広島大学附属福山中・高等学校
中等教育研究紀要　第37巻

「数学的な考え方を育てる教材の開発」

—積分を使って立体の体積を楽しく求める—

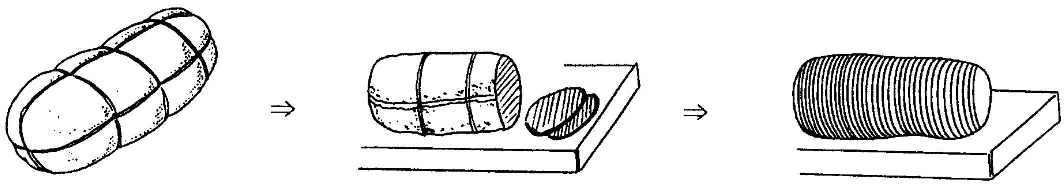
入川　義克

小学校や中学校では、三角形・四角形・円などの平面図形の面積や角柱・角錐・球などの立体図形の体積を求めてきた。しかし、面積や体積を求めるこれらの公式が、どのように導きだされたかを知るのは、高等学校で積分を習ってからである。ここでは、「平面スライス型分割」を土台に、教科書にはない楽しい求積のアイディア「バームクーヘン型分割」「雪だるま型分割」「とんがり帽子型分割」などの考え方を使って、いろいろな立体図形の体積を求めていく。

ここで紹介する内容は、集中講義「空間図形と微積融合問題を斬る」の中で空間図形と微積融合問題を攻略しその弱点を補強するために実施した演習の時間に扱ったものである。「導関数の定義」と「はさみうちの原理」を基礎にして、求積公式を導き、いろいろな切り口から求積問題に迫ることで、どんな問題にも対処できる実力をつけていく教材の開発をめざしている。

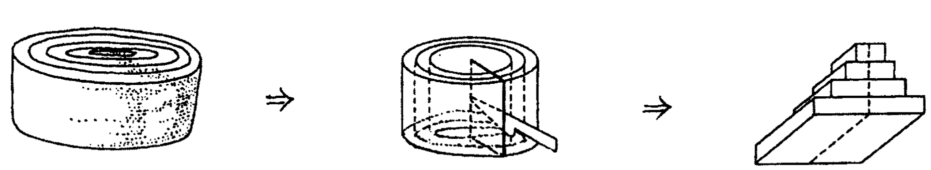
1．立体の体積を求めるいろいろな考え方

《A》平面スライス型分割による方法



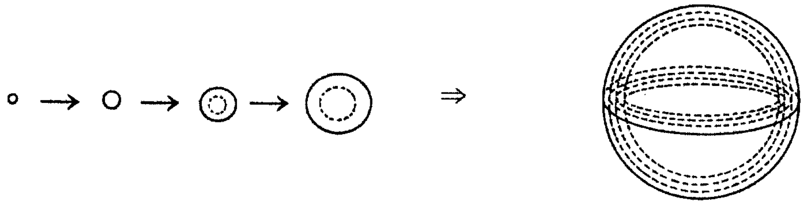
ハムの塊をうすくスライスして、その１枚ずつのスライスの体積を微小体積（断面積×厚さ）として求め、その総和として体積を求める。

《B》バームクーヘン型分割による方法



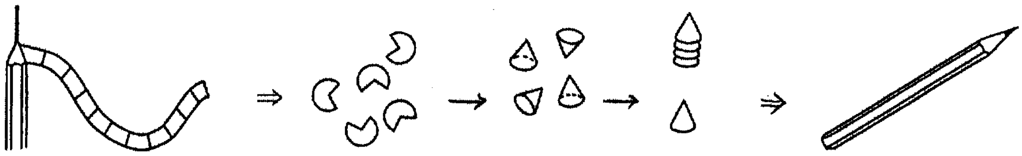
バームクーヘンに切り込みを入れて１枚ずつはがし、その１枚ずつの年輪の体積を直方体の微小体積（長方形の面積×厚さ）として求め、その総和として体積を求める。

《C》雪だるま型分割による方法



雪だるまを作るように球の表面に皮膜を１枚ずつ張りつけ、その１枚ずつの皮膜の体積を球面の微小体積（球の表面積×厚さ）として求め、その総和として体積を求める。

《D》とんがり帽子型分割による方法

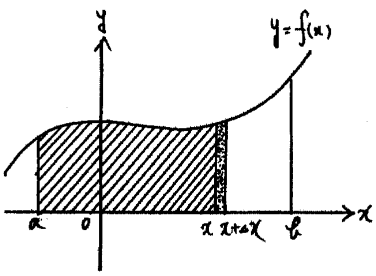


鉛筆を鉛筆削りで削るとき、１周分の削りかすは扇形になるので、その１枚ずつの扇形の体積を微小体積（扇形の側面積×厚さ）として求め、とんがり帽子状に重ねて、その総和として体積を求める。

2．いろいろな公式を導くときの基本となる考え方

体積の公式を導く前に、「導関数の定義」にもどって、$\int_a^b f(x)\,dx$ が曲線 $y=f(x)$ と x 軸及び x 軸に垂直な直線 $x=a$、$x=b$ によって囲まれた図形の面積であることを確認する。

（ただし、$a \leqq x \leqq b$ において $f(x) \geqq 0$ とする）



斜線部分の面積は、x の関数で $S(x)$ とおける。

このとき、x の増分を Δx とすると、

i）$\Delta x>0$ のとき、

$[x,\ x+\Delta x]$ における $f(x)$ の最大値と最小値をそれぞれ

$f_M(x)$，$f_m(x)$ とすれば

$\Delta x \cdot f_m(x) \leqq S(x+\Delta x)-S(x) \leqq \Delta x \cdot f_M(x)$

$$\Delta x>0 \text{ だから } f_m(x) \leqq \frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x} \leqq f_M(x) \text{ が成り立つ。}$$

