

サイクロイドから派生したSTEM教材

寺垣内政一・北臺如法・斎藤敏夫¹
(2019年10月3日受理)

STEM Materials Derived from the Cycloid

Masakazu Teragaito, Yukinori Kitadai and Toshio Saito¹

Abstract: A cycloid is a plane curve obtained as the locus of a point fixed on a circle, when the circle rolls on a straight line without slipping. Similar plane curves can be considered if we replace a base line with other curves such as parabola, hyperbola, circles. Conversely, we examine the inverse problem. That is, for a given curve, what is the base for which a fixed point on a rolling circle yields the curve as the locus? In general, this is hard to solve, but we discuss two approaches from viewpoints of differential equation and geometry. For the latter, we propose an implementation for the computational software Mathematica.

Key words: cycloid, STEM material

キーワード：サイクロイド, STEM教材

1. はじめに

円が直線に沿って転がるとき、円周上の固定点の軌跡はサイクロイドとよばれ、現在は高等学校数学IIIの教材として教科書で扱われている¹。図1では、単位円がx軸上を右に転がるとき、最初は原点にあった固定点の軌跡としてサイクロイドが生じている。

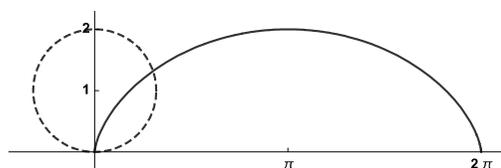


図1 サイクロイド (実線)

この場合の媒介変数表示

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$$

を導出することは容易であり、高校数学の教材として

適切である。

歴史的には、16世紀にガリレオ・ガリレイがすでにサイクロイドを考察しており、17世紀にはパスカルやフェルマーを始めとして、多くの数学者、物理学者が研究対象としている。サイクロイドを利用した振り子の等時性や、最速降下線、等時曲線といった特徴的な性質が知られている。

本論文では、最初に、円が直線に限らず一般の曲線上を転がる場合の円周上の固定点の軌跡として生じる平面曲線の媒介変数表示の導出を説明し、中等教育の範囲内にある2次曲線の場合を数式処理システム Mathematica を用いて描画する。

逆に、どのような曲線に沿って円を転がせば、円周上の固定点は直線や2次曲線を描くだろうか。本論文の後半では、この素朴な問題設定に対して、高等学校の数学Cの発展教材²あるいは新設科目である理数探求基礎の探求課題として、高校生が取り組めるように道筋を示す。

さらに、数式処理システム Mathematica を利用し、非線形連立微分方程式を数値計算により解いて解曲線を描画するアプローチ、区分的にサイクロイドを描いて解曲線の近似を描画するアプローチの二つを提示す

¹上越教育大学大学院学校教育研究科

る。これらは、近年、日本でも教育政策において重要視され始めたSTEM教育の観点から価値のあるものと考えられる。

2. 曲線上を転がる単位円

2.1 媒介変数表示

座標平面上の曲線 $c(s)=(x(s), y(s))$ は、弧長変数表示³ されているとする。こうしておけば、速度ベクトル $c'(s)=(x'(s), y'(s))$ は常に単位ベクトルになる。曲線上の1点 $c(s)=(x(s), y(s))$ において、速度ベクトルを $e_1(s)=(x'(s), y'(s))$ とし、それを反時計回りに90度回転したものを $e_2(s)=(-y'(s), x'(s))$ とする。点 $c(s)$ において曲線に接する単位円の中心は、位置ベクトル $c(s)+e_2(s)$ をもつ点として選んでおく。曲線上の起点 $c(0)$ から $c(s)$ までの弧長は s なので、単位円上の固定点 $p(s)$ の位置ベクトルは、単位円の中心から、 $e_2(s)$ を反時計回りに $\pi-s$ だけ回転したベクトルの分だけずれている。

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi-s) & -\sin(\pi-s) \\ \sin(\pi-s) & \cos(\pi-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y'(s) \\ x'(s) \end{pmatrix}$$

を計算して、

$$(y'(s) \cos s - x'(s) \sin s, -y'(s) \sin s - x'(s) \cos s)$$

を得る。よって、 $p(s)$ の位置ベクトルは

$$c(s) + e_2(s) - e_1(s) \sin s - e_2(s) \cos s \quad (1)$$

で与えられる。

一般には、曲線の弧長変数表示を具体的に与えることは困難である。その場合、曲線 $c(t)=(x(t), y(t))$ に対して、(単位)速度ベクトル

$$e_1(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) / \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$$

