否定論の視点から見た条件付き確率の概念形成に関する研究

石橋　一昂
広島大学大学院教育学研究科院生 (日本学術振興会特別研究員)

要　約

先行研究では，条件付き確率の困難性の要因として，条件付き確率とその関連概念との混同が指摘されている．そこで本研究では，2 つの概念間の関係を否定によって特徴づける否定論を用いることで，関連概念との繋がりを考慮した条件付き確率の概念形成の過程を明らかにすることを目的とする．

考察の結果，条件付き確率の概念形成の過程は，次の通りである．最初に，①条件なし確率が「得られた条件(情報)を考慮した適切な確率モデルを導出することができない」ことから，②「それまで同様に確からしいと考えていた事象が同様に確からしくなくなる」ことで条件付き確率が必要となり，③「確率は事象に対する情報を定量化したものである」との見方によって条件付き確率の概念が再構成される．その後，④「得られた情報を考慮しても，考慮していないモデルから算出された確率値と変わらない場合(すなわち，$P_A(B) = P(B)$)」があることで，条件付き確率の適用範囲が明確にされる．さらにこの理論的考察から，適切な条件付き確率の指導に向けた課題を導出した．

キーワード：条件付き確率　概念形成　否定論

1．はじめに

時々刻々と情報が更新される今日の知識基盤社会においては，学校を超えた市民生活や職場などにおける意思決定能力の習得がすべての市民に要請されている(Batanero ほか，2016)．意思決定(decision making)とは,「自分の好みや考えにしたがって複数の可能性を 1 つに絞ること」(服部ほか, 2015，p.146)と定義され，ここでの好みや考えは将来起こる事柄に対する確率により選考されることから，すべての意思決定は確率判断に基づくものである(マンクテロウ，2015)．以上より今日的な能力の育成として確率概念は重要視されている．その中でも特に，今日の意思決定環境はリスクが潜んでいるなど不確定であることから(竹村ほか, 2004)，ある事柄が起こる頻度を客観的に求めて確率を定める客観的確率に基づいた思考ではなく，信念やデータにより柔軟に確率を更新する主観的確率に基づいた思考が必要であるとされている(例えば，Borovcnik，2012)．確率の更新を行う理論がベイズの定理に他ならない(松原, 2013)ことを考慮すれば，とりわけベイズの定理に基づいた意思決定能力の育成が確率教育に要請されていると言えよう．

ベイズの定理は条件付き確率を発展させることで導出されるものである．ゆえに，平成 21 年 3 月告示の現行カリキュラム(文部科学省, 2009)において数学 C から数学 A へ移行し，より多くの高校生が履修することとなった条件付き確率は数学教育において重要な学習内容となる．しかしながら条件付き確率については様々困難性が指摘されている(例えば，五十嵐，2014)．その中でも，現行カリキュラムにおいて条件付き確率を学習した高校 2 年生を対象に実施した石橋(2017)の調査によれば，学習者は条件付き確率 $P_A(B)$，積事象の確率 $P(A \cap B)$，事象 B の確率 $P(B)$ の 3 つを混同することが指摘されている．またその要因として，条件

付き確率と，独立事象の確率などの条件付き確率の関連概念との繋がりが学習者にとって希薄であることを挙げている. 以上を考慮すれば, 関連概念との繋がりによる条件付き確率の概念形成の過程を明らかにすることは，今日の確率教育において重要な課題である.

以上より本研究は，関連概念との繋がりによる条件付き確率の概念形成過程を明らかにし，それを用いて，適切な指導の開発に向けた課題を導出することを目的とする. また, 理論枠組みとして否定論を採用する. 後に詳しく述べるが, その理由としては否定論が, 数学的概念形成の過程を, その関連概念との否定関係により特徴づけていることが, 上述した本研究における課題意識と整合的であることが挙げられる.

2．条件付き確率およびその関連概念

(1) 条件付き確率

坪井ほか(2011)によれば, 条件付き確率は次のように定義される(pp.55-56).

