

# 広島大学学術情報リポジトリ

## Hiroshima University Institutional Repository

|            |   |
|------------|---|
| Title      | 原因の確率の理解を目標とした条件付き確率の学習を支援する教材と授業の条件  |
| Author(s)  | 石橋, 一昂  |
| Citation   | 秋期研究大会発表集録 , 52 : 65 - 72   |
| Issue Date | 2019-11-16  |
| DOI        |   |
| Self DOI   |   |
| URL        | <a href="https://ir.lib.hiroshima-u.ac.jp/00048299">https://ir.lib.hiroshima-u.ac.jp/00048299</a> |
| Right      | Copyright (c) 2019 日本数学教育学会   |
| Relation   |   |



# 原因の確率の理解を目標とした 条件付き確率の学習を支援する教材と授業の条件

石橋 一昂  
広島大学大学院教育学研究科院生(日本学術振興会特別研究員)

## 要 約

本稿では、どのような教材と授業が、原因の確率の理解を目標とした条件付き確率の学習を支援するの  
かを明らかにすることを目的とした。まずは、原因の確率を理解するためには「主観的な確率解釈」と「主  
観的な確率解釈と条件付き確率の関連」が必要であることから、それぞれをどのように生徒が学習するべ  
きであるかを示した。結果、「 $\alpha$ ：主観的な確率解釈は、頻度的な確率解釈が適用できないと認識すること  
を契機として学習する」と「 $\beta$ ：条件付き確率は、条件なし確率では、主観的な確率解釈をモデル化でき  
ないことを認識し、主観的な確率解釈をモデル化するものとして学習する」を、学習の原理として構築し  
た。次に、原理  $\alpha$ ,  $\beta$  を支援する教材として、「 $a$ ：事象に関する情報に対して確率は適用されると考えさ  
せる」と「 $b$ ：結果に対する原因の確率を考えさせる」を満たす教材を開発し、それを用いた授業を開発  
した。最後に、授業を実施・分析・考察した結果、原因の確率の理解を目標とした条件付き確率の授業で  
は、原理  $\alpha$ ,  $\beta$  に基づいた学習の支援を目指した教材と授業が有効であることが確認された。

キーワード：原因の確率，確率解釈，条件付き確率

### 1. はじめに

我が国の確率教育では、小単元「条件付き確率」  
において「原因の確率」が扱われている。結果に対  
する原因の確率を考える立場は、確率の主観主義  
と呼ばれ(松原, 2013), 主観主義者は、一般に確率  
を「事象の生起に関する信念の度合いを表したも  
の」(文部科学省, 2019, p.93)と考える(以下、「主  
観的な確率解釈」とする)。

一方で我が国の確率教育は、確率を「一様な実験  
を無限回繰り返したときの相対度数の極限」(文部  
科学省, 2019, p.93)と考え(以下、「頻度的な確率解  
釈」とする), 主観主義とは対照的に、原因に対す  
る結果の確率を求めるのが一般的である, 確率の  
頻度主義(松原, 2013)のみに基づいて確率を意味づ  
けている。条件付き確率を、結果の確率を求めた  
めだけに利用するのであれば、頻度的な確率解釈  
だけで十分であるが、原因の確率を理解するため

には、主観的な確率解釈も必要である。しかし、現  
在の確率教育は、原因の確率も頻度主義の文脈で  
扱われるというジレンマに陥っている。この状況  
は我が国のみではなく、諸外国も同様であり(例え  
ば, Carranza & Kuzniak, 2008; Batanero & Borovcnik,  
2016), 頻度主義のみに基づいて条件付き確率を学  
習しても、生徒は、結果が原因の確率に影響を与  
えるということを、理解できないことが明らかとな  
っている(例えば, Díaz & Batanero, 2009; 石橋,  
2017)。

そこで本稿では、どのような教材と授業が、原因  
の確率の理解を目標とした条件付き確率の学習を  
支援するのかを明らかにすることを目的とする。  
上述した原因の確率の性格から、原因の確率を理  
解するためには、「主観的な確率解釈」と「主観的  
な確率解釈と条件付き確率の関連」が必要である  
ことが示唆される。そこでまずは、これらを生徒が

どのように学習するべきであるのかに関して、確率解釈の形成過程(石橋, 印刷中)と、条件付き確率の数学的概念形成過程(石橋, 2018)に基づいて、その原理を構築する(第2章). 次に、前章で導出した原理に基づいた学習を支援する教材と授業を開発し(第3章), 授業の実践・分析・考察を行う(第4章).