を用いて $e_2(t)$ を定め、起点 $(t=t_0)$ からの弧長を関数

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{c}(u)| du$$

で表現することさえできれば、

$$c(t) + e_2(t) - e_1(t) \sin s(t) - e_2(t) \cos s(t) \quad (2)$$

として、 $p(t)$ の位置ベクトルは与えられる。

2.2 放物線

最初に、放物線 $y=ax^2$ に沿って転がる単位円上の固定点の軌跡を、Mathematica を用いて描画する。まず、放物線は媒介変数表示 $c(t)=(t, at^2)$ をもつが⁴、弧長変数表示を具体的に与えることはできない。しかし、 $c(0)$ を起点とした弧長 $s(t)$ は

$$s(t) = \frac{1}{4} \left(2t\sqrt{1+(2at)^2} + \frac{1}{a} \sinh^{-1} 2at \right)$$

で与えられることが知られている⁴。

(2) で与えた $p(t)$ の表示を用いて、放物線 $y=0.1x^2$ の上を転がる単位円から生じるサイクロイド型曲線を図2に示す。

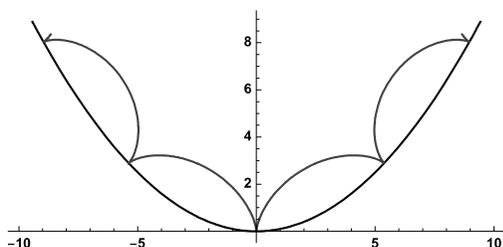


図2 放物線 $y=0.1x^2$ 上を転がる単位円から生じるサイクロイド型曲線

$a=0.5$ のとき、放物線の曲率半径が原点において1になるため、これより大きな値を a に設定すると、実際には単位円が放物線の内側を転がることはできない。ただ、単位円が放物線と交わってもよいことにすれば、図3に示すように、サイクロイド型曲線を描くことは可能である。

2.3 双曲線

代表的な2次曲線である双曲線 $y=1/x$ についても、弧長変数表示を書き下すことはできない。実際、媒介変数表示 $c(t)=(t, 1/t)$ ($t>0$) に対して、例えば起点を $c(1)$ とした弧長

$$s(t) = \int_1^t \sqrt{1 + \frac{1}{u^4}} du$$

を計算することができない。図4では、 t の値を0.01間隔で定め、 $s(t)$ の値を数値計算してプロットした結果を示している。

2.4 円、楕円

単位円が円の内側、外側を転がる場合、それぞれハイポサイクロイド、エピサイクロイドとよばれる曲線が得られることはよく知られており、これらの媒介変

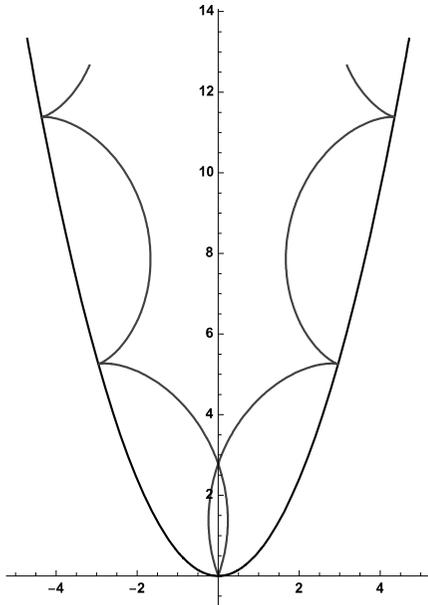


図3 放物線 $y=0.6x^2$ 上を転がる単位円から生じるサイクロイド型曲線

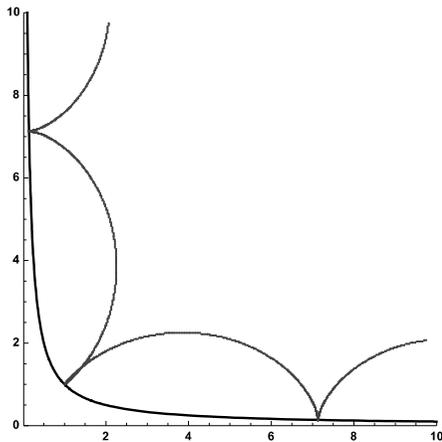


図4 双曲線上を転がる単位円から生じるサイクロイド型曲線

数表示も容易である。実際に取り上げている高校の教科書もある。

楕円 $c(t)=(a \cos t, b \sin t)$ についても、その弧長

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u} du$$

を計算することはできない。数値計算に基づいて、図5および6では、それぞれ楕円 $x^2/4+y^2=1$ の外側、楕円 $x^2/36+y^2/16=1$ の内側を反時計回りに単位円が転がるとき、円周上の固定点の軌跡を示している。

