広島大学附属福山中・高等学校
中等教育研究紀要　第36巻

興味ある微分・積分の授業をめざして

物理･化学的分野の教材から

村上　和男

物理･化学的題材を取り入れた微積分の教材を学習させることにより,生徒は教科書の内容とは違った「自然科学を記述する言葉としての微積分」にふれることができる。このようなことを通して微積分により興味を持たせることができる。

Ⅰ.はじめに

現行の教育課程によれば, 微積分は通常高校2･3年生で学習する。その内容や教材の配列などについては古くから研究されており, 実践は世界的にも高い評価を受けている。また微積分は力学を中心とした自然科学とともに発展してきた。そして自然科学を記述する言葉としての微積分にその本質をみることができる。しかし教科書は教育的配慮からきわめて数学的に書かれており, 物理的な内容は少ない。そこでそれらの教材を取り入れることにより, 教科書とは違った微分･積分に触れることができる。何年間か実践し,生徒に評判のよかった教材を次に示す。

Ⅱ.教材例

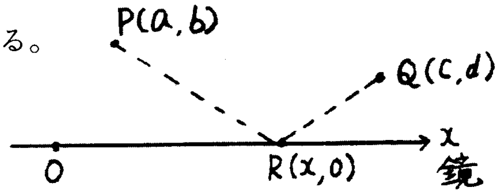
1.鏡による光の反射

Ｆｅｒｍａｔの原理･････光は,通過する時間が最小となるような進路に沿って進む。この原理に従って,反射の法則を導く。同じ媒質内を進む場合は最短距離をとることになる。

(1)平面鏡

点Pから出た光がQに行くのに,鏡のどこでどのように反射するのかを考える。座標を図のように定める。

点P,Qを固定しＰＲＱが最短距離となるようにRを決める。



$l_1(x) = PR = \sqrt{(x-a)^2+b^2}$

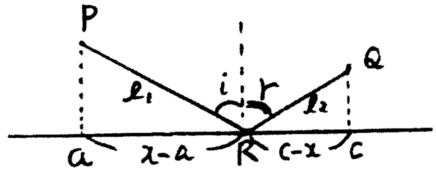
$l_2(x) = QR = \sqrt{(c-x)^2+d^2}$

$l(x) = l_1(x) + l_2(x)$ とおいて $l(x)$ が最小となる条件から反射の法則を導くと

$$l'(x) = \frac{1}{2}\{(x-a)^2+b^2\}^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(x-a) + \frac{1}{2}\{(c-x)^2+d^2\}^{-\frac{1}{2}} \cdot 2(c-x)(-1)$$

$$= \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}} + \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+d^2}}$$

$$= \frac{x-a}{l_1} - \frac{c-x}{l_2}$$



$l'(x) = 0$ となるとき

$\frac{x-a}{l_1} = \frac{c-x}{l_2}$ を満たす。

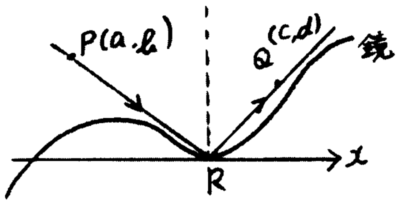
これは $\sin i = \sin r$ を示している。

注:点Ｐの対称点を求めてもすぐできる。

(２)曲がった鏡による光の反射

鏡の曲線を $y=f(x)$ として反射の法則を導く。この場合対称点の作図はできない。点Ｒで反射するときＲを原点に取り,Ｒでの鏡の接線をx軸にする。

Ｐから出た光はＰＲ＋ＰＱが最短距離になるように進む。



Ｐ(a, b), Ｑ(c, d) とおく

まずＲ$(x, f(x))$とおき $l(x)$＝ＰＲ＋ＰＱを $x, f(x)$ で表す。

$$l(x) = l_1(x) + l_2(x)$$
$$=\sqrt{(x-a)^2+(f(x)-b)^2}+\sqrt{(x-c)^2\ (f(x)-d)^2}$$

$l'(x)$ を求める。

点Ｒで$f'(0)=0$, $l'(0)=0$であることを使って,反射の法則を導くと

$$l'(x)=\frac{x-a+f'(x)(f(x)-b)}{l_1(x)}+\frac{x-c+f'(x)(f(x)-d)}{l_2(x)}$$

点Ｒで$f'(0)=0$, $l'(0)=0$だから

$$\frac{-a}{l_1(0)}+\frac{-c}{l_2(0)}=0$$

$l_1(0)=\sqrt{a^2+b^2}=$ＰＲ　　$l_2(0)=$ＱＲ

$$\frac{-a}{\mathrm{PR}}=\frac{c}{\mathrm{QR}}$$

したがって $\sin i = \sin r$　(角度は法線とのなす角度)

