論 文 審 査 の 要 旨

博士の専攻分野の名称	博　士（　理学　）	氏名	當山　凛
学位授与の要件	学位規則第４条第①・２項該当		

論文題目

Higher Nash Blowups of the A_3-Singularity

（A_3特異点の高次ナッシュ爆発）

論文審査担当者

主　　査　　准教授　　高橋　宣能

審査委員　　教　授　　木村　俊一

審査委員　　教　授　　島田　伊知朗

審査委員　　教　授　　松本　眞

〔論文審査の要旨〕

本論文は、代数多様体の高次ナッシュ爆発とよばれるものについて研究し、A_3特異点の高次ナッシュ爆発が任意の次数で特異点を持つことを証明したものである。

古典的なナッシュ爆発は、特異点の標準的な解消という問題に関係して、Nash および Nobile により導入された。近年に入り、安田健彦氏らはその一般化となる高次ナッシュ爆発を導入した。X を代数多様体、P を X の非特異点、n を正の整数とするとき、P の n 次無限小近傍 $P^{(n)}$が、P を定める極大イデアル m_P の冪$(m_P)^{n+1}$により定まる閉部分スキームとして定義される。$P^{(n)}$ は X の部分空間をパラメータ付けするヒルベルトスキームの点$[P^{(n)}]$を与えるので、写像

$$X_{sm} \to X\times \mathrm{Hilb}(X);\quad P \to (P, [P^{(n)}])$$

が定まる。ここで、X_{sm}は X の非特異点集合である。この写像の像の閉包として、X の n 次ナッシュ爆発 $\mathrm{Nash}_n(X)$が定義される。自然な写像 $\mathrm{Nash}_n(X)\to X$ は双有理かつ射影的であり、当初、十分大きな n に対して X の特異点解消を与えるのではないかとの期待があった。

その後、安田氏によって A_3特異点の高次ナッシュ爆発は任意の次数で特異点を持つのではないかとの示唆がなされ、その方針に従い Daniel Duarte 氏により 50 次までの場合に特異性が確かめられた。ここで Duarte 氏は、まずトーリック環などの単項式代数に対するグレブナー基底やグレブナー扇の理論を展開したのち、A_3特異点の n 次ナッシュ爆発の正規化をイデアル

$$J_n := \langle m-1 \mid m \text{ は単項式}\rangle^{n+1}$$

のグレブナー扇に付随するトーリック曲面として表し、計算機を用いて各次数でグレブナー扇を計算することにより特異性を示した。この計算から、任意の次数でグレブナー扇が

ある非正則な錐を含むことが示唆された。

しかしながら、特定のイデアルおよび単項式順序に対するグレブナー基底は原理的には計算機で求めることができる一方、J_nのようなイデアルの系列に対して一般的にグレブナー基底を求めることは容易でない。さらに、グレブナー扇を求めるためにはある範囲の単項式順序に対してグレブナー基底を調べる必要がある。この困難性のため、任意の n に対する $Nash_n(X)$の特異性は未解決であった。

本論文において著者は、任意の n およびある範囲の単項式順序に対してイデアル J_nのグレブナー基底に関する十分な情報を得ることに成功した。これにより、任意の n に対して $Nash_n(X)$が特異点を持つことが示され、「高次ナッシュ爆発は特異点解消を与えるか」という問題に否定的な解決が与えられた。

そのために、まずある範囲の単項式順序に対してイデアル J_n の先頭項イデアルが求められた。著者は具体的な n に対するグレブナー基底の計算から先頭項イデアルの生成元の候補を見出し、実際にそれらが先頭項イデアルに含まれることを示した。これらの内、多くは n－1 の場合から帰納的に作ることができるが、残りの部分についても興味深い環論的議論を用いて存在を示した。

次に、グレブナー扇の最大次元の錐に対し、印付グレブナー基底を用いることによる簡明な記述を与えた。印付グレブナー基底とは、$\{g_1, \ldots, g_s\}$をグレブナー基底として

$$\{(g_i, LT(g_i)) \mid i=1, \ldots, s\}$$

の形で与えられる集合であり、グレブナー基底に加えて各元の先頭項を指定したものと言える。Duarte によるグレブナー扇の定義では重みに対するイニシャルイデアルが等しいことによる同値関係が用いられていたが、印付グレブナー基底を用いることによって、この論文の目的により適した記述が得られた。以上によって、問題はイデアルの元であって指定された先頭項と次の項を持つようなものの存在に帰着された。この元の存在は、やはり具体的な計算のみでは得られず、多項式の割り算を用いた興味深い技巧によって証明されている。

以上述べた通り、本論文は特異点論における重要で興味深い問題に明確な解決をもたらしたものである。また、イデアルの無限の系列に対してグレブナー扇の錐を求めている点も、ごく簡単な場合を除いて今までに例が少なく、本論文の技法には一般化・応用の可能性が考えられる。

以上，審査の結果，本論文の著者は博士（理学）の学位を授与される十分な資格があるものと認める。

公表論文

Rin Toh-yama, Higher Nash Blowups of the A_3-Singularity, Communications in Algebra に掲載決定。