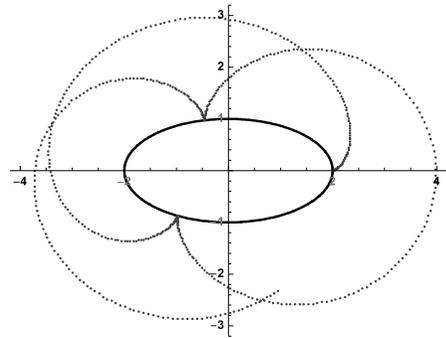


図5 楕円 $x^2/4+y^2=1$ 上(外側)を転がる単位円から生じるサイクロイド型曲線

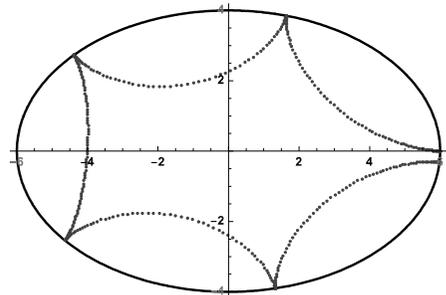


図6 楕円 $x^2/36+y^2/16=1$ 上(内側)を転がる単位円から生じるサイクロイド型曲線

例えば、図5の場合、楕円の周長が9.68845ほどなので、単位円の周長 2π のおよそ1.54倍であり、固定点が点(2,0)からスタートして、単位円が楕円に沿って1周してきたとき、ほぼ1回転半していることから、点(4,0)付近に戻ってきていることがわかる。

同様に、図6の場合、楕円の周長が単位円の周長のおよそ5.05倍なので、単位円が5回転した段階では、スタート地点(6,0)よりも少し下に位置することがわかる。

2.5 カテナリー

2次曲線ではないが、弧長変数表示が具体的に書き下せるカテナリーについて考察する。カテナリーの媒介変数表示は、正の定数 a に対して次で与えられる。

$$c(t) = \left(t, a \cosh \frac{t}{a} \right)$$

弧長変数表示は、

$$c(s) = \left(a \log \left(\frac{s}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{s}{a} \right)^2} \right), \sqrt{a^2 + s^2} \right)$$

である。図7では、 $a=4$ の場合を描画している。

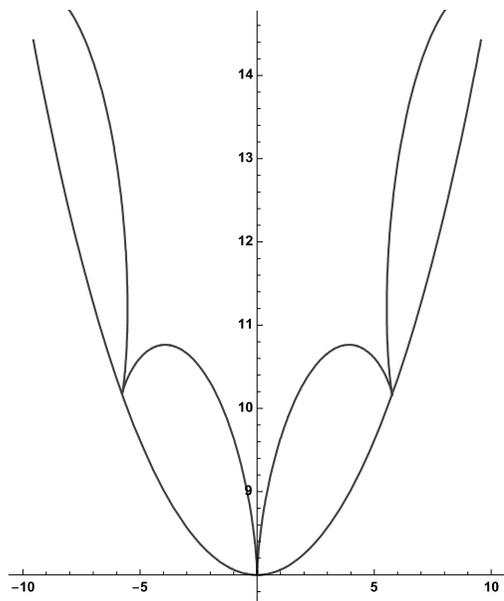


図7 カテナリー ($a=4$) 上を転がる単位円から生じるサイクロイド型曲線

3. 逆問題

3.1 直線

ここからは、どのような曲線に沿って単位円を転がせば、単位円上の固定点の軌跡が、こちらが望む曲線を描くかという逆問題を考察する。最初に、軌跡が x 軸あるいは一般に直線になる場合を解決する。状況を設定するために、座標平面上で原点から最初は第4象限に向かって描かれた曲線を考える。弧長変数表示 $c(s)=(x(s), y(s))$ で与えられているとする。半径1の単位円上に固定点 P をとり、最初は原点にあるとしよう。この単位円が曲線 $c(s)$ 上を転がるとき、点 P が常に x 軸上にあるようにしたい (図8)。