> 事象 A が起こったときに，事象 B が起こる確率を，事象 A が起こったときの事象 B が起こる条件付き確率といい，$P_A(B)$ で表す.
>
> 各根源事象が同様に確からしい試行において，その全事象を U とする．また，A，B を 2 つの事象とし，$n\ (A) \neq 0$ とする[1]. このとき，条件付き確率 $P_A(B)$ は,
>
> 「A を全事象とした場合の事象 $A \cap B$ の起こる確率」と考えられ，次のように表される.
>
> $$\boldsymbol{P_A(B) = \frac{n\ (A \cap B)}{n\ (A)}} \quad \cdots ①$$
>
> ①の右辺の分母と分子を $n(U)$で割ると,
>
> $$\frac{n(A)}{n(U)} = P(A),\quad \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = P(A \cap B)$$
>
> であるから，次の等式が得られる.
>
> $$\boldsymbol{P_A(B) = \frac{P\ (A \cap B)}{P\ (A)}} \quad \cdots ②$$

具体的には, 1 から 10 までの番号をつけた 10 枚のカードから 1 枚を取り出す試行を行う場面において，取り出したカードの番号が奇数であることがわかっているとき，その番号が 3 の倍数である確率が挙げられる(坪井ほか，2011).

(2) 条件付き確率の関連概念

上述のように, 学習者は条件付き確率 $P_A(B)$, 積事象の確率 $P(A \cap B)$, 事象 B の確率 $P(B)$ の 3 つを混同する傾向がある．この要因をそれぞれの公式の形から考えると，まず，条件付き確率 $P_A(B)$ において，積事象の確率 $P(A \cap B)$ はその分子にあたる．つまりこれら 2 つの混同は，条件が与えられたことによって標本空間が縮小されたことを考慮していないことに起因すると考えられる．また条件付き確率 $P_A(B)$ において事象 B の確率 $P(B)$ は，条件付き確率 $P_A(B)$ の定義である「事象 A が起こったときに，事象 B が起こる確率」(坪井ほか，2011，p.55)のうち，条件である「事象 A が起こったときに」という文言を捨象したものと一致する．つまりこれら 2 つの混同は，事象 A が起こったことを考慮していないことに起因すると考えられる. 以上より, $P_A(B)$ と $P(A \cap B)$ の混同と, $P_A(B)$ と $P(B)$ の混同を整理すると，両者共に条件を正しく処理していないことが混同の要因である．具体的には，$P_A(B)$ は公式の分母が事象 A の確率であるのに対し, $P(A \cap B)$ と $P(B)$ の公式の分母は，全事象 U の確率である．そこで第 1 に，条件付き確率の関連概念を，全事象 U の確率を分母とする確率とし, それを便宜上「条件なし確率」と定義する．尚，「条件なし確率」とは，親学問である確率論の視点から(藤澤，2006)， $P(B)$ や $P(A \cap B)$，$P(A \cup B)$ などの，条件付き確率を学習する以前のそれらを指す.

また，Batanero & Borovcnik(2016)は，ベイズの定理の理解には「条件付き確率」と「独立事象の確率」の理解が不可欠であるとしながらも, それらは「複雑に絡み合っている」(Batanero & Borovcnik, 2016, p.74)と困難性を指摘している．このことは石橋(2017)での調査結果からも確認できる．先ほど, $P(B)$ は条件なし確率の要素としたが, 独立事象の確率の定義が $P_A(B) = P(B)$ であるという視点から考慮すれば，$P_A(B)$ と $P(B)$ の混同は，条件付き確率と独立事象の確率を混同している例と捉えることもできる. すなわち, 独立事象の確率は条件付き確率の関連概念であり，条件付き確率の困難性の克服には，独立事象の確率との関係や差異性を明確に認識する必要があることが指摘される.