ここで、$\lim_{\Delta x \to 0} f_m(x)=f(x)$，$\lim_{\Delta x \to 0} f_M(x)=f(x)$ だから、はさみうちの原理より

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}=f(x) \cdots (※1)$$

ii）$\Delta x<0$ のときは、$[x+\Delta x,\ x]$ において、$S(x)-S(x+\Delta x)$ として考えると、

（※1）の式が求められる。

したがって、$S'(x)=f(x)$　$\therefore S(x)=\int f(x)\,dx=F(x)+C$ とおくと

$S(a)=F(a)+C=0$ より、$C=-F(a)$

以上のことより、$S(b)=F(b)+C=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$ である。

はさみうちの原理の所で、積分の平均値の定理を使ってもよいが、体積の公式を求めるときの考え方につなぐ為に、ここでは、はさみうちの原理を使った。

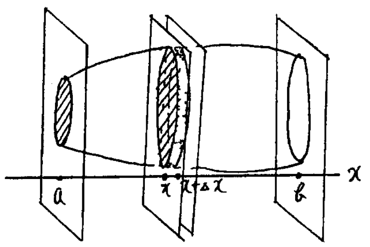
《A》平面スライス型分割によって体積を求める

軸に垂直な平面 $x=a$、$x=b$ によって囲まれた立体の体積は、$V(x)=\int_a^b S(x)\,dx$

であることを導く。（ただし、$S(x)$ は、目盛 x を通る軸に垂直な平面で立体を切断したときの切断面の面積である）

図のように、軸に垂直な平面 $x=a$ と目盛 x の点を通り軸に垂直な平面で囲まれた立体の体積は、

xの関数で$V(x)$とおける。



このとき、xの増分をΔxとすると、

i) $\Delta x > 0$のとき、

$[x、x+\Delta x]$における$S(x)$の最大値と最小値をそれぞれ

$S_M(x)$, $S_m(x)$とすれば

$\Delta x \cdot S_m(x) \leqq V(x+\Delta x) - V(x) \leqq \Delta x \cdot S_M(x)$

$\Delta x > 0$だから$S_m(x) \leqq \dfrac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x} \leqq S_M(x)$が成り立つ。

ここで、$\lim\limits_{\Delta x \to 0} S_m(x) = S(x)$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} S_M(x) = S(x)$だから、はさみうちの原理より

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x} = S(x) \cdots (※2)$$

ii) $\Delta x < 0$のときは、$[x+\Delta x、x]$において、$V(x) - V(x+\Delta x)$として考えると、(※2) の式が求められる。

したがって、$V'(x) = S(x)$　$\therefore V(x) = \int S(x)\,dx = F(x) + C$とおくと

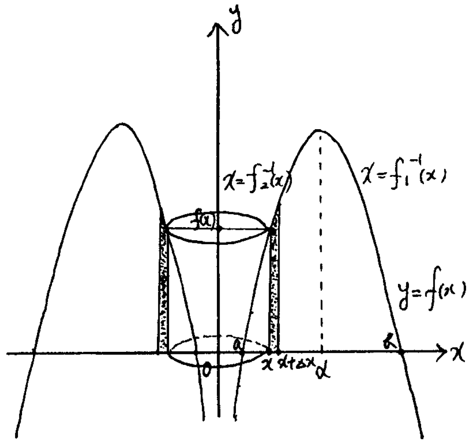
$V(a) = F(a) + C = 0$より、$C = -F(a)$

以上のことより、$V(b) = F(b) + C = F(b) - F(a) = \int_a^b S(x)\,dx$である。

図形の面積や立体の体積の公式を求めるこの考え方は、「バームクーヘン型分割」「雪だるま型分割」「とんがり帽子型分割」によって、立体の体積を求める場合にも、同様に適用できる。

《B》バームクーヘン型分割によって体積を求める

図のような、曲線：$y = f(x)$とx軸で囲まれる領域をy軸のまわりに回転させたときにできる回転体の体積は、$y = f(x)$より



$$x = \begin{cases} f_1^{-1}(x) & (x \geqq \alpha) \\ f_2^{-1}(x) & (x \leqq \alpha) \end{cases}$$

を求めてy軸のまわりに回転させて求めることになる。

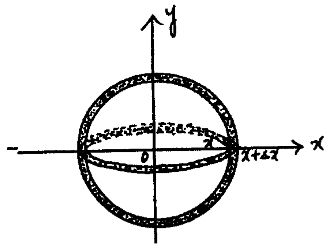
バームクーヘン型分割によれば、原点中心、半径xの円を底面とし、高さが$f(x)$の円柱の体積は、xの関数で$V(x)$とおける。このとき、xの増分をΔxとすると、

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x} = 2\pi x \cdot f(x) \text{ より}$$

$V(x) = 2\pi\int_a^b x \cdot f(x)\,dx$である。

《C》雪だるま型分割によって体積を求める

半径 r の球の体積は、半径 r の円：$x^2+y^2=r^2$ を x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積として求められる。雪だるま型分割によれば、原点中心、半径 x の球の体積は、x の関数で