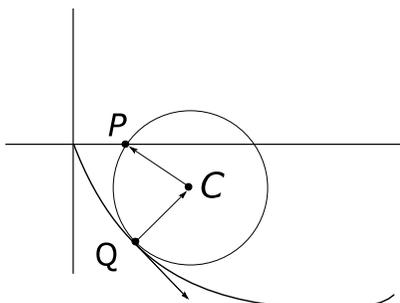


図8 x 軸上にある円周上の固定点 P

(1) で与えた P の位置ベクトルより、我々は連立の非線形微分方程式

$$y(s) + x'(s)(1 - \cos s) - y'(s) \sin s = 0 \quad (3)$$

$$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1 \quad (4)$$

$$x(0) = y(0) = 0 \quad (5)$$

を解く必要がある。(3) は P の y 座標が0であることを意味し、(4) は弧長変数表示ゆえに接ベクトルが単位ベクトルであることを示す。(5) は、曲線が原点から始まるという初期条件に対応する。

1つの解として、下半円

$$(x(s), y(s)) = (2 - 2 \cos \frac{s}{2}, -2 \sin \frac{s}{2}), \quad 0 \leq s \leq 2\pi$$

がある。この解の場合

$$(x'(0), y'(0)) = (0, -1)$$

になっていることに注意する。この解の導出は、微分方程式を解くことではなく、半径の比が2:1のハイポサイクロイド⁵が線分になることから直ちに従う。次節では、これが唯一の解であることを示す。

3.2 解曲線

解曲線 $c(s)=(x(s), y(s))$ は弧長変数表示なので、速度ベクトル $(x'(s), y'(s))$ は単位ベクトルだった。そこで、速度ベクトルが x 軸となす角 $\theta(s)$ ($-\pi \leq \theta(s) \leq \pi$) を導入し、

$$x'(s) = \cos \theta(s), \quad y'(s) = \sin \theta(s)$$

とおく。(3) に代入して、

$$y(s) + \cos \theta(s)(1 - \cos s) - \sin \theta(s) \sin s = 0.$$

加法定理より、 $y(s)=\cos(\theta(s)-s)-\cos \theta(s)$ 。よって

$$y'(s) = -\sin(\theta(s)-s)(\theta'(s)-1) + \sin \theta(s) \theta'(s)$$

となるので、 $y'(s)=\sin \theta(s)$ を左辺に代入して

$$\sin \theta(s)(\theta'(s)-1) = \sin(\theta(s)-s)(\theta'(s)-1).$$

以上から、 $\theta'(s) \neq 1$ ならば、

$$\sin \theta(s) = \sin(\theta(s)-s)$$

を得る。つまり、 $\theta(s)+(\theta(s)-s)=\pm\pi$ 。これより、

$$\theta(s) = \frac{s}{2} \pm \frac{\pi}{2}.$$

よって、

$$\begin{cases} x'(s) = \cos\left(\frac{s}{2} \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin \frac{s}{2} \\ y'(s) = \sin\left(\frac{s}{2} \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos \frac{s}{2} \end{cases}$$

となつて

$$x(s) = 2 \cos \frac{s}{2} - 2, y(s) = 2 \sin \frac{s}{2} \quad (6)$$

あるいは

$$x(s) = 2 - 2 \cos \frac{s}{2}, y(s) = -2 \sin \frac{s}{2} \quad (7)$$

が解となる。前者ならば上半円であり、後者は下半円である。我々は、原点から第4象限に伸びる解曲線に限定しているため、後者の下半円のみが解曲線である。一方、 $\theta'(s)=1$ ならば曲率が常に1となり、解曲線は半径1の円あるいはその一部になる。この場合、単位円が転がらない。実際、 $\theta(s)=s+C$ とすると、

$$\begin{cases} x(s) = \sin(s+C) + D \\ y(s) = -\cos(s+C) + D \end{cases}$$

となる。(5)より、 $\sin(s+C)=-\cos(s+C)=-D$ である。すると、動点Pのx座標が

$$\begin{aligned} x(s) + y'(s)(\cos s - 1) - x'(s) \sin s \\ &= x(s) + \sin(s+C)(\cos s - 1) - \cos(s+C) \sin s \\ &= D + \sin(s+C) \cos s - \cos(s+C) \sin s \\ &= D + \sin C \\ &= x(0) \end{aligned}$$

となり、原点から動いていないことがわかる。

これまでの考察からわかるように、単位円上の固定点の軌跡が直線 $y=mx$ にその場合も一意的な⁶解曲線が存在する。それは、本節で求めた下半円を原点を軸にして反時計回りに回転して得られる。なぜなら、その解曲線を時計回りに回転して、固定点の軌跡がx軸になるようにすれば、それは(7)でなければならないからである。