２.物体の冷却　微分方程式の応用

教室に熱いコーヒーを入れたカップを持って行き,定期的に(例えば5分毎)にその温度を測定する。測定値をグラフ黒板に図示する一方,微分方程式を解いて得た理論値と比較する。

さまざまな活動を生徒にさせることにより活発な授業となった。

「温度が下がる速さは,室温と物体の温度差に比例する」‥‥ニュートンの冷却の法則

物体の温度: x℃　室温: x_0℃　時間: t

微分方程式を作る

$$\frac{dx}{dt}=-k(x-x_0)$$

これを解くと, $x-x_0=Ce^{-kt}$ (Ｃは積分定数),初期条件 $t=0$ で $x=$Ａとおくと $A-x_0=C$

$x-x_0=(A-x_0)e^{-kt}$

$x=(A-x_0)e^{-kt}+x_0$ となる

例えば室温 $x_0=11$℃,測定し初めの温度 $t=0$でＡ＝83℃であった。

5分後のコーヒー温度は$x=70$℃であったから

$70=(83-11)e^{-5k}+11$, $59=72e^{-5k}$

$e^{-5k}=\frac{59}{72}\fallingdotseq 0.82$

この値を使って理論値を求めることができる。

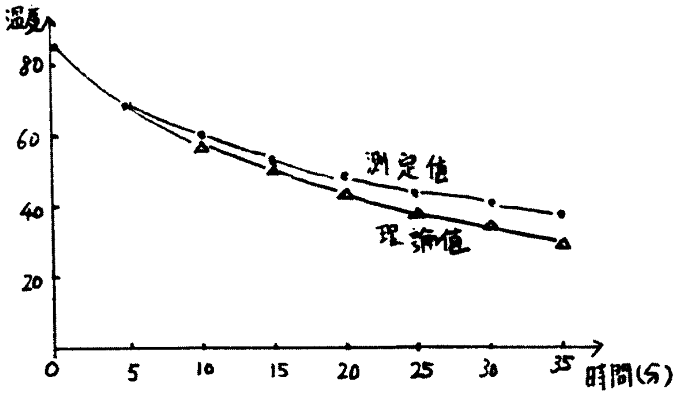
10分後の温度は$x=(83-11)\times e^{-10k}+11=72(e^{-5k})^2+11=72\times 0.82^2+11\fallingdotseq 59$℃

15分後の温度は$x=(83-11)\times e^{-15k}+11=72(e^{-5k})^3+11=72\times 0.82^2+11\fallingdotseq 51$℃

などと計算できる。

また実際の測定値は次のようになった。理論値とともにグラフにも示す。

時間(分)	測定値	理論値
0	83	*
5	70	*
10	60	59
15	53	51
20	48	44
25	44	38
30	40	33
35	37	29



測定後15分くらいまでは,理論値とほぼ一致する。

3.近似式の利用

$x\fallingdotseq 0$のとき，$(1+x)^r\fallingdotseq 1+rx$ の利用

高さhmにおける重力加速度は,地上でのそれに比べてどれだけ小さいか近似計算を行う。

地球の半径:R　　地球の質量:M　　万有引力定数:G

地上での質量mの物体に働く力は,万有引力の法則から

$F=\frac{GMm}{R^2}$ 重力加速度をgとすると $F=mg$だから

$g=\frac{GM}{R^2}$ $\cdots$①

高さhでの重力加速度をg' とすれば①より

$$g'=\frac{GM}{(R+h)^2}$$

$$=\frac{GM}{R^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^2}$$

$$=\frac{GM}{R^2}\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2}\fallingdotseq\frac{GM}{R^2}\left(1-\frac{2h}{R}\right)=g\left(1-\frac{2h}{R}\right)$$

故に $g-g'=\frac{2gh}{R}$

すなわち$2g\cdot\frac{h}{R}$ だけ小さくなる

具体的に富士山頂での減少分を計算する。

$h=3800\mathrm{m}=3.8\times 10^3\mathrm{m}$, $R=6370\mathrm{km}=6.37\times 10^6\mathrm{m}$, $g=9.8\mathrm{m/s^2}$ を代入すると減少分は $1.2\times 10^{-2}\mathrm{m/s^2}$ となる。

