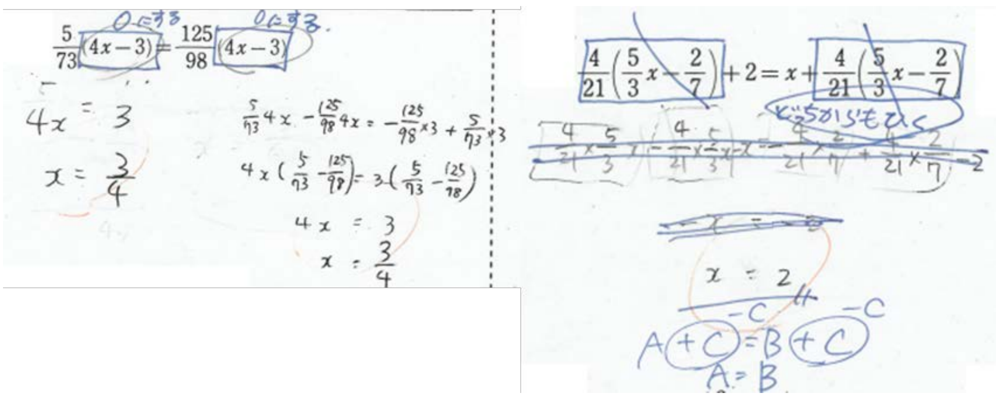

図 1: アルゴリズムによる解法からヒューリスティックスによる解法へ移行した生徒のワークシート

まず，$y=\frac{8}{x}$ のグラフがある（図 3 [A]）．次に，グラフ上の適当な場所に点 A を取り，点 A から原点に向かって直線を伸ばし，その直線が新たにグラフと交わったところを点 B とする（図 3 [B]）．そして，AB が対角線となるように，「こんな風」に長方形を作る（図 3 [C]）．今，人によって点 A を打った場所が違うので，いろんな大きさの長方形ができたかもしれないが，この長方形の面積が一番大きくなるのはどんなときか？

図 2: 反比例の応用問題

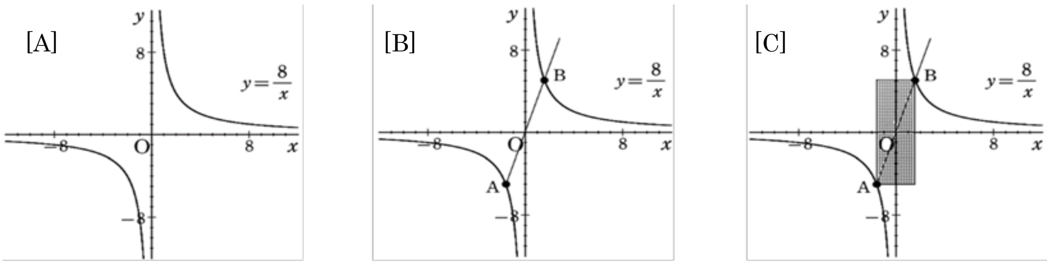

図 3: 反比例の応用問題の出題方法

まずは個人解決に取り組ませた [F2]. 多くの生徒達が，様々な位置に点Aを取って面積を調べる中で, 口々に「これ，いつでも同じになるんじゃない？」と言い始めた．個人解決の机間支援において，教師にそのことを伝えてきた生徒達には,「へ～，同じになるのか」と応じ，相手の発言を受け止めるに留めた．ただし，それでもなお食い下がって「絶対同じになりますよ」と伝えてきた生徒には,「え，そうなの？ 何で？」ととぼけた調子で理由を尋ねた. 実際, 帰納的な説明に留まる生徒も散見され，必ずしも $xy=8$ に着目している生徒ばかりではないようであった．

そうしたやり取りを行いながらであったため，机間を一巡するのに多少時間を要したが，その間に,「正方形のときが一番大きい」や「いくらでも大きくできる」と言い出した生徒が現れた．この授業は，2 クラスで実施され，各クラスで 2 名および 3 名，合計 5 名の生徒から，この内容の発言を確認した．そこで，この発言が確認されたタイミングで，面積がいつでも同じになると主張する生徒と，いくらでも大きくなると主張する生徒が教室内に両方存在する旨を全体に伝え，ペアトークへ移行した [F3]．$xy=8$ に気付いていた生徒達も含めて，改めて自分達の見解の妥当性を振り返るペアが大勢となった．そのうち，何か見落としがあるのかもしれないと考え始めた一部の生徒達が，様々な試行錯誤を試みていたが，授業者が近くを通りかかると,「先生，どう頑張っても無理ですよ」と訴えてくるようになった．しかし，そうした中でも，長方形の辺の引き方に自由度があると気付いている生徒は,「たぶん正方形のときが一番大きい」と発言していた．その発言を後ろで聞いていた別のペアは，その発言が「対角線の長さが固定されていれば」という条件付きの発言であることを踏まえずに，辺が軸と平行な正方形を他にも複数かいてみて（もちろん，32 で一定のままであり），混乱する様子も見られた．惜しむらくは，中学 1 年生は，円周角の定理の逆やそれに類する定理を知らないため，対角線の長さが等しい四角形は，正方形のときに面積が最大になるということを説明することができない．自分の気付きを明瞭に言語化できないという点が，議論を膠着させていたように思われる．