## 2. 学習の原理の構築

### (1) 確率解釈の形成過程

本稿では主観的な確率解釈の学習を目指す、それは確率教育において、頻度的な確率解釈に取って代わって主観的な確率解釈を扱うという意味ではない。頻度的な確率解釈もまた重要であるから、確率教育では頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈の両方を養うことが目標とされている(Batanero & Borovcnik, 2016; 石橋, 2017, 印刷中). ゆえに本稿も、この立場に立つこととする。

石橋(印刷中)では、上述の確率の多元論的な解釈を目標とし、数学史を参照することで確率解釈の形成過程の規範モデルを構築した。歴史的に見て、確率解釈は、既存の解釈では解決できない問題が生じ、それを乗り越えるようにして新たな解釈が用いられるという形で発展してきた。本稿で着目する主観的な確率解釈については、社会の変化に伴って頻度的な確率解釈が適用される範囲が狭くなっていき、それを乗り越えるようにして広まっていったとまとめることができる(マグレイン, 2013; 竹内, 2018). 一方で Shaughnessy (1992, p.469)によれば、個人あるいは集団の確率に関するパラダイムシフトは、新たな確率課題を解決することができないことを契機に生じる。これらを総合すると、確率解釈の史的展開と個人あるいは集団の確率に関するパラダイムシフトには、既存の解釈では解決できない状況に直面し、それを解決するために新たな解釈が必要となることで、高次の解釈へと展開していくという共通点を確認できる。すなわち、主観的な確率解釈については、まずは頻度的な確率解釈が形成されていて、それが適用できない状況に直面することで、新たな確率解釈として主観的な確率解釈を学習するという展開が望ましいと考えられる。

頻度的な確率解釈が形成されていて、主観的な確率解釈が形成されていない状態とは、多数回の試行を行うことにより確率を推定することができる事象の確率は求めることができるが、1回限りの事象について確率を推定することはできない状態である。また、頻度的な確率解釈では、試行の結果から確率を推定することから、確率は事象そのものの性質であり、その不確実性の程度を表すとす(竹内, 2018). そのため、生徒は確率が事象そのものに対して適用されるものであると捉える傾向にあり(Devlin, 2014), 確率を考える事象についての新たな情報を得たとしても、確率は変わらないと考えてしまう(石橋, 印刷中). この傾向は、時間的に後の出来事を情報として、前の出来事の確率を考える際に顕著に現れる(例えば, 五十嵐, 2014).

以上より、主観的な確率解釈は、「頻度的な確率解釈が適用できないと認識することを契機として学習する」ことが望ましい。本稿ではこの鉤括弧部分を、学習の原理  $\alpha$  と呼ぶこととする。

### (2) 条件付き確率の数学的概念形成過程

確率概念には哲学的側面(確率解釈)と数学的側面の2つの側面がある(ギリース, 2004). ゆえに確率概念の形成について考察する上では、確率解釈の形成に加えて、確率の数学的概念形成についても考えなければならない(石橋, 印刷中). さらに、それらは独立ではなく互いに関連づけることが重要である(例えば, Chernoff, 2008). そこで、まずは条件付き確率の数学的概念形成について、否定論(岩崎, 1992)に基づいてその過程を構築した石橋(2018)を参照して見ていく。

石橋(2018)は、関連概念との関係の認識の希薄化により指摘される条件付き確率の困難性に着目し、関連概念との否定関係により数学的概念形成の過程を特徴づけている否定論(岩崎, 1992)に基づいて、条件付き確率の数学的概念形成の過程を構築した。否定論に基づけば、条件付き確率の数学的概念形成は「条件なし確率では、得られた条件(情報)を考慮した適切なモデルを導出することができない」(石橋, 2018, p.77)こと契機として始まる。ここで、条件なし確率とは、「公式の分母を全事象  $U$  とするもののうち、数学教育で条件付き確率を学習する以前のそれらを指す。具体的

には、ある事象 A の確率  $P(A)$  や、事象 A と事象 B がともに起こるという積事象  $P(A \cap B)$  の確率、事象 A または事象 B が起こるという和事象  $P(A \cup B)$  の確率である」(p.75).