4.地球の年齢の推定

微分方程式の応用（放射性元素の崩壊）

N:放射性原子の個数, t:時間, k:崩壊定数（原子に固有な定数）とすると

$\dfrac{dN}{dt}=-kN$　　　これを解くと

$N=N_0{}^{-k(t-\tau)}$ ・・・①　　計測開始時 τ のとき,原子が N_0 個あったとする。

原子の個数がはじめの半分になるのに要する時間を半減期という。それを求めると

$$\frac{N}{N_0}=e^{-k(t-\tau)}=\frac{1}{2}$$

$$t-t_0=\frac{\log 2}{k}=\frac{0.693}{k}$$ ・・・②が半減期

ウラニウムの同位体の存在比を使って地球の年齢を推定することができる。

U^{238}（ウラン238,原子番号は左上に書くべきであるがここでは右上に書く）の半減期は 4.5×10^9 年, U^{235} の半減期は 7.1×10^8 年である。

現在地球のウランの同位体存在比は U^{238} が99.28%, U^{235} が0.72% である。地球ができたときは等量ずつ存在したが,U^{235} の半減期が短いためにこのような存在比になったと仮定する。

t:地球の年齢, k:U^{235} の崩壊定数, $-kt$:U^{238} の崩壊定数

$N_{235}=N_{0235}e^{-kt}$, $N_{238}=N_{0238}e^{-kt}$, $N_{0235}=N_{0238}$ と仮定する。

$$\frac{e^{-kt}}{e^{-kt}}=\frac{N_{238}}{N_{235}}=\frac{99.28}{0.72}=138$$

$$-(\kappa-k)t=\log 138=4.91$$ ・・・③

ここで $\kappa=\dfrac{0.693}{\theta}=1.54\times10^{-10}$（$\theta$ は U_{238} の半減期,②より）

同様に　$k=9.76\times10^{-10}$, これらの値を③に代入して

$$t=\frac{4.91}{8.22\times10^{-10}}\fallingdotseq 6\times10^9 \text{年}$$

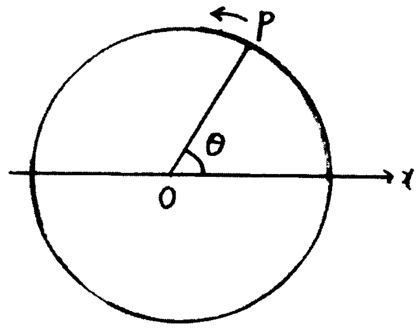
年齢は約60億年になる。U^{235} と U^{238} の等量の存在を仮定したが,実際は U^{235} は U^{238} よりも多くなかったと思われる。したがって60億年は地球年齢の上限値である。

5.等速円運動の解析

点Oを中心とする半径 r の円周上を運動する点Pがある。x 軸を始線とするOPの回転角を θ とするとPの座標は

$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$



回転角 θ の時刻 t にたいする変化率 $\dfrac{d\theta}{dt}$ が点Pの角速度 ω

$\theta=\omega t$ の場合を考える。($t=0$ で $\theta=0$,角速度 ω も一定)

$x=r\cos\omega t$

$y=r\sin\omega t$　　それぞれを t で微分して速度を求める。

$\dfrac{dx}{dt}=-\omega r\sin\omega t$, $\dfrac{dy}{dt}=\omega r\cos\omega t$　　　したがって点Pの速度は

$\vec{v}=(-\omega r\sin\omega t, \omega r\cos\omega t)$

また$\vec{v}\cdot\overrightarrow{OP}=-\omega r^2\sin\omega t\cos\omega t+\omega r^2\cos\omega t\sin\omega t=0$ だから速度の向きは常にＯＰに垂直であることがわかる。速度の絶対値(速さ)は

$v=\sqrt{\omega^2 r^2}=\omega r$ (一定)

さらに速度を微分して加速度を求める

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 r\cos\omega t=-\omega^2 x, \dfrac{d^2y}{dt^2}=-\omega^2 r\sin\omega t$ したがって加速度は

$\vec{a}=(-\omega^2 x, -\omega^2 y)=-\omega^2\overrightarrow{OP}$ したがって加速度の向きは,円の中心に向かうことが分かる。

力の向きと加速度の向きは一致するから,等速円運動をする物体に働く力は向心力であることもわかる。さらに,加速度の大きさは

$a=\sqrt{\omega^4 x^2+\omega^4 y^2}=\omega^2 r$ (一定)

具体的な数値例をあげる。

(例) 月は地球の周りを27.3日$=2.36\times10^6$秒の周期でほぼ等速円運動をしている。地球と月との距離を 3.84×10^8mとして,月の速さと加速度を求める。