さらに，独立事象の確率は条件付き確率により導出された乗法定理を用いて定義される(藤澤, 2006). 以上より第2の関連概念として,「独立事象の確率」を設定する．

① 条件なし確率

上述の通り，本研究における「条件なし確率」とは，公式の分母を全事象 U とするもののうち，数学教育で条件付き確率を学習する以前のそれらを指す．具体的には，ある事象 A の確率 $P(A)$ や，事象 A と事象 B がともに起こるという積事象 $P(A \cap B)$ の確率, 事象 A または事象 B が起こるという和事象 $P(A \cup B)$ の確率である． (詳しくは, 坪井ほか(2011, p.34-54)や藤澤(2006, pp.1-7)を参照)

② 独立事象の確率

坪井ほか(2012)によると, 独立事象は次のように定義される(pp.135-136).

> 一般に，2つの事象 A，B において
>
> $$\boldsymbol{P_A\ (B) = P\ (B)} \quad \ldots①$$
>
> が成り立つとき，事象 A の起こることが事象 B の起こる確率に影響を与えない．このとき，事象 B は事象 A に**独立**であるという．
>
> ①が成り立つとき，乗法定理により，次の式が成り立つ．
>
> $$\boldsymbol{P\ (A \cap B) = P\ (A) P\ (B)} \quad \ldots②$$
>
> $P\ (A) \neq 0$，$P\ (B) \neq 0$ とする．このとき，逆に②が成り立つとすると，その両辺を $P\ (A)$ で割って①が導かれるから，①と②は同値である．
>
> 同様に考えて，②は等式 $P_B\ (A) = P\ (A)$ とも同値である．
>
> ゆえに，事象 B が事象 A に独立ならば，事象 A は事象 B に独立となる．したがって，$P\ (A \cap B) = P\ (A) P\ (B)$ が成り立つとき，2 つの事象は互いに独立であるといってよい．

具体的には, 1 から 10 までの番号をつけた 10 枚のカードから 1 枚を取り出すとき，その番号が奇数であるという事象と, 5 の倍数であるという事象が挙げられる(坪井ほか，2012).

3．否定論に基づく概念形成の段階

前章より, 条件付き確率の困難性の要因を, 条件なし確率や独立事象の確率との混同と特徴づけた. 本研究ではこの困難性の克服に向け，条件付き確率の概念形成とその関連概念との関係について考察するための理論枠組みとして，否定論を採用する．

本研究で条件付き確率の困難性の要因と考える, 複数の概念を混同しているという状態は，すなわち概念 A と概念 B の区別が出来ていないということである. 後に詳しく述べるが, 否定論では概念 A と非 A を明確化することで新たな概念 B を生み出し，それにより概念 A と概念 B の区別が明確となる過程を記述する. また否定論は, コンセプションの動態を記述する枠組みであることから，概念形成過程を考える上で有効な枠組みである．以上の理由から本研究では，否定論を理論的枠組みとする．

(1) 岩崎(1992)の否定論

岩崎(1992)は，ベルグソン(Bergson, H. L.)らの否定に関する見識から，数学的認識の展開における否定の必要不可欠性を指摘している. 氏は, 数学的概念の発達は対象の本質の捉え方により決定するとし, その本質は, 辞書的な意味である「中心的な構成分子，主要成分，中心的意味」ではなく，substance の語源から「下位にあるもの」･「それ自身を支えるもの」として捉える．すなわち，本質とは「外部にあってそれ自身を限定したり, 規定しうるもの」(岩崎，1992，p.16)であり，「(ある数学的概念)A であることを規定するすべての非 A(￢A)が，A の本質ということになる」(岩崎，1992，p.16)(丸括弧内は筆者追記). 例えば, 数学的概念「(1 とその数以外の数で)わり切れる数」の本質は,「￢(わり切れる数)」すなわち「わりきれない数」である. つまり「わり切れる数」は,「「わり切れない数」でない数」として規定される．