さらに、条件なし確率が適用できないことは、結果の確率を考える頻度的な確率解釈に基づく場合よりも、原因の確率を考える主観的な確率解釈に基づく場合に認識されやすい(石橋, 印刷中). なぜなら、例えば「当たりくじ 2 本を含む 4 本のくじがある. 修二と彰がこの順に 1 本ずつくじを引くとする. いま修二がくじを引いて当たりであった. このとき、彰がくじを引いて当たりである確率を求めなさい. ただし、引いたくじは元に戻さないこととする.」という結果の確率を求める問題では、修二が当たりを引いたという条件付き確率と考えるよりも、修二が当たりを引いた後の、「当たり 1 本とはずれ 2 本の計 3 本」を全事象とする条件なし確率と考えるほうが、条件なし確率しか学習していない生徒にとっては自然だからである. 一方、後で詳しく述べるが、原因の確率を求める問題では、条件なし確率と考えることが自然でないことから、生徒が条件なし確率を適用できないことを認識しやすいく。

以上より、条件付き確率は、条件なし確率が適用できないことを契機として学習することが望ましい. さらに主観的な確率解釈との関連については、主観的な確率解釈をモデル化するためのものとして、条件付き確率が学習されることが望ましい. これらをまとめると、条件付き確率は、「条件なし確率では、主観的な確率解釈をモデル化できないことを認識し、主観的な確率解釈をモデル化するものとして学習する」ことが望ましいといえる. 本稿ではこの鉤括弧部分を、学習の原理  $\beta$  と呼ぶこととする.

### 3. 教材と授業の開発

前章では、「主観的な確率解釈」と「主観的な確率解釈と条件付き確率の関連」を生徒がどのように学習するべきかを示した. 前章で理論的枠組とした確率解釈の形成過程(石橋, 印刷中)や、た条件付き確率の数学的概念形成過程(石橋, 2018)は、意図的な指導によって生徒を高次の段階へと

変容させることを前提として開発されたものである. そのため、それに基づいて導出された原理  $\alpha$ ,  $\beta$  のように生徒が学習するためには、教材や他者の支援が不可欠である. そこで以下では、原理  $\alpha$ ,  $\beta$  に基づいた学習を支援することを目指した、教材と授業を開発する.

#### (1) 教材開発

原理  $\alpha$ ,  $\beta$  より、まずは主観的な確率解釈を学習し、次にそれをモデル化するものとして条件付き確率を学習するという授業展開が望ましいと考えられる. ゆえに授業の始めには、生徒が頻度的な確率解釈が適用できないと認識する状況を設定する必要がある. そのような状況は、主観的な確率解釈にはあつて、頻度的な確率解釈にはない考え方を要求するような教材によって設定できる. このような教材が具備すべき条件は、少なくとも次の 2 つである.

条件 a: これまでは事象に対して確率は適用されたと考えてきたと想定されるから、事象に関する情報に対して確率は適用されると考えさせる

条件 b: これまでは原因に対する結果の確率を考えてきたから、結果に対する原因の確率を考えさせる

まず、条件 a について説明する. 前述の通り、頻度的な確率解釈では、生徒は確率を、事象に対して適用されるものであると捉えている傾向にある. この認識は、頻度的な確率解釈で解決できる問題においては不都合が生じないから、頻度的な確率解釈のみを形成している生徒にとっては合理的な認識である. しかしながら、この認識では全ての確率的事象に対して十分であるとは言えない. 例えば「時間軸の問題」(図 1)において、確率が事象そのものに適用されると考えている生徒は、2 つ目の白玉が取り出される前に、既に 1 つ目の玉は取り

翼は、2 つの白玉と 2 つの黒玉が入った箱を受け取りました. リサは、箱から玉を 1 つ取り出し、それを見ずに横に置きました. 翼が、2 つ目の玉を取り出して見ると白玉でした. このとき、最初の玉が白玉である確率を求めなさい.