$\omega=\dfrac{2\pi}{2.36\times10^6}$ を $v=\omega r$, $a=\omega^2 r$ に代入すれば

$v=1.02\times10^3$m/s, $a=2.72\times10^{-3}$m/s^2 を得る。

6.高さhの点から,水平に速さv_0で発射された物体の運動

水平方向を x 軸,垂直方向を z 軸にとる。微分方程式は

$m\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$ ···① $m\dfrac{d^2z}{dt^2}=-mg$ ···②

$\dfrac{dx}{dt}=v_x$ (x 方向の速度), $\dfrac{dz}{dt}=v_z$ とおくと ①,②は

$\dfrac{dv_x}{dt}=0$ $\dfrac{dv_z}{dt}=-g$となる。それぞれの解は

$v_x=v_0$, $v_z=-gt$ ($t=0$ で$v_z=0$ だから) これらを積分することにより①,②の解は

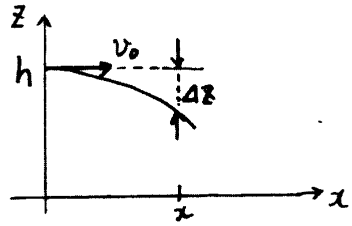
$x=v_0 t$ ···①' ($t=0$ で$x=0$)

$z=-\dfrac{1}{2}gt^2+h$ ···②' ($t=0$で$z=h$)

①',②' より t を消去すると

$z=h-\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{x}{v_0}\right)^2\equiv h-\Delta z$ Δzは,xの位置での自然落下距離を表す。

具体的な数値例を示す。



(例1) ピッチャーの球速 140km/h≒40m/sで水平に投げる

ホームベース (18m) 上での落下距離

$\Delta z=\dfrac{9.8\times18^2}{2\times40^2}\fallingdotseq0.99$m (1m近く落ちる)

(例2) ライフルの弾丸速度 9.5×10^2m/s 50m先の落下距離

$\Delta z=\dfrac{9.8\times(5.0\times10)^2}{2\times(9.5\times10^2)^2}\fallingdotseq1.36\times10^{-2}$m (約1.4cm)

7.放物面による光の反射

接線の方程式を利用して焦点の性質を明らかにする。

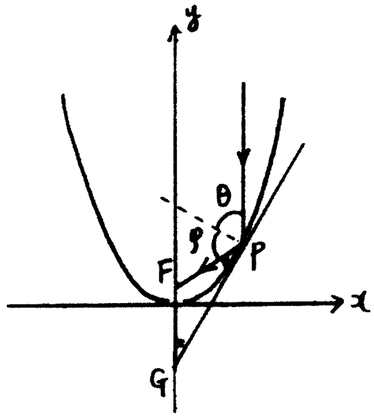
y軸に平行な入射光線が反射してy軸と交わる。入射光線が変わっても(ただしy軸に平行)Fは変わらないことを示す。放物線を$y=x^2$,入射点をP(a,a^2)とする。またPにおける接線がy軸と交わる点をGとする。

∠FPG=90°$-\phi$

∠FGP=90°$-\theta$（入射格y軸 θの余角）

反射の法則から$\theta=\phi$　　故に∠FPG=∠FGP

したがってFG=FP　…①



Pにおける接線を求めてから点Gの座標を求める。

Pにおける接線は　$y-a^2=2a(x-a)$

Gのy座標は$x=0$を代入して　G（0,a^2）

F（0,k）とおくと

$FG^2=(k+a^2)^2$

$FP^2=a^2+(a^2-k)^2$

この結果を①に代入して整理すると

$k=\dfrac{1}{4}$（一定）を得る。

これはFの位置が,あらゆる点Pに対して同じであることを示している。すなわち,y軸に平行なすべての光線の反射光は,点Fを通る。この点を焦点という。

Ⅲ.おわりに

微積分の様々な応用例をあげたが,原理的な例とともにできるだけ具体的な数値で量を評価できるものを取り上げた。生徒はふだん学習する抽象的な数学とは違ったものを感じてくれたと思う。なお積分そのものの応用には触れなかったが,物体の重心の決定や万有引力の計算等,定積分を応用した教材が考えられる。これらを含めて,今後も興味ある教材を開発していきたい。

参考文献

1) 高等学校 微分・積分　　啓林館

2) 生き生き数学　　三省堂

3) 解析学概論　P.ラックス，S.バースラル著 竹之内脩監修　　現代数学社

4) 物理学序論としての力学　藤原邦男　　東京大学出版会

5) 核化学入門　G・R・チョピン著 今村昌訳　　化学同人

6) 例題力学演習　戸田盛和,渡辺慎介　　岩波書店

7) 力学通論　後藤憲一　　学術図書出版社