(2) 否定論に基づく概念形成の段階

岩崎(1992)は，3 つの否定により数学的概念の形成過程を特徴づけた. 次に中野･岩崎(1999)により, 否定の役割が，当該概念の適用不可能性を示すものである外延的否定と，性質や定義の差異性を明確化するものである内包的否定とに分類・明確化された．その後大谷(2015)は，岩崎(1992)の否定論に，中野・岩崎(1999)の概念形成における否定の分類と役割の視点を補う形で，否定論に基づく概念形成の過程を示している．以下では，大谷(2016,

p.145)の論考を引用し，各段階について概観する．

① 外延の限定

岩崎(1992，pp.16-17)はまず，数学的概念の本質(substance)を意識する必要があると述べる．数学的概念の本質への意識化は，当該概念の適用不可能性を意識することに他ならない．なぜなら，数学的概念¬A を意識することは，概念 A のもつ性質を対象¬A に適用することができないことを意識することに換言できるからである．中野・岩崎(1999, pp.328-329)による否定の役割の分類に基づけば，このような否定の役割は，外延的否定である．外延的否定によって，概念 A の外延 E_A が限定され，明確にされる．例えば，数「4」や「6」は概念「わり切れる数」の外延に含まれているが，数「5」や「7」はそうではない．

② 内包の明確化

岩崎(1992，p.17)によれば，新たな数学的概念 B は，前段階で意識された否定表現の概念¬A を否定によって肯定的に命名することで生じる．例えば，数学的概念「素数」への質的変容は，「¬(わり切れる数)」すなわち「わり切れない数」という否定的状況が，「約数がない」という否定的な特徴づけによって肯定的に命名されることで起こる．つまり「素数」は数「5」や「7」のような「約数がない数」として認識される．

否定的状況の否定による肯定的命名は，肯定的状況である概念 A と否定的状況である概念¬A との差異を否定によって明確にし，後者を前者とは異なる新しい内包をもつ概念として捉え直すことである．概念 A の内包が否定されることによって，新たな概念 B の内包が，概念 A が有している性質ではない性質として明確になる．このような新しい概念の内包を明確にする否定は，中野・岩崎(1999, pp.329-330) による否定の役割の分類に基づけば，内包的否定である．この段階では，内包的否定により，概念 B の内包 I_B が明確になる．

③ 概念の再構成

岩崎(1992，p.17)は，否定に基づく概念形成の最後の否定として，基盤となった概念 A と¬A に対する，新しい数学的概念 B の観点からの否定をあげている．この否定により，概念 A と¬A に新たな秩序がもたらされる．概念 A は概念¬B として特徴づけられる．例えば，新しく形成された数学的概念「素数」の視座から，「わり切れる数」と「わり切れない数」について，「1 は素数ではない」や「2，3 は素数であるからこれ以上分けることができない」と否定して特徴づけることにより両者が組織される．この否定により，「4」や「6」のような「わり切れる数」は，「¬(素数)」すなわち「素数ではない数」として認識される．

否定によって新たな視点から概念を再構成することは，両者の適用範囲や性質を明確にすることである．つまり，新しい概念 B の内包 I_B の否定によって基の概念 A の内包 I_A が見直されたり，新しい概念 B の外延 E_B の否定によって基の概念 A の外延 E_A が見直されたりして，概念 A と概念 B が内包的・外延的に再構造化される．

以上の各段階は，表 1 にまとめられる．「外延の限定」に至る前の状態では，数学的概念 A がどんな対象にも適用可能であると誤って認識している状態である．例えば，「全ての数はわり切れる数である」とみなしている状態といえる．

表 1　否定論に基づく概念形成の段階
(大谷，2015，p.117)

1. 外延の限定
概念 A の外延的否定により，外延 E_A が限定される段階
2. 内包の明確化
概念 A の内包的否定により，内包 I_B が限定される段階
3. 概念の再構成
概念 B の外延的否定や内包的否定により，概念 A と概念 B が再構成される段階

また，こうして創られる概念 B は，概念¬B との差異性の観点から新たな対象である概念 C に遭遇することで外延が限定される．その対象は概念 B の本質であることから，その本質の意識化は概念 B の適用範囲の明確化につながり，したがってその概念は適切に使用されることができるようになる．このことは，新たな概念を形成するためには，内包が明確にされた概念の外延を限定することま

でを射程に入れなくてはならないことを示唆する(大谷，2016，p.146).