V(x) とおける。このとき、x の増分を Δx とすると、

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{V(x+\Delta x)-V(x)}{\Delta x}=4\pi x^2 \text{より}$$

$$V(x)=4\pi\int_0^r x^2\,dx=\frac{4}{3}\pi r^3$$

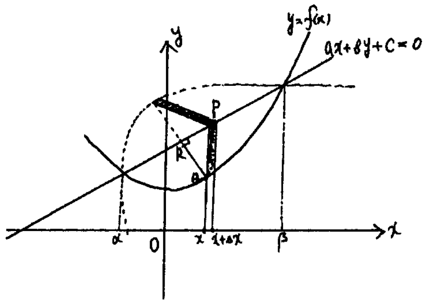
ここで、球の表面積 $4\pi x^2$ は、円の上半分：$y=\sqrt{r^2-x^2}$ を x 軸のまわりに回転させた回転体の側面積として、

$$S=2\pi\int_{-r}^{r}y\sqrt{1+\left\{\frac{dy}{dx}\right\}^2}\,dx$$ から求めることになる…！（この式は、回転体の側面積の所で導く）

《D》とんがり帽子型分割によって体積を求める

座標軸とは異なる直線のまわりに回転させた回転体の体積を求めるときに有効である。

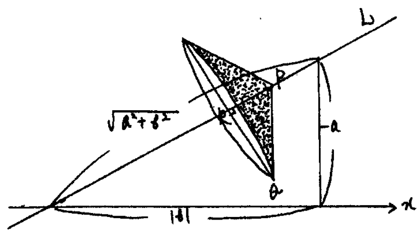
図のような、曲線C：$y=f(x)$ と直線L：$ax+by+c=0$ $(b\neq 0)$ で囲まれる領域を、この直線Lのまわりに回転させたときにできる回転体の体積は、とんがり帽子型分割によれば、



次のように求められる。

$(x,\ 0)$ を通り、x 軸に垂直な直線と直線Lおよび曲線Cとの交点を、それぞれP、Qとする。

線分PQを直線Lのまわりに回転するとき、Qから直線Lに下ろした垂線の足をRとすると、中心R、半径QRの円を底面としPを頂点とする円錐の側面積を S(x)、とんがり帽子までの体積は x の関数で、V(x) とおける。



このとき、x の増分を Δx とすると、

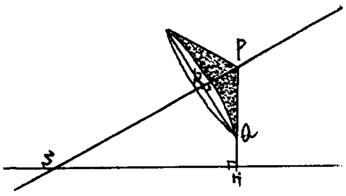
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{V(x+\Delta x)-V(x)}{\Delta x}=S(x)$$

$$\therefore\quad V=\int_\beta^\alpha S(x)\,dx$$

（α、βは、曲線C：$y=f(x)$ と直線L：$ax+by+c=0$ $(b\neq 0)$ の交点の x 座標）

ここで、$S(x)=\pi\cdot PQ^2\times\dfrac{2\pi\cdot QR}{2\pi\cdot PQ}=\pi\cdot PQ\cdot QR$

直線Lの傾きが、$-\dfrac{a}{b}$で、$\triangle PQR \backsim \triangle PSH$（直線L、直線PQとx軸との交点をそれぞれS、Hとする）より、



$PQ : QR = PS : SH \quad \therefore PQ : QR = \sqrt{a^2+b^2} : |b|$

$\therefore QR = \dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} PQ$

したがって、$S(x) = \dfrac{\pi |b|}{\sqrt{a^2+b^2}} PQ^2 = \dfrac{\pi |b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \left\{-\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b} - f(x)\right\}^2$

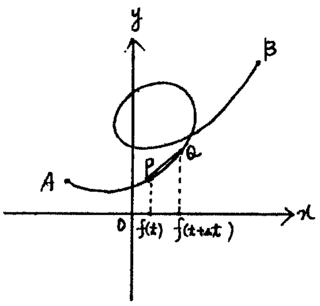
$= \dfrac{\pi}{|b|\sqrt{a^2+b^2}} \{ax + b \cdot f(x) + c\}^2$だから

$V = \dfrac{\pi}{|b|\sqrt{a^2+b^2}} \displaystyle\int_\alpha^\beta \{ax + b \cdot f(x) + c\}^2 dx$である。

☆曲線の長さ、回転体の側面積、極座標で表された関数の面積を求める。

tを媒介変数として $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$で表される曲線の長さLは、

$L = \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\, dt$であることも次のように求められる。



曲線上の点A$(f(\alpha), g(\alpha))$から点P$(f(t), g(t))$までの曲線の長さは、tの関数で$L(t)$とおける。

このとき、tの増分をΔtとすると、

i) $\Delta t > 0$のとき、

点P$(f(t), g(t))$から点Q$(f(t+\Delta t), g(t+\Delta t))$までの曲線の長さは，線分PQの長さで近似できる。

$L(t+\Delta t) - L(t) \fallingdotseq \sqrt{\{f(t+\Delta t) - f(t)\}^2 + \{g(t+\Delta t) - g(t)\}^2}$

両辺をΔtで割ると

$$\frac{L(t+\Delta t) - L(t)}{\Delta t} \fallingdotseq \sqrt{\left\{\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}\right\}^2 + \left\{\frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t}\right\}^2}$$

$\Delta t \to 0$のとき、　$L'(t) = \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} \cdots$（※3）

ii) $\Delta t < 0$のときは、$[t, t+\Delta t]$において、$L(t) - L(t+\Delta t)$として考えると、（※3）の式が求められる。