そこで面積をいくらでも大きくできると主張した生徒を一人示して，面積が 32 を超える長方形をどのようにしてかいたのか, 黒板で例示させた [F5]. その生徒が，軸と平行でないような辺の引き方をして正方形をかいたため, かかせた直後から, 授業者が発問するまでもなく，生徒達は自然とペアで，軸と平行でないような辺のかき方をしてよいのかを巡って議論し始めた．しばらくして授業者は,「先生は最初に『こんな風』に辺を引くと言ったけど，それってどんな風なのかな？」と問うた．この問いかけに対しては，考え込んでしまう生徒が大勢であった．そのため授業者は追加で,「『こんな風』の捉え方次第で，どっちの考え方もできるよね．じゃあ，辺の引き方が軸と平行な場合とそうでない場合に分けて，それぞれ面積がどんなときに一番大きくなるか説明してみよう」と投げかけた．そこから場合分けに基づく説明を各自構成する活動へと移行した．授業としては，その後，全体で各場合の説明を構成して終了した．

４．考察

きちんとした科学的な研究方法論に基づいた実証的

な効果検証が今後必要ではあるものの，今回の実践を経て，筆者は，多様性伝達アプローチには少なくとも 3 つの効果が期待できるという手応えを得た．第一に，第 2 節にてクリティカルシンキングとの関係で論じたように，多様性伝達アプローチにおけるペアトークは，ペアの見解が一致するかどうかにかかわらず，教師が教室内に複数の見解が生じていることを伝えなかった場合と比較して，活性化されるように思われた．2 人の見解が一致していたとしても,「これ以外にどんな方程式の解き方があるのだろう？」や「どうすれば面積 32 以外の長方形がかけるのだろう？」という風に，自分達の見解と異なる見解として，どんな見解があり得るかを 2 人で考察する様子が見られた．多様性伝達アプローチには，ペアトークに間接的に論題を与えることに寄与していると考えられ，上ヶ谷（2015）が示した「数学指導の間接性」の効果が期待される．

第二に，多様性伝達アプローチでは，自分の見解を言葉にする学習者の心理的抵抗感を低減する効果が期待できる．この効果が期待される主な理由としては，2 つ考えられる．1 つは，教室全体での議論で指名される場合に備えて，今のうちにペアと意見交換をして安心感を得ておきたいというモチベーションが生徒達に働くことである．全体で見解を発表させる前に一段階ペアトークを挟む形態であることが，この効果をもたらし得る．もう 1 つは，教室内で複数の見解が存在するという事実を教師から伝えられることが，誤っている（かもしれない）者が自分だけではないという安心感をもたらすことである．言語化することを通じて概念化が促進されるという最近の研究成果（Hildebrandt & Musholt, in press; Uegatani & Otani, in press）を踏まえると，多様性伝達アプローチを用いて授業中に生徒が自分の考えを言語化しやすい状況を構築できるとすれば，それは，そうした概念化促進という観点からも望ましいと言える．

第三に，多様性伝達アプローチでは，生徒に対して，難問であっても果敢に挑戦する姿勢を与える効果が期待できる．例えば，自分よりも最適な答え（面積 32 より大きな長方形）を，同級生が見出しているかもしれないという情報を聞くと，悔しさや焦りを感じる生徒もいるようであった．与えられた問題が，自分達にとって難し過ぎるわけでも簡単過ぎるわけでもないということが，生徒達の問題解決のモチベーションを喚起していると見ることができる．構成主義の架橋理論では，Harel（2013）のように認識論的観点での議論は多い一方で，心理学的観点での議論，とりわけ，生徒達のモチベーションの分析は十分になされていない．多様性伝達アプローチは，そうした心理学的観点での分析の実現可能性に示唆を与えていると考えられる．

総合的に見て，多様性伝達アプローチは，問題文に対する解釈が現実に多様であることと，その多様性が，今，教室にいる学習者達の知識で実現され得ることを伝達している．例えば，方程式をアルゴリズムで解く際の式の見方と，ヒューリスティックで解く際の式の見方は異なる．また，反比例の応用問題については，そもそもの問題文が曖昧であり，多様な解釈の余地がある．そして，これらの解釈は，現実にその教室内で生じており，その学齢では思いつき得ないような突飛な解釈ではない．

実践の側から理論への接続を考えるとき，この点は重要であろう．例えば，序論でも引用した数学教育におけるユーモア利用の研究（Van Dooren et al., 2019; 服部・上ヶ谷, 2019）は，教師がユーモアを通じて問題文の解釈の多様性を伝達するという教育的な手立ての有効性を示している．そういう意味で多様性伝達アプローチは，大きく分ければ，ユーモア利用と同じで，問題文解釈の多様性を伝達する教育的手立てである．ユーモア利用との違いを挙げるとすれば，解釈の多様性を担保するために，教師が用意した解釈ではなく，生徒が提起した解釈を利用する点にある．