4．条件付き確率の概念形成の過程

第 2 章より，条件付き確率とその関連概念は，「条件なし確率」,「条件付き確率」,「独立事象の確率」という順で並べることができる．ここで，本研究で形成過程を明らかにしたい概念である条件付き確率が真ん中に位置していることは，上述の「新たな概念を形成するためには，内包が明確にされた概念の外延を限定することまでを射程に入れなくてはならない」という大谷(2016, p.146)の論考とも整合的である．以上より本章では，第 1 に条件なし確率と条件付き確率の概念間の発達，第 2 に条件付き確率と独立事象の確率の概念間の発達について，否定論の視座から明確にしていく．

(1) 条件なし確率から条件付き確率へ

条件なし確率は，ある試行において，各根元事象が同様に確からしいときについて，起こり得るすべての場合のうち当該事象がどの程度起こることが期待できるかを考える場面で用いられる．一方，条件付き確率では，条件(情報)[2]を獲得することによって，それまで同様に確からしいと判断し，等確率であった 2 つ(以上)の事象の確率が，等確率でなくなる場合がある．例えば，1 から 10 までの番号をつけた 10 枚のカードから 1 枚を取り出す試行を考えると，条件が無い状況では取り出したカードの番号が 1 である確率と 2 である確率はどちらも 1/10 と等しい．しかし取り出したカードの番号が奇数であるという条件を獲得すると，その番号が 1 である確率は 1/5，2 である確率は 0 となり，両者の確率が異なり，2 つの事象が同様に確からしくなくなる．という具合である．すなわち，条件(情報)が与えられた場合，条件なし確率では，得られた条件(情報)を確率計算に利用できていないことを意識させ，その適用範囲が限定されることができる．したがって，条件なし確率から条件付き確率への変容の最初の段階である外延の限定は,「条件なし確率では，得られた条件(情報)を考慮した適切な確率モデルを導出することができないことを認識する」段階であると考えることができる．

外延の限定の段階より，それまで同様に確からしいと考えていた事象が，同様に確からしくなくなる場合の存在が明らかとなった．したがって，得られた条件(情報)を考慮した確率モデルが要求される．そこで，得られた条件(情報)の下で，当該事象の起きる確率を導出するようなモデルを,「条件付き確率」として捉え直す．

内包の明確化の段階より，関連概念である条件付き確率の内包が明らかになったら，今度はその視点から，条件なし確率を否定により特徴づける．条件なし確率とは，例えば「当該事象に対する条件(情報)を有していない確率」として捉え直すことができる．このようにすると両概念は再構成され，事象に対する条件(情報)を有しているか否かを基準として使い分けることができる．この段階をまとめると，表 2 のようになる．

表 2　条件なし確率から条件付き確率へ

1. 外延の限定
条件なし確率では，得られた条件(情報)を考慮した適切な確率モデルを導出することができないことを認識する．
2. 内包の明確化
「同様に確からしいと考えていた事象が同様に確からしくなくなる」ことから，条件(情報)の下で，当該事象の起きる確率を導出するようなモデルを，条件付き確率として捉え直す．
3. 概念の再構成
条件なし確率は，「当該事象に対する条件(情報)を有していない」モデルである．

確率を確率として指導する限り，事象について定量化したものとしてしか解釈できないが，条件付き確率の視座からこれまでの確率を条件なし確率として特徴づけることで，事象に対する条件(情報)の定量化として解釈できる．このように，確率は事象について定量化したものではなく，事象に対する情報を定量化したものであるという解釈は，今日的に求められる認識である．