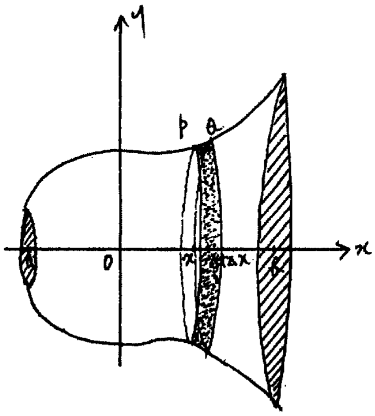
したがって、$L(t) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\, dt$である。

曲線が$y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$で与えられているときは、$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$ $(a \leqq t \leqq b)$

と考えれば、$L=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{1+\left\{\dfrac{dy}{dx}\right\}^2}\,dx$ である。

また、$a\leqq x\leqq b$ において、$f(x)\geqq 0$ とする。図のような曲線 $y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ を x 軸のまわりに回転してできる回転体の側面積Sは、

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left\{\frac{dy}{dx}\right\}^2}\,dx$$ であることを導く。



x 軸に垂直な平面 $x=a$ と点 $(x,\ 0)$ を通り軸に垂直な平面で囲まれた回転体の側面積は、x の関数で $S(x)$ とおける。
このとき、x の増分を Δx とすると、

i) $\Delta x>0$ のとき、
曲線上の点 $P(x,\ f(x))$ と点 $Q(x+\Delta x,\ f(x+\Delta x))$ を結ぶ線分PQを斜高とし、上底、下底の半径がそれぞれ、$f(x)$ $f(x+\Delta x)$ の円錐台の側面積で近似できる。

$$S(x+\Delta x)-S(x)\fallingdotseq\frac{1}{2}\{2\pi\cdot f(x)+2\pi\cdot f(x+\Delta x)\}\cdot PQ$$

$$\therefore S(x+\Delta x)-S(x)\fallingdotseq\pi\{f(x)+f(x+\Delta x)\}\cdot\sqrt{(\Delta x)^2+\{f(x+\Delta x)-f(x)\}^2}$$

両辺を Δx で割ると

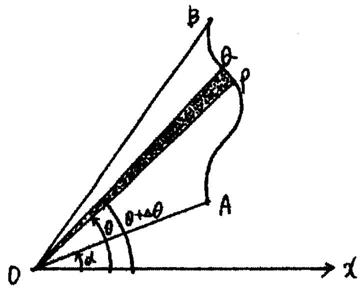
$$\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}\fallingdotseq\pi\{f(x)+f(x+\Delta x)\}\cdot\sqrt{1+\left\{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right\}^2}$$

$\Delta x\to 0$ のとき、$S'(x)=2\pi f(x)\cdot\sqrt{1+\left\{\dfrac{df(x)}{dx}\right\}^2}$ … (※4)

ii) $\Delta x<0$ のときは、$S(x)-S(x+\Delta x)$ として考えると、(※4) の式が求められる。

したがって、$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left\{\dfrac{dy}{dx}\right\}^2}\,dx$ である。

極座標で表された曲線C：$r=f(\theta)$ $(\alpha\leqq\theta\leqq\beta)$ において、$A(r_1,\ f(\alpha))$、$B(r_2,\ f(\beta))$ 及び基点Oとする。このとき、$P(r,\ f(\theta))$ として、OAとOP及び曲線Cで囲まれた図形の面積は、θ の関数で $S(\theta)$ とおける。



$$S(\theta+\Delta\theta)-S(\theta)\fallingdotseq\frac{1}{2}r^2\Delta\theta \text{ より}$$

$$\frac{S(\theta+\Delta\theta)-S(\theta)}{\Delta\theta}\fallingdotseq\frac{1}{2}r^2$$

$\Delta\theta\to 0$ のとき、$S'(\theta)=\dfrac{1}{2}r^2$

したがって、$S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta$ である。

3．求積問題を斬る

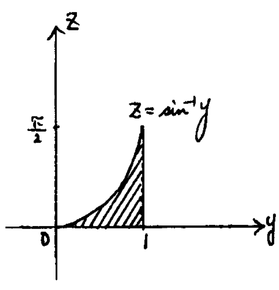
今まで考えてきたことを使って、立体の体積を求める良問と思われる問題を挙げておく。解法のおもしろさを楽しむことができる。

（1）どの座標軸に垂直にスライスするか見抜け

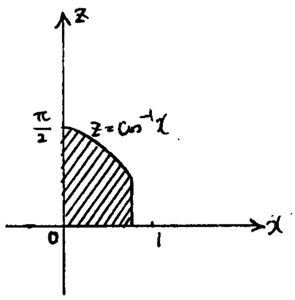
★ｘｙｚ空間の４点（$0,\ 0,\ 0$）、（$\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0$）、（$\cos\theta,\ \sin\theta,\ \theta$）、（$0,\ 0,\ \theta$）を頂点とする長方形を R_θ とし、θ が０から $\dfrac{\pi}{2}$ まで変化するとき、R_θ が動いてできる立体の体積を求めよ。

立体をどのような平面でスライスすれば、切断面の面積が簡単に求められ、かつ積分し易い関数がでてくるかを見抜くことが解法の鍵。ｘ軸、ｙ軸、ｚ軸に垂直にスライスした場合とｚ軸を含む平面でスライスした場合などが考えられる。