3.3 双曲線、放物線

まず、固定点の軌跡が双曲線になる場合を考察する。

$p(s)$ の位置ベクトル(1)を用いて、その座標を $(px(s), py(s))$ とすれば、微分方程式は $px(s) \cdot py(s)=1$ となる。これを具体的に解くことはできないが、Mathematicaによる数値計算でも描画できなかった。解曲線の存在は、物理的な状況を鑑みれば自明だが、微分不可能な点が見ることが障害になっていると推測する。その問題を回避するため、(Ross 2010)に倣って、固定点を単位円の円周上ではなく、わずかに円の内側にとり、その点の軌跡が双曲線を描く解曲線を数値計算によって描画した。図9では、単位円の中心から半径に沿って $\sigma=0.74158$ だけ離れた場所に固定点を取り、その点の起点を(1,1)に設定し、単位円が転がるにつれて、軌跡が双曲線 $xy=1$ を描くような解曲線を示している。理想的には、 σ の値をできる限り1に近づけたいのだが、Mathematicaの関数NDSolveの内部処理がわからず、この値が限界だった。例えば、 $\sigma=0.74159$ では失敗してしまう。

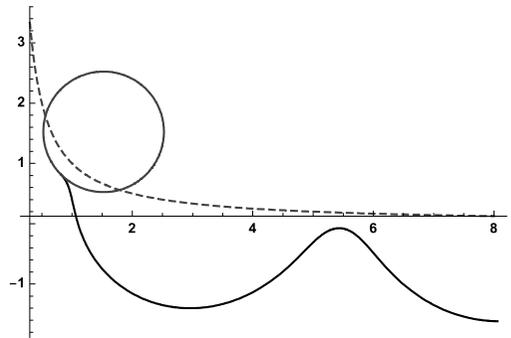


図9 双曲線が軌跡として生じるような曲線(実線)、双曲線 $xy=1$ (破線)およびスタート時点での単位円(灰色)

放物線の場合も同様の状況にあり、我々の計算においては $\sigma=0.7$ が限界だった。図10にその描画を示す。

3.4 円

Ross (Ross 2010) は、固定点の軌跡が半径 R の円になる逆問題を考察している。ただし、固定点は円周上ではなく、わずかに円の内側にある場合に限定されている。これにより、解曲線の微分可能性を保証するためと思われる。第2節の議論を修正するだけで、容易に $p(s)$ の位置ベクトルを表示できる。驚くべきことは、微分方程式の解を与えていることであり、それを用いて、 $R=2$ の場合に描画したものが図11である。

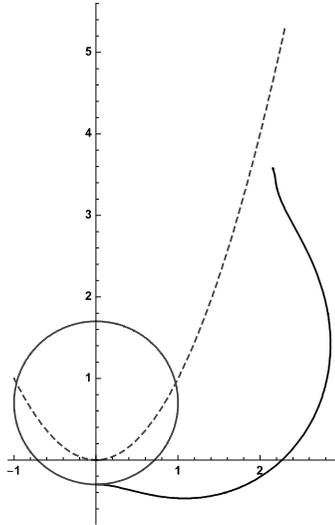


図10 放物線が軌跡として生じるような曲線(実線), 放物線 $y=x^2$ (破線)およびスタート時点での単位円(灰色)

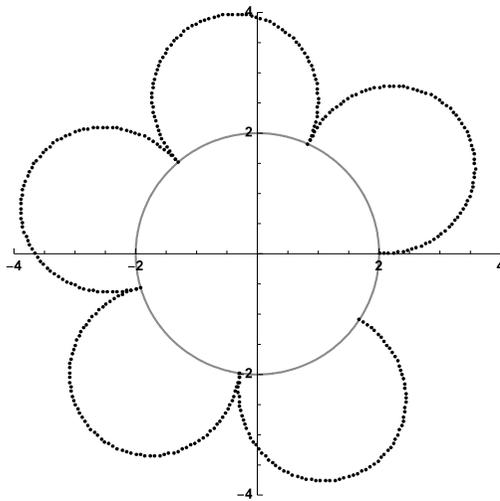


図11 円が軌跡として生じるような曲線 ($R=2$)

4. 逆問題への区分的サイクロイド・アプローチ

4.1 区分的サイクロイド・アプローチ

この節では、逆問題に対するここまでの微分方程式によるアプローチとは別の「区分的サイクロイド」というアプローチを提案し、その実行結果を述べる。これは、微分方程式という解析的な方法を用いず、最初から最後まで幾何学的方法をとるアプローチである。