(2) 条件付き確率から独立事象の確率へ

上述のように，2 つの事象 A，事象 B が独立であるとは，事象 A が起きたという条件に事象 B が起

きる確率が依存しないということである(2 章(2)②)．すなわち，ある事象の確率を考える際に，得られた情報を考慮しても，考慮していないモデルと同じ確率値が算出されることから，得られた情報が条件にはならない場合があることを意識させ，その適用範囲が限定されることができる．したがって，条件付き確率から独立事象の確率への変容の最初の段階である外延の限定は，「得られた情報を考慮しても，考慮していないモデルから算出された確率値と変わらない場合があること(すなわち，$P_A(B)=P(B)$)を認識する」段階であると考えることができる．

外延の限定より，$P_A(B)=P(B)$ となる場合が挙げられたことから，これを表すモデルとしては，条件付き確率では不十分である．そこで，「ある事象 A が起きたという条件(情報)に，事象 B が起きる確率が依存しない」ことを，事象 A と事象 B が独立であると命名することになる．さらに，独立事象の確率を定義する式として，乗法定理を用いて $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ と表す．以上をまとめて「独立事象の確率」として捉え直す．

内包の明確化の段階より，関連概念である独立事象の確率の内包が明らかになったら，今度はその視点から，条件付き確率を否定により特徴づける．独立事象の確率の定義から，条件付き確率は「$P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$」であり，「$P_A(B)\neq P(B)$，$P_B(A)\neq P(A)$」である．このような特徴づけから，2つ(以上)の事象が対称関係にあるか否かを基準として 2 つの概念は使い分けることができる．この段階をまとめると，表 3 のようになる．

表 3　条件付き確率から独立事象の確率へ

1. 外延の限定
得られた情報を考慮しても，考慮していないモデルから算出された確率値と変わらない (すなわち，$P_A(B)=P(B)$)ことを認識する．
2. 内包の明確化
「事象 A が起きたという条件(情報)に，事象 B が起きる確率が依存しない」とき，事象 A と事象 B が独立であると命名し，$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ と表す．
3. 概念の再構成
● $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$ ● $P_A(B)\neq P(B)$，$P_B(A)\neq P(A)$

「独立」は日常語でもあるため，その影響から独立事象の確率に対しては誤った理解も多い．独立事象の確率を理解するには，事象の対称関係を示す式 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ を十分に理解する必要がある．そのような事象の対称性への意識は，得られた新しい情報が，意思決定において必要な情報かどうかを取捨選択するために重要である．

5．条件付き確率の適切な指導の開発への課題

前章までで，否定論に基づいた条件付き確率の概念形成の過程を明らかにした．本章ではこれに倣い，現行の条件付き確率の指導に関する批判的考察を行い，条件付き確率の適切な指導の開発に向けての課題を導出する．

否定論に基づいた条件付き確率の指導のためには，第 1 に，条件なし確率の適用不可能性を認識し，条件付き確率の必要性を導出するために，「得られた条件(情報)を考慮した適切な確率モデルを導出することができない」問題状況を設定する必要がある(表 2 第 1 段階)．しかしながら高等学校数学 A の教科書(全 5 社)における条件付き確率の導入場面では，条件なし確率の適用不可能性を認識させ，条件付き確率の必要性を誘発する問題状況は設定されていない(長谷川ほか，2011，p.57 ; 俣野ほか，2011，p.49 ; 岡本ほか，2011，p.64 ; 高橋ほか，2011，p.58 ; 坪井ほか，2011，p.55)．また，現行カリキュラム下での指導実践事例(例えば，山本・熊倉，2017)では，条件付き確率の指導が終了した後のトピック的な教材開発に焦点が当てられており，その導入場面に着目したものではない．したがって，条件付き確率の導入場面では，「得られた条件(情報)を考慮した適切な確率モデルを導出することができない」問題状況を設定する必要がある．しかしながら条件付き確率を未習である学習者には，自らが導出した理論値が条件(情報)を適切に考慮しているか否かを判断することは不可能である．そこで例えば，実験やシミュレーションを用いて経験的データから判断することが考えられ