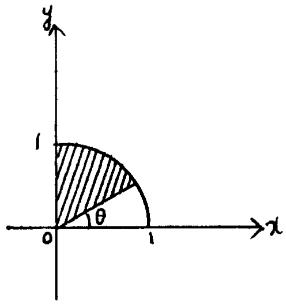
ｘ軸に垂直な平面で切断



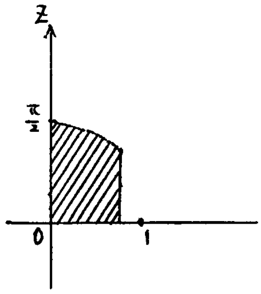
ｙ軸に垂直な平面で切断



ｚ軸に垂直な平面で切断



ｚ軸を含む平面で切断

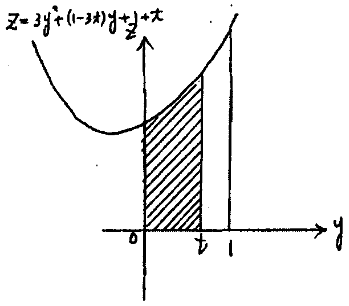


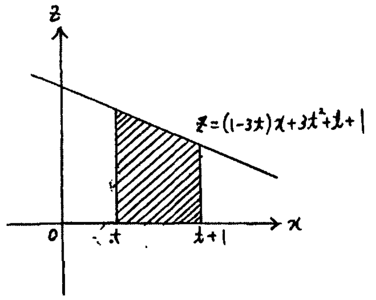
★ｘｙｚ空間において、不等式

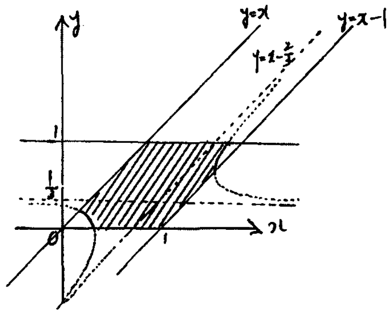
$0\leqq y\leqq 1$、$y\leqq x\leqq y+1$、$0\leqq z\leqq 1+x+y-3(x-y)y$ のすべてを満足するｘ、ｙｚを座標にもつ点全体がつくる立体の体積を求めよ。

座標軸に垂直に切断するとき、その座標軸の文字を固定して、切断面の面積を求めるということだから、次数の高い文字を固定することから考えていく。

x軸に垂直な平面で切断　　y軸に垂直な平面で切断　　z軸に垂直な平面で切断

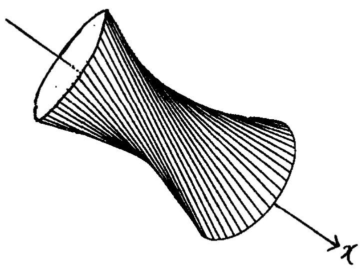






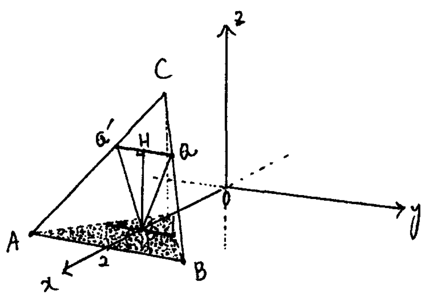
（2）回転させて切断するか切断して回転させるか見極めよ

★Oを原点とするｘｙｚ空間にA$\left(0,\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$、B$\left(\cos\theta,\ \dfrac{1}{2},\ \sin\theta\right)$がある。点Bからｘ軸に下ろした垂線の足をCとする。（ただし、$0<\theta<\dfrac{1}{2}\pi$）このとき、折れ線OABCをｘ軸のまわりに１回転してできる曲面で囲まれた立体の体積をθを用いて表せ。



軸とねじれの位置にある直線を、その軸のまわりに回転したときにできる曲面は左図のような形になり回転一葉双曲面という。

★ｘｙｚ空間に３点A(２，－１，０)、B(２，１，０)、C(１，０，$\sqrt{3}$)をとる。このとき、△ABCをｘ軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。



△ABCをｘ軸のまわりに回転させるとき、ｘ軸に垂直な平面で△ABCを切断すると、ｘ軸に垂直な線分を回転させることになる。回転の中心から最も近い点と最も遠い点を半径とする２つの円にはさまれた図形（円環形）が切断面である。

図において、回転体の切断面の面積をS（ｘ）とおくと

S（ｘ）$=\pi\cdot PQ^2-\pi\cdot PH^2=\pi\cdot QH^2$を積分することになる。

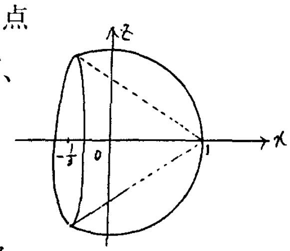
ある平面上の図形Cを直線Lのまわりに回転してできる立体の体積をVとし、Lに垂直な断面で図形Cを切ったその切り口が線分QRのとき、Lを含みQRに平行な平面をαとすると、

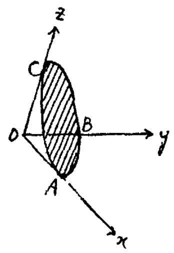
V＝（図形Cの平面α上への正射影C′をLのまわりに回転してできる立体の体積）

は知っておくと便利

★ｘｙｚ空間における３点をA（1，0，0）、B（0，1，0）、C（0，0，1）とする。A、B、Cを通る円によって囲まれる円板をｘ軸のまわりに回転したときにできる回転体の体積を求めよ。

この円板が、O（0，0，0）を中心とする半径１の球を３点A、B、Cを通る平面で切断した切断面であることに気づけば、球の１つの直径のまわりに球の一部分を回転させると球面上を動くことから回転体の概形も見えてくる。