図 1 時間軸の問題

出されているのだから、2つ目の玉が何色であれ、1つ目の玉の色の確率には影響を与えないと考えてしまう(松浦, 2006; 五十嵐, 2014). しかし正しくは、2つ目の玉が白玉であることがわかったことで、既に取り出されている1つ目の玉が白玉である確率は下がる. このように、確率は事象そのものに対して適用されるものではなく、事象についての情報に対して適用されるものである(Devlin, 2014). この認識は、確率を人間の客観的事象についての主観的判断、その主観的評価を表すものとする主観的な確率解釈(竹内, 2018)と整合的である. ゆえに、「確率は事象に対して適用される」と認識している生徒に対し、「確率は事象についての情報に対して適用される」と認識することを要請するような問題状況が必要である.

次に、条件 b について説明する. 頻度的な確率解釈では、原因に対する結果の確率を考える. 一方で主観的な確率解釈では、それに加えて結果に対する原因の確率を考えることもできるようになる. その意味で頻度的な確率解釈と主観的な確率解釈は「ちょうど逆の立場」(松原, 2013, p.286)である. ゆえに、これまで原因に対する結果の確率を考えていた生徒が、結果に対して原因の確率を考える必要があるような問題状況が必要である. さらに原理  $\beta$  より、条件付き確率の導入場面では、原因の確率を求める教材を用いることで、生徒が条件付き確率の必要性を認識しやすくなる. この点からも、条件 b が必要であるといえる.

以上の条件を満たす教材として、本稿では図 2 を開発した. 問①、②ともに Y 君が当たりを引く確率を求める問題であるが、問①は Y 君は自分の

引いたくじが、当たりかどうか分からない状況、問②はそれがわかっている状況となっていて、Y 君にとっては有する情報が異なるが、確率を求めるあなたにとっては、確率を求めるための情報はどちらも同じであるという問題である. すなわち、あなたにとって、得られる情報そのものは異なるが、確率を求めるための情報としては同じである. この問題によって、情報の与えられ方が異なっていたとしても、得られた情報が同じであれば確率も同じになるということを強調することができる. 以上より、図 2 は、確率は事象についての情報に適用されることを強調した問題であり、条件 a を満たすものである.

また、問①、②ともに、2番目にくじを引くあなたが当たりであったときに、1番目にくじを引く Y 君の当たる確率を求める問題である. すなわち、あなたが当たりを引いたという時間的に後の出来事(結果)を条件とし、Y 君が当たりであったという時間的に前の出来事(原因)の確率を求める問題である. これは、条件 b を満たすものである.

## (2) 授業の開発

前述のように、2章より、まずは主観的な確率解釈を学習し、次にそれをモデル化するものとして条件付き確率を学習するという授業展開が想定される. 以下ではこの展開に基づいて、授業を開発する.

授業ではまず、生徒に図 2 を解かせる. その際、図 2 は主観的な確率解釈や条件付き確率の学習前に扱われる教材であるから、生徒は次の 2 パターンに分かれると想定される、1つは、あなた

当たりくじが 2 本、はずれくじが 8 本入った 10 本のくじがある. このくじを、最初に Y 君が 1 本引き、2 番目にあなたが 1 本引くことにする. このとき、2つのもしも①、②を考える. それぞれについての問いに答え、そのように答えた理由を書きなさい. ただし、引いたくじは戻さないものとする.

問①もしも、Y 君がくじを引いたにもかかわらず、当たりかどうかを確認せずにこちらの様子を伺っているとしたら…この状況で、あなたが当たりを引いたとしたら、Y 君が当たっている可能性は、あなたがくじを引く前より、上がる? 下がる? 変わらない?

問②もしも、Y 君がくじを引いて、当たったかどうかを確認したにもかかわらず、すました顔で当たったかどうか教えてくれなかったとしたら…この状況で、あなたが当たりを引いたとしたら、Y 君が当たっている可能性は、あなたがくじを引く前より、上がる? 下がる? 変わらない?