る．Eichler & Vogle(2014，p.96)によれば，シミュレーションによる経験的データには, さいころの1の目が出る確率が 1/6 であるというような理論的に導出された確率値に対して，その意味を理解するために経験的データを用いるという既知のモデルを調べるための役割のみならず，経験的データを基にして，学習者が未知の理論モデルを構築するという未知のモデルに対する役割もあると述べている．以上より，後者の役割に注目すれば，学習者が導出した理論値と実験やシミュレーションで得られた値が異なる問題状況を設定することで，条件付き確率の必要性が生じることが期待される．

否定論の最後の段階である概念の再構成は，両概念の適用範囲や性質を明確にし，それらを問題状況によって使い分けるために最も重要である(大谷，2016，p.148)．この段階(表 2 第 3 段階)において条件なし確率と条件付き確率を対比し，新しい概念から基となった概念を否定によって特徴づけることで, 両者の混同を避けることができる．このことは，確率を事象に対する情報を定量化したものとして指導することの重要性を主張するものであり，第 4 章とも整合的である．このような活動は長谷川ほか(2011)，俣野ほか(2011)，岡本ほか(2011)，高橋ほか(2011)，坪井ほか(2011)には明記されていないが, 数学 A の確率単元の学習終了後に, 確率の意味について再考する場面を設定することが有効であると考える．

条件付き確率の性質が明確にされれば，次はその適用範囲を明確にするために，条件付き確率の適用不可能性を認識する必要がある．すなわち，「得られた情報を考慮しても，考慮していないモデルから算出された確率値と変わらない(すなわち，$P_A(B)=P(B)$)」ような問題状況を設定する必要がある(表 3 第 1 段階)．坪井ほか(2012，p137)では，2 つのさいころの出た目とその和を題材とし，確率の理論値から 2 つの事象が独立か否(従属)かを判定する問題状況が設定されている．この問題を通して, 条件(情報)を考慮しても算出される確率は変わらない場合があることを認識させることで，条件付き確率の適用範囲を明確にすることができると考える．

以上をまとめれば，否定論に基づいた条件付き確率の指導に向けた課題として，導入場面における「得られた条件(情報)を考慮した適切な確率モデルを導出することができない」問題状況の設定と，数学 A の確率単元の学習終了後における「確率は事象に対する情報を定量化したものである」との認識を促す指導の考察の 2 つが挙げられた．

６．まとめと今後の課題

本研究では，関連概念との関係の認識の希薄化により指摘される条件付き確率の困難性の克服を目的とし，岩崎(1992)や大谷(2015)の否定論に基づく概念形成の段階を参考とし，条件付き確率の概念形成の過程について考察した．結果として, 条件付き確率の関連概念として「条件なし確率」と「独立事象の確率」を同定し, 否定論の観点から条件付き確率の概念形成の過程を示した．具体的には, ①条件なし確率が「得られた条件(情報)を考慮した適切な確率モデルを導出することができない」ことから, ②「それまで同様に確からしいと考えていた事象が同様に確からしくなくなる」ことで条件付き確率が必要となり, ③「確率は事象に対する情報を定量化したものである」との見方によって条件付き確率の概念が再構成される．その後，④「得られた情報を考慮しても，考慮していないモデルから算出された確率値と変わらない場合(すなわち，$P_A(B)=P(B)$)」があることで，その適用範囲が明確にされる．

また，否定論に基づいて現行の条件付き確率の指導を批判的に考察することにより，「得られた条件(情報)を考慮した適切な確率モデルを導出することができない」問題状況の設定と，「確率は事象に対する情報を定量化したものである」との認識を促す指導の考察が課題として導出された．さらに，これらの課題に対して，「学習者の計算値とシミュレーションによる経験的データの異なる状況を設定すること」と，「単元末に確率の意味を再考する場面を設定すること」が重要であることを指摘した．しかしながら, 導出された課題を克服するための具体的な指導の考察や実践には至っていない．今後はまずそれに取り組む．さらに，実践の結果に照らして，実践的検証がなされていない表 2, 表 3 の再考にも取り組む．

付記

本研究は JSPS 科研費(課題番号：18J10445)の助成を受けて行われた.