具体的には、求める曲線を折れ線で近似する。求め

る曲線の上を単位円が転がると、1周転がった部分の求める曲線の長さは 2π であるから、その長さを単純に n 等分した、各線分の長さが $2\pi/n$ の折れ線をうまく配置して求める曲線に近いものを得ようというわけである。この分割数 n が十分大きければ、折れ線はそれだけ求める曲線に近づく。 n を固定すると、折れ線の始点は既知であるから、残りは折れ線の n 個の各角度を決めればよい。

各角度を決めるためには、折れ線と求める曲線との「近さ」を評価しながら、徐々により望ましい角度に近づけていくという方法をとる。

折れ線の頂点を始点から順に P_0, P_1, \dots, P_n とし、 $\angle P_{i-1}P_iP_{i+1}$ を θ_i ($i=0, \dots, n$) とおく。 P_{-1} を始点 P_0 に入る前の P_0 と高さが同じで十分右に位置する点とした。

まず、折れ線と求める曲線との「近さ」をどう判断するかを考えよう。折れ線が一つ決まれば、その折れ線の上を円が転がるときの円周上の固定点の軌跡を求めることができる。しかし、ここでは軌跡そのものを計算せず、円が折れ線の各線分をそれぞれ行けるところまで行った後の固定点の位置のみを計算する。その点の座標を (x, y) 、与えられた曲線を関数 $f(x)$ のグラフであるとすると、与えられた曲線に近いかどうかを、ここでは差 $y - f(x)$ の値で判断することにする。この値をその角度に加算することで、より望ましい角度に更新する。各角度は、始点に近いものから順に評価を行い、この差の絶対値がある小さな正の数以下になった時点で十分角度が調整されたと判断し、次の角度の調整へ移行する。これにより、各角度を増やすか減らすかが判断され、これを反復することで自動的に各角度がアップデートされ、「近さ」が改善されていく。

この「折れ線の線分を行けるところまで行く」というところで描く軌跡はそれぞれがサイクロイドそのものであり、それを各線分ごとにつなげたものが固定点の軌跡であるので、本節ではこれを区分的サイクロイド (piecewise cycloid) とよぶ。

折れ線の初期状態として、図12のように始点 P_0 から、向かって右側に下半分の半円の上に折れ線が均等に乗るように n 個の各角度を決め、折れ線を配置する。

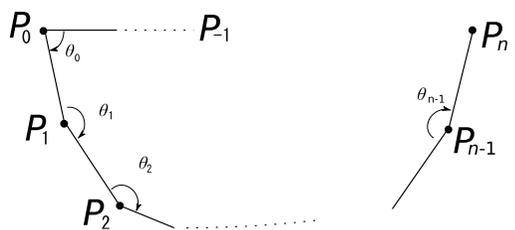


図12 折れ線の初期状態

すなわち $\theta_0 = (n-1)/2n \pi$, $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = (n-1)/n \pi$ とする。この状態から始めて上記の処理を反復することで求める曲線の折れ線近似を得る。(実際にはこの初期状態は本質的ではなく、例えば $\theta_0 = \theta_1 = \dots = \theta_n = \pi$ のように始めても、角度の調整は同様に収束した。)

折れ線の上を転がる円の固定点の軌跡の計算方法は、図13, 14のように角 θ_i が π 以下の場合、次の線分に当たるまで、 $\theta_i > \pi$ の場合は、次の線分の始点に垂直に接するまで移動量と回転角を計算する。

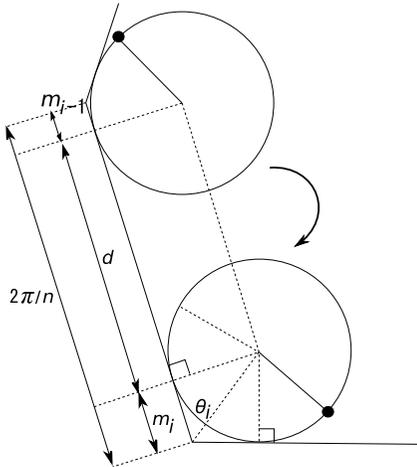


図13 各線分の上での円とサイクロイドの動き ($\theta_i \leq \pi$ の場合)

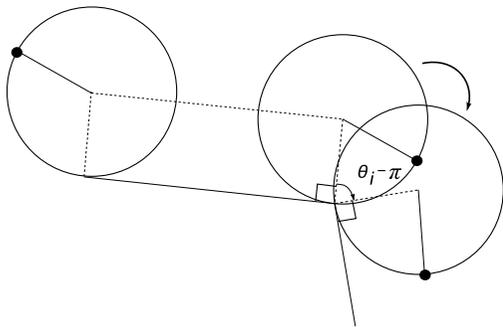


図14 各線分の上での円とサイクロイドの動き ($\theta_i > \pi$ の場合)