図 2 主観的な確率解釈の導入場面で扱う教材

がくじを引く時点で、Y君は既にくじを引いているから、Y君が当たる確率は変わらないと解答するパターンである。もう1つは、すべての場合を数え上げることで、Y君が当たる確率は下がると解答するパターンである。そこで、個人解決が終了した後に周囲との議論の時間を設ける。この周囲との議論で、「変わらない」と答えた生徒が

「下がる」と答えた生徒の意見を聞くことで、既存の確率解釈である頻度的な確率解釈が適用できない場面を設定することができる。これは原理 $\alpha$ に基づいた学習の支援を目指した活動である。次に、問①と②において「下がる」が正答であると認識できても、既存のモデルである条件なし確率では、それをモデル化して表現することができないことを認識させ、条件付き確率を導入する。これは原理 $\beta$ に基づいた学習の支援を目指した活動である。

生徒に図2を解かせた後は、条件付き確率を導入して、図2の確率を求める。その際、条件付き確率の公式は難解であることから、多くの先行研究(例えば、Böcherer-Linder & Eichler, 2017)で条件付き確率の指導に効果的であることが示されている面積図を利用して、条件付き確率を説明し、図2の確率を求める。最後に、確認問題を解かせ、授業の感想を書かせる。

対象となる生徒は、まずは原理 $\alpha$ より、頻度的な確率解釈を学習していて、主観的な確率解釈を学習していない生徒である。次に原理 $\beta$ より、条件なし確率を学習していて、条件付き確率を学習していない生徒である。現行の学習指導要領においては、数学Aで確率を履修していて、条件付き確率を学習する前の生徒がこの条件に該当する。

#### 4. 授業の実際・分析・考察

##### (1) 授業の実際

分析対象とする授業は、2018年10月に国立大学附属高校1年生40名(男子23名・女子17名)を対象に行われた。本時までには確率の定義、確率の基本法則、独立な試行の確率、反復試行の確率の学習は終了していて、条件付き確率は学習していない。また、ここまでは現行の学習指導要領に基づいて授業が行われているので、生徒の既存の確

表1 図2の解答類型と人数(正答は太字)

| 問 | 解答類型       | 個人による解答(人) | 周囲との話し合い後の解答(人) |
|---|------------|------------|-----------------|
| ① | 上がる        | 0          | 0               |
|   | <b>下がる</b> | <b>18</b>  | <b>21</b>       |
|   | 変わらない      | 22         | 19              |
| ② | 上がる        | 0          | 0               |
|   | <b>下がる</b> | <b>19</b>  | <b>19</b>       |
|   | 変わらない      | 21         | 21              |

率解釈は頻度的な確率解釈であると考えられる。授業者は当該クラスの授業を普段から担当している教師であり、授業前に筆者の研究目的を共有している。

最初に、解答用紙を配布し図2を解かせた。問題は教師が1問ごとに教室前のテレビに提示し、まずは個人で解答させ、その後周囲で話し合いをさせた。この時、図2で登場する「あなた」は解答者自身であることを伝えた。次に、周囲との話し合いの結果で答えが変わるようであれば、別欄で設けた解答欄に修正後の解答を書くよう指示した。また、問②を提示した後に、問①の解答を修正しないようにも指示した。

問①では18名が「下がる」と解答し、22名が「変わらない」と解答した(表1)。周囲との話し合いの後、教師は3名の生徒を指名して自身の考えを発表させた。指名された生徒のうち、TsuboとIkeは「どちらも当たる可能性は低いから、あなたが当たればY君が当たる可能性は下がる」ことを理由として「下がる」と答えた。一方Doiは「わたしが引いたときに、すでにY君は引いているから」ということを理由として「変わらない」と答えた。3人の意見が出た後、教師は再度周囲との議論の時間を設定し、必要があれば周囲との話し合い後の解答欄の加筆・修正をするよう促した。結果的に、2名の生徒が「変わらない」から「下がる」へと変更しただけで、回収した解答用紙に記載されたYamaの「下がるのもあると思ったけど、なぜなのか理由がピンときそうでこなかったから変わらない」というコメントにあるように、どちらの立場の生徒も、異なる立場の生徒を説得することができ