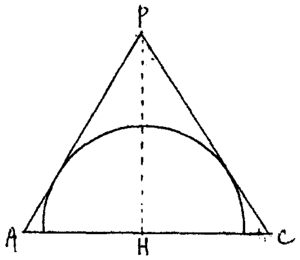




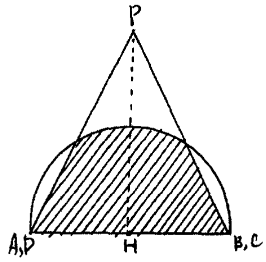
（3）断層写真のようにいろいろな角度から立体を切断してみる

★正四角錐（正方形を底面とし、その各辺を底辺とする４つの合同な二等辺三角形と底面とで囲まれる図形）Vに対し、その底面上に中心をもち、そのすべての辺と接する球がある。底面の１辺の長さをａとするとき、球と正四角錐Vとの共通部分の体積を求めよ。

平面PACで切断



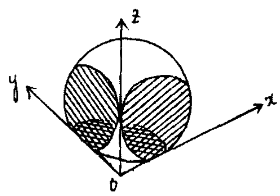
POを含みABに平行な平面で切断



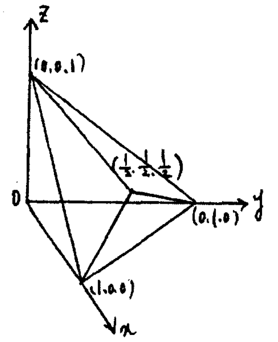
（4）立体の対称性を考えてその一部を取り出して考える

★座標空間内にｘ軸、ｙ軸、ｚ軸のすべてに接する半径１の相異なる球が８個ある。これらの８個の球の表面および内部の点よりなる領域をそれぞれS_1、S_2、S_3、S_4、S_5、S_6、S_7、S_8で表すとき、これらの領域の和集合$S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_5\cup S_6\cup S_7\cup S_8$の体積を求めよ。

$x\geqq 0$、$y\geqq 0$、$z\geqq 0$の部分の概形を書いておく。



★ $\begin{cases} |x| + |y| \leqq 1 \\ |y| + |z| \leqq 1 \\ |z| + |x| \leqq 1 \end{cases}$ を満たす点（x，y，z）の集合からなる立体の体積を求めよ。



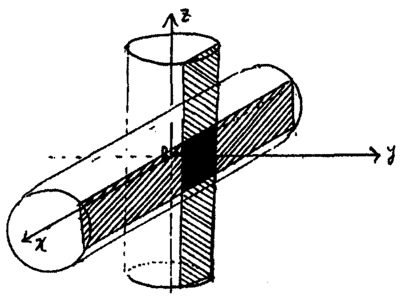
$x \geqq 0$、$y \geqq 0$、$z \geqq 0$ の部分で考えることになるが、立体の概形が分かれば、積分しなくても立方体の体積と四角錐の体積または三角錐の体積などで求められる。

★ $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqq a^2 \\ y^2 + z^2 \leqq a^2 \\ z^2 + x^2 \leqq a^2 \end{cases}$ を満たす点（x，y，z）の集合からなる立体の体積を求めよ。

$x \geqq 0$、$y \geqq 0$、$z \geqq 0$ の部分で考える。前の問題がヒントになる。この問題を解く前に

$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqq a^2 \\ y^2 + z^2 \leqq a^2 \end{cases}$ を満たす点（x，y，z）の集合からなる立体の体積を求めるとよい。

※この立体は、アルキメデスの立体と呼ばれ、教科書では２本の軸に平行な平面で切断して、その切断面の面積を積分する解法で解いているが、この解法だけでは、この問題を解くことはできない。



（５）バームクーヘン型積分を使ってみよう

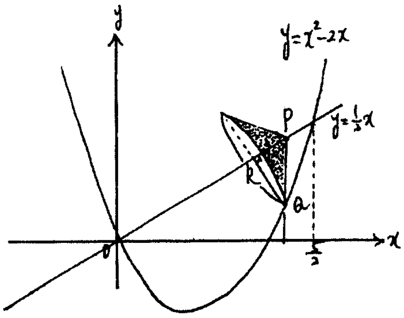
★$y = -3x^2 + 4x$ と x 軸で囲まれた図形を y 軸の回りに回転したときにできる回転体の体積を求めよ。

（６）立体の切断面が積分する方向と垂直でないときは要注意

★放物線 $C: y = x^2 - 2x$ と直線 $L: y = \frac{1}{2}x$ とで囲まれた図形をこの直線 L を軸として回転したときにできる回転体の体積を求めよ。

立体の切断面が積分する座標軸の方向と垂直でないとき切断面に微小な厚みをつけると座標軸に垂直な場合とはその厚みがちがう。したがって、これを無限に集めると大きなちがいになってくる。このようなとき、次の解法のいずれかで考えるとよい。

$\boxed{1}$とんがり帽子型積分による解法



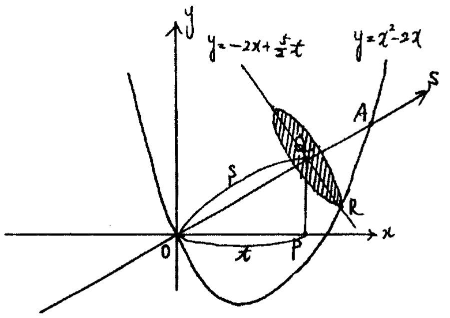
図のように、線分ＰＱを直線Ｌのまわりに回転するとき、Ｑから直線Ｌに下ろした垂線の足をＲとし、中心Ｒ、半径ＱＲの円を底面としＰを頂点とする円錐の側面積をＳ（ｘ）とおく。

$$S(x)=\pi\cdot PQ^2\times\frac{2\pi\cdot QR}{2\pi\cdot PQ}=\pi\cdot PQ\cdot QR$$