角 θ_i が π 以下の場合には図13のように、

$$m_i = \frac{1}{\tan \frac{\theta_i}{2}}$$

の長さだけ、線分上を最後まで転がらないので、一つ前と一つ後の線分から来るこれらの量を差し引いて、

$$\begin{aligned} d &= \frac{2\pi}{n} - m_{i-1} - m_i \\ &= \frac{2\pi}{n} - \frac{1}{\tan \frac{\theta_{i-1}}{2}} - \frac{1}{\tan \frac{\theta_i}{2}} \end{aligned}$$

が移動量であるとともに、固定点がこの線分の上で回転する角度である。

$\theta_i > \pi$ の場合は、次の線分の始点に垂直に接するまで移動量と回転角を計算する。図14のように、次の線分での開始位置に到達するために、追加の回転 $\theta_i - \pi$ が行われ、この値が加算される。すなわち、固定点は

$$d = \frac{2\pi}{n} - m_{i-1} - m_i + \theta_i - \pi$$

だけ回転する。

4.2 区分的サイクロイド近似ギャラリー

以上の方法を Mathematica で実装した。これにより逆問題を近似的に求めた結果を紹介する。

双曲線

まず双曲線 $xy=1$ の場合に、徐々に近づいていく過程が次である。始点を (1,1)、分割数 n は10とした。破線が双曲線、濃い黒い点が円周上の固定点の軌跡の一部である。図15が初期状態、図16, 17のように徐々に濃い黒い点が始点から順に双曲線にフィットしていくのが観察できる。図18が完成である。 $n=64$ まで増やすと図19のようになり滑らかな曲線に近いものが得られる。

