論文審査の要旨

博士の専攻分野の名称	博　士（　理学　）	氏名	黒木　健司
学位授与の要件	学位規則第4条第1・2項該当		

論文題目

Non summability of formal solutions of certain partial differential equations
（ある偏微分方程式の形式解の非総和可能性）

論文審査担当者

主　　査　　教　授　　吉野　正史
審査委員　　教　授　　阿部　誠
審査委員　　教　授　　川下　美潮
審査委員　　講　師　　神本　晋吾

〔論文審査の要旨〕

常微分方程式の特異点での発散する形式級数解に解析的意味を与え、真の解を構成する漸近解析の理論はポアンカレ以来研究が進められてきた。この理論は常微分方程式、差分方程式のみならず数理物理への応用がなされ研究が進んでいる。さらにあるクラスの偏微分方程式の発散する形式解に対しても漸近解析の理論が構成されている。これらの研究において形式級数解がボレル総和可能であるかどうかということは基本的な問題である。本論文の黒木氏の研究目的は形式解がボレル総和可能でないような簡単な偏微分方程式を構成するということである。このような研究はボレル総和法をベースとした漸近解析理論を必要性の視点から研究するという点において意味がある。

黒木氏の研究は偏微分方程式の形式級数解のボレル総和可能性についての Lutz-Miyake-Schäfke あるいは Tahara -Yamazawa による研究が動機となっている。前者の論文では熱方程式がボレル総和可能であるための必要十分条件を与えており、後者ではある偏微分方程式のクラスに対する初期値問題のすべての形式解がボレル総和可能となる十分条件を与えている。本学位論文で黒木氏はボレル総和可能でない方程式を探す点に注目して研究し、そのような簡単な方程式のクラスを見出した。そのため黒木氏が注目したのは Tahara-Yamazawa の研究した方程式のクラスに入らない方程式に対する初期値問題であり、このクラスの方程式の中にはボレル総和可能でないものが存在すると予想した。実際、Tahara-Yamazawa で与えられているある条件を満たさない方程式のクラスに対し、対応する初期値問題は形式ベキ級数解が任意の方向でボレル総和可能とならないことを証明した。 その後, より広いクラスの方程式に対する初期値問題に対して同様の結果を示すという目的でボレル総和可能でない初期値問題についての研究を行なった。本学位論文ではこれらの研究をまとめ、形式ベキ級数解が任意の方向でボレル総和可能とならないような初期値問題のクラスを与えている。

結果を述べるため、まず記号を準備する。$(t,x) \in \mathbb{C}^2$, $n, k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\ldots\}$とし, $j = 1,2,\ldots,n$に対し$\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$ をとり、ξについての多項式$P_j(\xi)$を$P_j(\xi) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{i,j}\xi^i$とおく。さらに, C_mを$\sum_{m=1}^{\infty} |C_m| < \infty$ となる数列, h_mを有界な複素数列とし, $a(x)$を $a(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \exp(h_m x)$と定義する。このとき次の方程式を考える。

$$(\partial/\partial t)u = a(x)t \ + \ \sum_{j=1}^{n} (t^2(\partial/\partial t))^j (\partial/\partial \mathrm{t})\, P_j(\partial_x)\, u, \quad u(0,x) = 0. \quad (1)$$

ここで, $u = u(t,x)$である。 初期値問題(1)はある開円板の内部で正則でかつ境界まで込めて連続な x の関数を係数関数に持つ t についての形式ベキ級数 $u(t,x) = \Sigma^{\infty}_{n=1}\, \mathrm{u_n}(x)\ t^n$ を形式級数解として持つことがわかる。この時, 次の定理が得られる。

定理１．$\alpha_{k,1} \neq 0$ を仮定する。 その時, 上で与えられている $a(x)$に対し, (1)のすべての形式ベキ級数解 $u(t,x)$が任意の方向でボレル総和可能とならない有界な数列 h_m が存在する。

次に別の例を与える。

$$(\partial/\partial t)u = a(x) + (t(\partial/\partial t))^2\ u + (t\,(\partial/\partial t))^2\, \partial_x^{\alpha}\, u, \quad u(0,x) = \phi_0(x). \quad (2)$$

ここで, $u = u(t,x)$, α は零でない自然数、$\phi_0(x)$は整関数かつ $a(x)$は(1)で与えられるものと同様とする。(2)は(1)と同様な形式解 $u(t,x)$をもつ。この時、次の定理が成り立つ。

定理２．初期値問題(2)の任意の形式ベキ級数解 $u(t,x)$が任意の方向でボレル総和可能とならない有界な数列 h_n が存在する。

定理 2 の証明は方程式に t について形式ボレル変換を施したのち、変換された方程式が t の共役変数について単位円のすべての点に特異点が集積する解をもつことを示す。変換された方程式の解の一意性とよく知られたボレル総和可能性の必要十分条件により、形式級数は t についてボレル総和可能でないことがわかる。そのためボレル像において特異解の特異点が集積することを示す必要があり、その際次の事実を用いる。$n \in \mathbb{N}^*$ とし $q \in \mathbb{N}^*$ は $q(q-1)/2 < n \leq q(q+1)/2$ を満たすとする．$\nu = n - q(q-1)/2$ とし, 有界数列 h_nを次のように定める。

$1/(1+\mathrm{h_n}^{\alpha}) = (1 - 1/(\mathrm{q}+1))\exp(2\pi i\nu/(q+1)).$

この h_n に対して定理 2 を証明している。

参考文献

1. D. A. Lutz, M. Miyake and R. Schäfke, On the summability of divergent solutions of the heat equation, Nagoya Math. J. 154 (1999), 1-29.
2. H. Tahara and H. Yamazawa, Multisummability of formal solutions to the Cauchy problem for some linear partial differential equations, J. Differential Equations, 255 (2013), 3592-3637.

以上，審査の結果，本論文の著者は博士（理学）の学位を授与される十分な資格があるものと認める。

公表論文

M. Yoshino and K. Kurogi, An example of a non 1-summable partial differential equation, RIMS Kôkyûroku Bessatsu (to appear).

参考論文

K. Kurogi, Counterexample to the 1-Summability of a Divergent Formal Solution to Some Linear Partial Differential Equations, Funkcial Ekvac., 61 (2018), 219-227.