なかった。

問①の解答の加筆・修正の時間を少し設けた後、問②を提示した。問②では、19名が「下がる」と解答し、21名が「変わらない」と解答した(表1)。そこで教師は周囲との話し合いの後、2名の生徒を指名して自身の考えを発表させた。まず、Kodaは「下がる」と解答し、理由は問①における Tsubo と Ike と同じであると述べた。次に指名された Yoko は「変わらない」と答えた。理由は、「先に Y 君が引いているから変わらない」という、問①における Doi の理由と同型なものであった。2人の意見が出た後、教師は再度周囲との議論の時間を設定し、必要があれば周囲との話し合い後の解答欄の加筆・修正をするよう促した。しかし、解答を変えた生徒はいなかった。

図2の解答が終わり、解答用紙を回収した後、教師は教室全体で意見がまとまらなかったことに言及し、それを説明するモデルとして条件付き確率を導入した。条件付き確率の導入は、Y

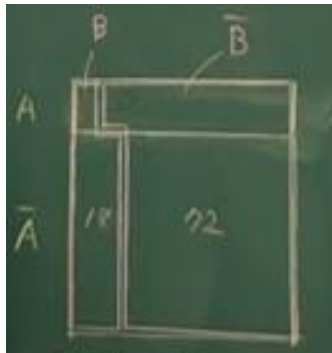


図3 図2を表す面積図

君が当たるという事象を事象 A、あなたが当たるという事象を事象 B とした面積図(図3)を利用して、問①の確率を求めながら行われた。問①の解説を終え、問②の解説に入る前に、教師が問①と②の違いについて生徒(Nit)を指名して聞いた。教師がこの質問をした理由は、周囲との話し合いの際に「誰の目線から確率を考えているのか？」という議論をしていたグループがいたからである。Nit は周囲の生徒と少し話し合い、「同じ」と答えた。Nit のように「同じ」と考えた生徒が多かった一方、Y 君の立場で確率を考えた生徒もいたことから、教師は「Y 君の立場では状況が異なるが、あなたの立場では、Y 君が自身の引いたくじを見ていようが見ていまいが、確率を考えるあなたにその情報が伝わっていなければ、あなたから見た確率は同じである」と説明した。

問②の解説が終了した後、教師は「時間的に後の

出来事が前の出来事の確率に影響を与えることに違和感があるかもしれないが、自分にとって情報が無ければ、既に運命は決まっていたとしても確率は1ではない」と授業をまとめ、確認問題と授業の感想に取り組みさせた。

確認問題は、「時間軸の問題」(図1)とした。条件付き確率を利用して正しく答えを求めることができた生徒は、40名中37名であった(92.5%)。

## (2) 分析と考察

本節では、開発した教材と授業が原理  $\alpha$ 、 $\beta$  に基づいた学習を支援することができたかについて検証する。対象として、問①と②で「変わらない」と答えた生徒と、「下がる」と答えた生徒を一名ずつ選び (Yama と Tsubo)、彼らの発言やワークシートの記述に基づいて分析と考察を行う。

### ① 学習の原理 $\alpha$ について

問①で、まずは個人解決で半数の生徒が「変わらない」と答え、もう半数が「下がる」と答えた。この点は、授業計画段階での予想通りであった。しかし、Yama のコメントからわかるように、「変わらない」と答えた生徒は、自分とは異なる考えをする他者の存在を認識しているものの、それに納得することはできなかった。この要因としては、「下がる」と答えた生徒の理由が、「どちらも当たる可能性は低いから、あなたが当たれば Y 君が当たる可能性は下がる」というものであったことが挙げられる。この理由は、条件なし確率を利用して  $P(A \cap B) < P(\bar{A} \cap \bar{B})$  であることを根拠としているのであって、それでは時間的に前の出来事が後の出来事の確率に影響を与えることが説明できていない。「下がる」と答えた Tsubo が授業の感想として、「条件付き確率を用いれば説明ができた」と書いているように、「下がる」と答えた生徒は、自身の考えを表現するモデルを有していなかったことから、適切に説明することができなかったのである。