放物線

さて、元々のサイクロイドは、直線の上を転がり、1周期分は上に凸な滑らかな曲線である。では別の上に凸で滑らかな曲線は、何の上を転がれば現れるであ

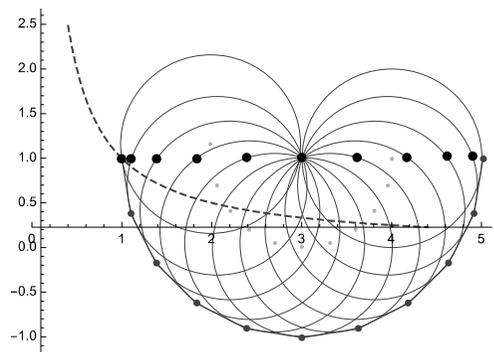


図15 初期状態

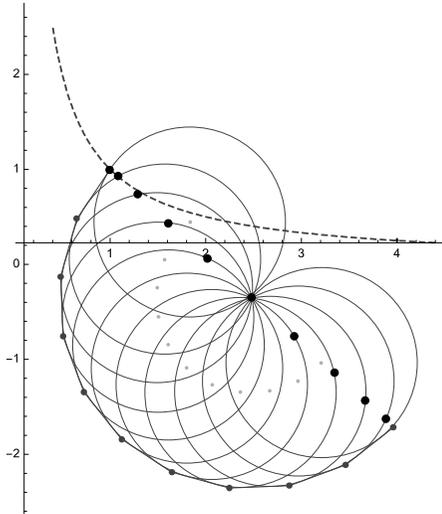


図16 まず始点の角度が調整される

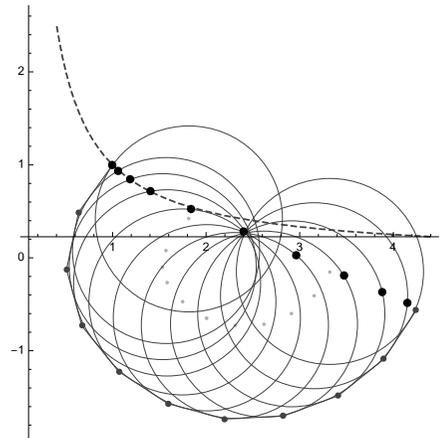


図17 始点から4点ほど調整が終わったところ

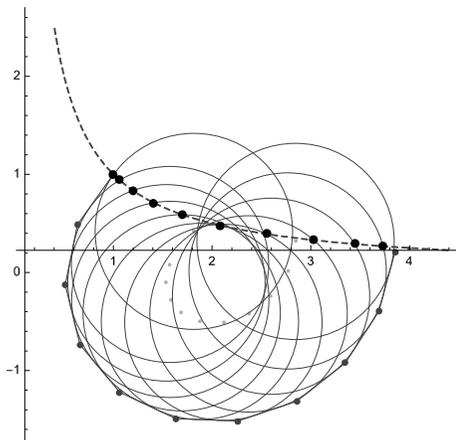


図18 $n=10$ の場合の完成

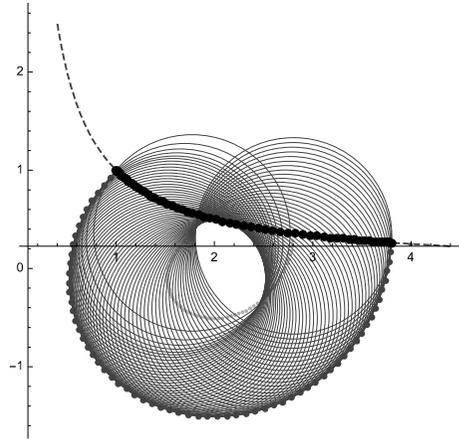


図19 $n=64$ の場合

ろうか。身近な例である放物線の場合に、この逆問題を区分的サイクロイドにより解いてみよう。

ここでは、原点から出発して1周期転がると固定点の軌跡のy座標がほぼ0に戻ってくるように放物線 $y = -0.19x(x-6)$ を選んだ。結果を図20に示す。

この解曲線は、初期は下に凸であるが、放物線の頂点を作り出すために上に凸になり、それが終わると再び下に凸になるという興味深い曲線になっていることがわかる。ちょうど1周期転がるとy座標が0に戻るよう設定されていることだけ明かして、解曲線がどのように上下するかを、サイクロイドが直線上を転がることに比較しながら予想するという思考を刺激する数学教育の教材としても面白いだろう。

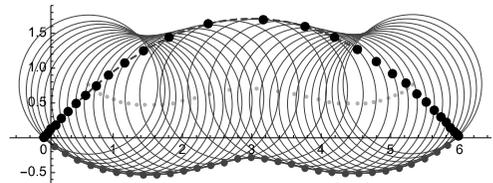


図20 放物線の場合 (分割数 $n=32$)

4次曲線

放物線をさらに次数を上げて、4次曲線の例を見てみよう。放物線と同様に、原点から出発して1周期で固定点の軌跡が概ねy座標が0に戻ってくるように $y = -0.02((x-3.05)^4 + 3.05^4)$ を選択する。結果を図21に示す。放物線の場合の逆問題よりもさらに複雑な曲線が現れた。

正弦曲線

最後に超越関数による正弦曲線を観察してみよう。

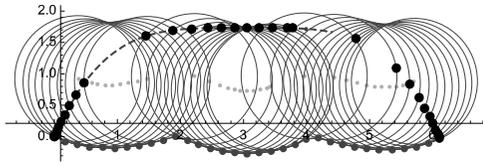


図21 4次曲線の場合 (分割数 $n=32$)

ここで描くのは $y = \sin 0.56x$ のものである。結果を図22に示す。放物線と正弦曲線では曲線の性質は大きく異なるものの曲線の概形が似ており、解曲線の概形が似ていることが観察できる。

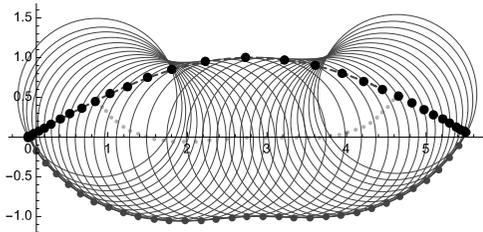


図22 正弦曲線の場合 (分割数 $n=32$)

【注】

- 1) 自転車の車輪上、外側ぎりぎりに位置する目印の動きを目で追えば、サイクロイドが観察できる。

- 2) 平成30年告示の新学習指導要領において、平面上の曲線については従前の数学Ⅲから数学Cに移行した。
- 3) 弧長変数表示は高校数学では扱われないが、微分幾何学のテキストでは必ず扱われるので、本稿では詳細については省略する。ただ、曲線に沿って「巻尺」をあてがっているだけのことである。同じことだが、指定された起点からの曲線に沿ったいわば「走行距離」によって、曲線上の点を特定しているに過ぎない。
- 4) 大学初年次の微積分程度の計算で求められる。
- 5) Tusi couple として著名である。
- 6) 単位円が解となる曲線の上を転がるという仮定は課している。

【参考・引用文献】

- D. S. Ross (2010), The inverse trochoid problem, J. Franklin Inst. 347 (2010), no.7. 1281-1308.

【謝辞】

本研究は JSPS 科研費 JP17H00820 の助成を受けたものである。