註

1）「n (A)」とは事象 A の要素の個数を指し,「P (A)」とは, 1つの試行において, ある事象 A の起こることが期待される割合(これを事象 A の確率という)を指す (坪井ほか, 2011, p.37).

2）ここで「条件(情報)」と記す理由は,「条件」とは「約束や決定をする際に、その内容に関しての前提や制約となる事柄」(松村, 2006) (下線は筆者加筆)であるからである. すなわち, この意味では, 当該事象とその条件となる事象は常に関係(従属)していることを含意する. しかしながら 2 つ(以上)の事象が独立である場合には, ある事象がその他の事象の前提や制約となる場合はなく, 条件としての機能を有さない. そこで本研究では,「ある物事の内容や事情についての知らせ」(松村, 2006) (下線は筆者加筆)という意味である「情報」という言葉を加えることで事象の独立と従属を包含し,「条件なし確率」,「条件付き確率」,「独立事象の確率」の全てにおいて共通した表現を用いることとする.

引用・参考文献

Batanero, C.ほか 4 名 (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*. Switzerland: Springer International Publishing.

Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and Probability in High School*. Rotterdam: Sense Publishers.

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 5-27.

Eichler, A. & Vogle, M (2014). Three approaches for modeling situations with randomness. In E. J. Chernoff & B. Sriraman, (Eds.), *Probabilistic Thinking: Presenting Plural Perspectives* (pp.75-99). New York: Springer.

藤澤洋徳 (2006). 確率と統計. 朝倉書店.

長谷川考志ほか20名 (2011). 数学A. 第一学習社.

服部雅史ほか 2 名 (2015). 基礎から学ぶ認知心理学－人間の認識の不思議－. 有斐閣.

五十嵐慶太 (2014). モデル化という視点から見た条件付き確率に関する困難性 :「時間軸の問題」を用いた分析. 数学教育学論究, 96, 1-8.

石橋一昴 (2017). 意思決定に求められる確率判断能力の育成に向けた確率教育に関する一考察 : ベイズの定理に着目して. 数学教育学研究, 23 (2), 83-90.

岩崎秀樹 (1992). 数学学習における「否定」の研究(1). 数学教育論文発表会論文集, 25, 13-18.

マンクテロウ, K. (2015). 服部雅史・山祐嗣訳. 思考と推論－理性・判断・意思決定の心理学－. 北大路書房.

俣野博ほか 27 名 (2011). 数学 A. 東京書籍.

松原望 (2013). 統計学. 東京図書株式会社.

松村明 (2006). 大辞林第三版. 三省堂.

文部科学省 (2009). 高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編. 実教出版.

文部科学省 (2018). 高等学校学習指導要領. http://www.mext.go.jp/. (2017.7.23 最終閲覧)

中野俊幸・岩崎秀樹 (1999). 数学教育における「否定」について(□) : 概念形成における「否定」の役割について. 数学教育論文発表会論文集, 32, 327-330.

大谷洋貴 (2015). 統計的概念の形成過程に関する研究 : 否定論に着目して. 数学教育学研究, 21 (2), 113-121.

大谷洋貴 (2016). 否定論を視点とした回帰直線の学習指導に関する一考察. 数学教育学研究, 22 (2), 141-151.

岡本和夫ほか 10 名 (2011). 数学 A. 実教出版.

高橋陽一郎ほか 33 名 (2011). 数学 A. 啓林館.

竹村和久ほか 2 名 (2004). 不確実性の分類とリスク評価－理論枠組の提案－. 社会技術研究論文集, 2, 12-20.

坪井俊ほか 13 名 (2011). 数学 A. 数研出版.

坪井俊ほか 13 名 (2012). 数学 B. 数研出版.

山本達也・熊倉啓之 (2017). 発展的な考え方の育成を重視した確率の教材開発. 日本数学教育学会誌, 99 (3), 4-12.