解釈の多様性が鍵となる既存の構成主義の架橋理論としては，例えば，Tall (2011) のクリスタリン・コンセプト論がある．同一性や同値性に基づく記号や式，命題の認知的な変形を説明するこの理論においては，同じ対象を異なる方法で表現したり，同じ表現を異なる対象に結びつけたりといった思考が重要視される．そのため，今後は，多様性伝達アプローチやユーモア利用を通じて，Tall（2011）の重視するこの種の思考の促進を検討したり，逆に，解釈の多様性という視点からこの種の思考を促進する新しい実践的アプローチを考案したり，といったことが，理論と実践の往還という点で研究上重要になっていくであろう．

５．結論

本稿は，実践の側から理論との接続を考えるための，1 つの資料提供を目的として，上ヶ谷（2017）での報告を再構成する形で,「多様性伝達アプローチ」を用いた 2 つの授業実践を考察した．多様性伝達アプローチとは，クリティカルシンキングと数学指導の間接性という理論的アイディアに示唆を得て考案された教育的手立てである．考察の結果，多様性伝達アプローチは，ユーモアを利用した数学教育と同じ構造を有したアプローチとして捉えられることが明らかとなった．また，解釈の多様性を重視する構成主義の架橋理論の 1 つ, Tall (2011) のクリスタリン・コンセプト論との接続によって，今後の新

しい研究の可能性を示唆した．

今後の課題は 2 点ある．1 つは，多様性伝達アプローチの効果をより科学的に検証していくことである．授業者の手応えとしては, [F3] で解釈の多様性の存在を教室に伝えるにしても，例えば，多様であることに価値があるのか, 多様なうちのいずれかが誤りであるのか, など, どういったニュアンスで伝えるのかによって効果が異なりそうである．もう 1 つは，Tall (2011) との接続をより一層強固にすることである．そうすることによって，数学だからこその多様性伝達アプローチの効果性が明確になっていくものと考えられる．

註

1) 上ヶ谷 (2017) では,「事実伝達アプローチ」という呼称を用いていたが，その後の考察で,「多様性伝達アプローチ」という呼称がより適切であると考えた．本稿では後者の呼称を用いる．

引用・参考文献

Confrey, J., & Kazak, S. (2006). A thirty-year reflection on constructivism in mathematics education in PME. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 305–345). Sense Publishers.

Harel, G. (2013). Intellectual Need. In K. R. Leatham (Ed.), *Vital Directions for Mathematics Education Research* (pp. 119–151). Springer New York.

服部裕一郎・上ヶ谷友佑 (2019). 「数学的活動を真正にするためのユーモアの役割」．『日本科学教育学会研究会研究報告』, *34*(3), 59–64.

Hildebrandt, F., & Musholt, K. (in press). Teaching Rationality—Sustained Shared Thinking as a Means for Learning to Navigate the Space of Reasons. *Journal of Philosophy of Education*.

道田泰司 (2015). 「近代知としての批判的思考」．楠見孝・道田泰司 (編), 『批判的思考：21 世紀を生きぬくリテラシーの基盤』 (pp. 2–7). 新曜社.

Ruthven, K., & Goodchild, S. (2008). Linking researching with teaching: Towards synergy of scholarly and craft knowledge [revised and extended version]. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (Second Edition, pp. 561–588). Routledge.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114–145.

Simon, M. A. (2017). Explicating mathematical concept and mathematicalconception as theoretical constructs for mathematics education research. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(2), 117–137.

Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 91–104.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K., & Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 305–329.

Tall, D. (2011). Crystalline concepts in long-term mathematical invention and discovery. *For the Learning of Mathematics*, *31*(1), 3–8.

上ヶ谷友佑 (2015). 「予想すること」に関する数学的な暗黙知の教授可能性. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』(第 48 回秋期研究大会特集号), *97*, 25–32.

上ヶ谷友佑 (2017). 「クリティカルシンキングを誘発する数学科授業の構成方法について」. 広島大学附属福山中・高等学校 2017 年度公開教育研究会 数学科分科会 当日発表資料.

上ヶ谷友佑 (2019). 「数学的活動における 2 つの存在論的問題—クワインの存在論から見た認識論的アプローチと社会・文化的アプローチの対比—」. 『日本教科教育学会誌』, *42*(1), 45-56.

Uegatani, Y., & Otani, H. (in press). A new ontology of reasons for inferentialism: Redefining the notion of conceptualization and proposing an observer effect on assessment. *Mathematics Education Research Journal*.

Van Dooren, W., Lem, S., De Wortelaer, H., & Verschaffel, L. (2019). Improving realistic word problem solving by using humor. *The Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 96–104.

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. The Flamer Press.

Wittmann, E. C. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 1–20.