ここで、$PQ:QR=\sqrt{5}:2$ より $S(x)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\pi\cdot PQ^2$

$$\therefore V=\frac{2}{\sqrt{5}}\pi\int_0^{\frac{5}{2}}\left\{\frac{1}{2}x-(x^2-2x)\right\}^2dx=\frac{125\sqrt{5}}{96}\pi$$

$\boxed{2}$回転軸の方向に座標軸を新設し、座標相互の関係式を導き、置換積分の考え方で１変数にしていく解法［その１］（厚みの微調整をすることになる）



図のように、ｘ軸上の点Ｐ（ｔ，０）にｓ軸上の点でＯＱ＝ｓである点Ｑを対応させる。

$Q\left(t,\ \dfrac{1}{2}t\right)$ を通りｓ軸に垂直な直線 $y=-2x+\dfrac{5}{2}t$

と放物線Ｃの交点をＲとすると $\begin{cases}y=x^2-2x\\ y=-2x+\dfrac{5}{2}t\end{cases}$ より

$R\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}}t,\ \dfrac{5}{2}t-2\sqrt{\dfrac{5}{2}}t\right)$ だから、$S(t)=\pi\cdot QR^2$ を計算して

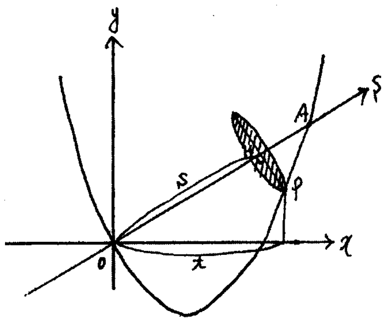
$$\therefore V=\pi\int_0^{OA}\left[\left(\sqrt{\frac{5}{2}}t-t\right)^2+\left\{\left(\frac{5}{2}t-2\sqrt{\frac{5}{2}}t\right)-\frac{1}{2}t\right\}^2\right]ds=\pi\int_0^{\frac{5}{2}}5\left(\sqrt{\frac{5}{2}}t-t\right)^2ds$$

ここで、$s:t=\sqrt{5}:2$ だから、$s=\dfrac{\sqrt{5}}{2}t\quad\therefore ds=\dfrac{\sqrt{5}}{2}dt$

したがって、$V=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{5}{2}}5\left(\sqrt{\frac{5}{2}}t-t\right)^2\frac{\sqrt{5}}{2}dt=\frac{125\sqrt{5}}{96}\pi$

$\boxed{3}$回転軸の方向に座標軸を新設し、座標相互の関係式を導き、置換積分の考え方で１変数にしていく解法［その２］（ｸﾞﾗﾌ上の点から新座標軸に垂線を下ろし、内積0として関係式を導く）

図のように、放物線C上の点P（t，t^2-2t）からs軸に下ろした垂線の足をHとし、



OH＝sとおくと、

$$H\left(\frac{2}{\sqrt{5}}s,\ \frac{1}{\sqrt{5}}s\right)$$

ここで、点Pと直線Lの距離は

$$PH=\frac{|t-2(t^2-2t)|}{\sqrt{1^2+2^2}}\ \text{だから}\ S(t)=\pi\cdot PH^2$$

また、$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{PH}$より、$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{PH}=0$ここで$\overrightarrow{OH}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}s,\ \frac{1}{\sqrt{5}}s\right)$

$$\overrightarrow{PH}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}s-t,\ \frac{1}{\sqrt{5}}s-(t^2-2t)\right)\ \text{だから}\ s=\frac{\sqrt{5}}{5}t^2\quad \therefore ds=\frac{2\sqrt{5}}{5}t\,dt$$

$$\text{したがって、}V=\pi\int_0^{OA}\frac{|t-2(t^2-2t)|^2}{5}ds=\pi\int_0^{\frac{5}{2}}\frac{(-2t^2+5t)^2}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}t\,dt$$

$$=\frac{125\sqrt{5}}{96}\pi$$

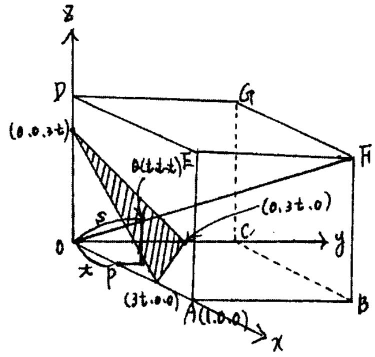
★一辺の長さが１の立方体ＯＡＢＣ－ＤＥＦＧがある。この立体を対角線ＯＦのまわりに１回転してできる回転体の体積を求めよ。

①回転軸の方向に座標軸を新設し、座標相互の関係式を導き、置換積分の考え方で１変数にしていく解法［その１］（厚みの微調整をすることになる）

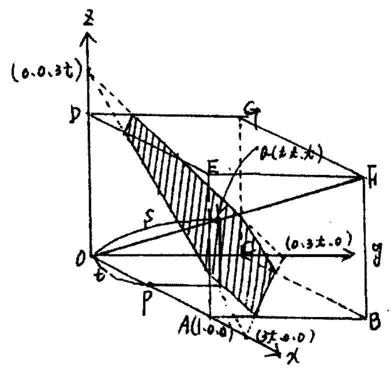
図のように、x軸上の点P（t，0，0）にs軸上の点でOQ＝sである点Qを対応させる。