以上より、「変わらない」を選択した生徒は、「下がる」と答えた生徒の理由に納得できなかったことから、頻度的な確率解釈が適用できないことを認識することはできなかった。一方で、Yama の「下がるのもあると思った」というコメントからわかるように、主観的な確率解釈を認識するこ

とはできていた。すなわち、「下がる」と「変わらない」で意見が分かれる教材の問題設定と、生徒同士の対話によって、原理  $\alpha$  に基づいた学習を一定程度支援することができたといえよう。

## ② 学習の原理 $\beta$ について

上述の Tsubo ように、問①と②で「下がる」と答えた生徒は、図2を解く場面では、確率は事象に対して適用されない場合もあることを認識しているが、それを説明するモデルを有していなかった。このことから、条件なし確率では自身の考えを適切に表現できなかつたことで、主観的な確率解釈をモデル化する新たなモデルを必要とする場面を設定できたと考えられる。さらに Tsubo が「条件付き確率を用いれば説明ができた」とコメントしていることから、主観的な確率解釈をモデル化するものとして、条件付き確率を学習していることがわかる。

また、Yama のように「変わらない」と答えた生徒も、上述のように「下がる」という解答の理由として条件なし確率を用いた理由には納得していないことから、「下がる」という解答に対しては、既存のモデルである条件なし確率が適用できないことを認識している。ゆえに、条件なし確率では、主観的な確率解釈をモデル化することができないことを認識させる場面を設定できたことがわかる。さらに Yama は、授業の感想で「同じくじでも後に引いた人の結果を知っているか、知らないかだけで先に当たりを引ける確率が変わるのが驚きだった」と書いていて、確認問題は条件付き確率を利用して正答している。このことから、「変わらない」と解答した生徒も、条件付き確率を根拠とすることで「下がる」という主観的な確率解釈に基づく解答に納得し、それと同時に、頻度的な確率解釈が適用できない場合もあることを認識している。以上より、「下がる」と「変わらない」のどちらを答えた生徒に対しても、まずは主観的な確率解釈を認識させ、その後に条件付き確率を導入することによって、原理  $\beta$  に基づいた学習を支援することができたといえよう。

さらに、確認問題の正答率は 92.5%であった。勿論、条件付き確率を習った直後であることが正答率を高めた要因の一つであるとは考えられる。

しかし、松浦(2006)が図1と同型の問題で実施した調査では、問題が「最初の玉が白玉である確率は、黒玉である確率と比べて大きいか、同じか、小さいか」という、解答の理由を問わない選択式の形式で提示されたにもかかわらず、高校1年生の正答率は 36%であった。松浦(2006)の調査では解答の理由は問われなかったことから、正解者のうち条件付き確率を利用して確率を求めることができた生徒はさらに少ないと考えられる。ゆえに正答率 92.5%という結果から、開発した教材と授業が、原因の確率の理解を目標とした教材と授業として有効であったことが確認された。

## 5. おわりに

本稿では、どのような教材と授業が、原因の確率の理解を目標とした条件付き確率の学習を支援するのかを明らかにすることを目的とした。まずは、原因の確率を理解するためには「主観的な確率解釈」と「主観的な確率解釈と条件付き確率の関連」が必要であることから、それぞれをどのように生徒が学習するべきであることを示した。結果、「 $\alpha$ : 主観的な確率解釈は、頻度的な確率解釈が適用できないと認識することを契機として学習する」と「 $\beta$ : 条件付き確率は、条件なし確率では、主観的な確率解釈をモデル化できないことを認識し、主観的な確率解釈をモデル化するものとして学習する」を、学習の原理として構築した。次に、原理  $\alpha$ ,  $\beta$  に基づいた学習の支援を目指した教材が具備すべき条件として、「a: 事象に関する情報に対して確率は適用されると考えさせる」と「b: 結果に対する原因の確率を考えさせる」を挙げた。そして、条件 a, b を満たす教材を開発し、それを用いた授業を開発した。最後に、授業の実践・分析・考察を行うことで、その有効性を検証した。教材と授業の有効性の検証については特定の生徒の発言や記述に基づく事例研究であり、そのまま一般化できるわけではないが、結果として、原理  $\alpha$ ,  $\beta$  に基づいた学習の支援を目指した教材と授業が、原因の確率の理解を目標とした条件付き確率の授業として有効であることが確認された。