Q（t，t，t）を通りs軸に垂直な平面$x+y+z=3t$で立方体ＯＡＢＣ－ＤＥＦＧを切断したときの、切断面の形とその切断面を回転させたときの面積S（x）は、次のようになる。

（ア） $0 \leqq t \leqq \frac{1}{3}$ のとき



（イ） $\frac{1}{3} \leqq t \leqq \frac{1}{2}$ のとき



（ウ） $\frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{2}{3}$ のとき

対称性より（イ）の場合を反転させた六角形となる。

（エ） $\frac{2}{3} \leqq t \leqq 1$ のとき

対称性より（ア）の場合を反転させた三角形となる。

ここで、$s=\sqrt{3}\,t$ だから $ds=\sqrt{3}\,dt$

また、回転体の対称性より（ア）と（イ）の場合で回転体の体積を求めて２倍すればよい。

したがって、$V=2\left\{\pi\int_{0}^{\frac{1}{3}}(6t^{2})\cdot\sqrt{3}\,dt+\pi\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}(6t^{2}-6t+2)\cdot\sqrt{3}\,dt\right\}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

★放物線 $y=\frac{3}{4}-x^{2}$ を y 軸のまわりに回転してできる曲面Kを原点を通り回転軸と45°の角をなす平面Hで切る。曲面Kと平面Hで囲まれた立体の体積を求めよ。

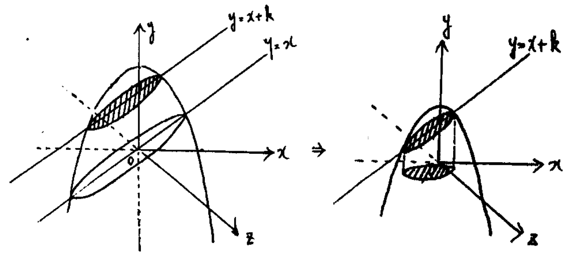
---

①曲面Kは、回転放物面といわれる。y軸上の点P（0，k，0）に原点Oを通り平面Hに垂直な直線に方向をつけて s 軸を新設し、s 軸上の点で $OQ=s$ である点Qを対応させる。曲面 $K: y=\frac{3}{4}-x^{2}-z^{2}$ を回転軸と45°の角をなす平面 $H: y=x+k$ で切断したときの切断面を z x 平面に正射影した図形は $\begin{cases} y=\frac{3}{4}-x^{2}-z^{2} \\ y=x+k \end{cases}$ より、

$(x+\frac{1}{2})^{2}+z^{2}=1-k$　切断面の面積を $S(k)$ とおくと

$S(k)\cdot\cos 45^\circ = \pi\sqrt{1-k}^{\,2}$

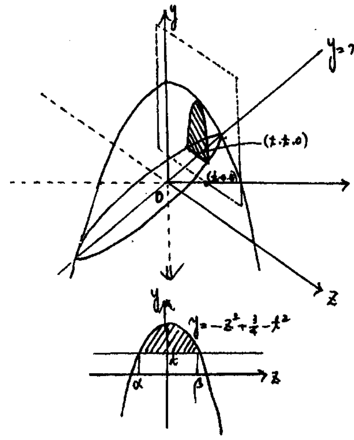
$\therefore S(k) = \sqrt{2}(1-k)\pi$



ここで、$s = \dfrac{1}{\sqrt{2}}k$　だから $ds = \dfrac{1}{\sqrt{2}}dk$

したがって、$V = \displaystyle\int_0^1 S(k)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}dk = \sqrt{2}\,\pi\int_0^1 (1-k)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}dk = \frac{1}{2}\pi$

②曲面 $K: y = \dfrac{3}{4} - x^2 - z^2$ と平面 $H: y = x$ で囲まれた立体を x 軸に垂直な平面 $x = t$ で切断したときの切断面の面積 $S(t)$ は右の図より



$$S(t) = \int_\alpha^\beta \left\{\left(\frac{3}{4} - t^2 - z^2\right) - t\right\}dz$$

$$= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

ここで、α、β は $z^2 + t^2 + t - \dfrac{3}{4} = 0$ の解だから

解と係数の関係より $(\beta-\alpha)^2 = -4\left(t^2 + t - \dfrac{3}{4}\right)$

$$S(t) = \frac{1}{6}\left\{\sqrt{-4t^2-4t+3}\right\}^3$$

したがって、$V = \dfrac{1}{6}\displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}\left\{\sqrt{-4t^2-4t+3}\right\}^3 dt = \frac{1}{2}\pi$

> [カヴァリエリの原理]
> 2つの立体をある平面に平行な平面で切断したとき、どの切断面の面積もつねに等しいならばこの2つの立体の体積は等しい。

この原理を使えば、回転放物面 $y = \dfrac{3}{4} - x^2 - z^2 - x$ と zx 平面で囲まれたドーム型の体積を求めるだけでよい。

4．講義を終えて

「導関数の定義」と「微分積分学の基本定理」を土台にして、基本となる考え方に一貫性をもた

せながら展開した内容である。実際には、空間図形の模型やコンピュータ・グラフィックスでイメージさせながら解説している。ここでは、区分求積法との関連が扱えなかったが、立体の体積を楽しく求めるという目標は達成できたと考えている。今後の取り組みを通して内容の改善を進めていきたい。

【参考図書】

「積分の歴史－アルキメデスからコーシー、リーマンまでー」B.ニキフォロフスキー著　現代数学社
「立体のとらえかた」秋山　仁 著　駿台文庫
「数学入試問題詳解」聖文社編集部編　聖文社
「秋山仁の数学タイムトラベル」秋山　仁 著　ＮＨＫ出版