今後の課題は、2つある。第1に、生徒が頻度的な確率解釈を適用できないことを認識させる場



面設定を再考することである。本稿で開発した授業では、条件付き確率の学習後に、頻度的な確率解釈を適用できないことを認識させることができた。しかし、原理  $\alpha$ ,  $\beta$  に基づけば、まずは頻度的な確率解釈が適用できないことを認識させ、その後に条件付き確率を指導することが望ましい。本稿では、生徒同士の対話によって、頻度的な確率解釈が適用できないと認識させることができると考えていた。しかし実際には十分に達成できなかったことから、どのような教材や授業がそれを達成し得るのかについて、今後検討していきたい。第2に、より多様な生徒で教材と授業の有効性の検証を行うことである。教材と授業の有効性や一般性を高めるためにも、公立学校など他の学校においても、授業を行うことが必要である。

#### 註

- 1) そのグループ内の一人である Nobu は、Y 君の立場で確率を常に考えていたため、問①では Y 君は自分のくじを見ていないから、あなたが当たりであった時に確率は下がり、問②では Y 君は自分のくじの結果を知っているから、あなたが当たりであったとしても確率は変わらないと答えていた。同様に考えた生徒が、Nobu の他にもう 1 名いた。

#### 付記

本稿は、JSPS 科研費(課題番号: 18J10445)の助成を受けて行われた研究の一部である。

#### 引用・参考文献

- Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and Probability in High School*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Böcherer-Linder, K., & Eichler, A. (2017). The impact of visualizing nested sets. An empirical study on tree diagrams and unit squares. *Frontiers in Psychology*, 7.
- Carranza, P., & Kuzniak, A. (2008). Duality of probability and statistics teaching in french education. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics*. Granada: ICMI and IASE.
- Chernoff, E. J. (2008). The state of probability measurement in mathematics education: A first approximation. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 23, 1-23.
- Devlin, K. (2014). The Most Common Misconception About Probability? In E. J. Chernoff, & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking: Presenting plural perspectives. Advances in Mathematics Education 7* (pp.ix-xiii). Berlin: Springer.
- Díaz, C., & Batanero, C. (2009). University students' knowledge and biases in conditional probability reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(3), 131-162.
- ギリース, D. (2004). 中山智香子 (訳). 確率の哲学理論. 日本経済評論社.
- 五十嵐慶太 (2014). モデル化という視点から見た条件付き確率に関する困難性: 「時間軸の問題」を用いた分析. *数学教育学論究*, 96, 1-8.
- 石橋一昂 (2017). 意思決定に求められる確率判断能力の育成に向けた確率教育に関する一考察. *数学教育学研究*, 23(2), 83-90.
- 石橋一昂 (2018). 否定論の視点から見た条件付き確率の概念形成に関する研究. 第 51 回秋期研究大会発表集録, 73-80.
- 石橋一昂 (印刷中). 確率解釈の形成を志向する確率カリキュラム開発. *数学教育学研究*.
- 岩崎秀樹 (1992). 数学学習における「否定」の研究(1). *数学教育論文発表会論文集*, 25, 13-18.
- 松原望 (2013). 松原望 統計学. 東京図書.
- 松浦武人 (2006). 児童の確率判断の実態に関する縦断的・横断的研究. *数学教育学研究*, 12, 141-151.
- マグレイン, S, B. (2013). 富永星 (訳). 異端の統計学 ベイズ. 草思社.
- 文部科学省 (2019). 高等学校学習指導要領(平成 30 年告示)解説 数学編 理数編. 学校図書.
- 竹内啓 (2018). 歴史と統計学: 人・時代・思想. 日本経済新聞出版社.