学位論文要旨

Higher Nash Blowups of the A_3-Singularity

A_3特異点の高次ナッシュ爆発

氏　名　　　當山凜

代数閉体上の等次元的な準射影多様体Xに対して、そのナッシュ爆発$\pi\colon \mathrm{Nash}(X) \to X$が定義される（Nobile, 1975)。近年 Oneto & Zatini (1991)や Yasuda (2007)によって（独立に）導入された高次ナッシュ爆発は、この古典的なナッシュ爆発の一般化である。すなわち、任意の整数$n \geq 1$に対してXのn次ナッシュ爆発$\pi_n\colon \mathrm{Nash}_n(X) \to X$が定義され、特に1次ナッシュ爆発$\mathrm{Nash}_1(X)$は古典的なナッシュ爆発に同型である。Yasuda が示したように、基礎体の標数が0 であるときは、Xの点のヒルベルト・スキームの閉部分多様体として$\mathrm{Nash}_n(X)$を導入することもできる。このときπ_nはXの正則点集合の上では同型であり、また任意の特異点$P \in X$のファイバーはXのある0次元閉部分スキームでPに台をもつものたち（に対応するヒルベルト・スキームの点たち）から成る。すなわち$\mathrm{Nash}_n(X)$はXの特異点を然るべき0次元閉部分スキームの族で置き換えたものと言える。

さて、Xの特異点解消をその高次ナッシュ爆発によって実現できるかという問題が Yasuda (2012)によって提起された：

任意のXに対して、 $\mathrm{Nash}_n(X)$は十分大きい全ての次数$n \gg 0$で非特異か？

ただしここにおいて基礎体の標数は0とする：　正標数の場合は Yasuda (2007)自身によって反例が与えられており、すなわち標数が2または3の場合は、平面曲線$x^3 - y^2 = 0$の任意の次数のナッシュ爆発は特異的である。

またXが曲線である場合も Yasuda (2007)によって研究されており、このときは十分大きな次数のナッシュ爆発は全て非特異であることが知られている。しかしながら一般の場合については未解決のままであった。

本論文では反例を与えることでこの問題を否定的に解決した。本論文の主定理は次の通りである：

複素数体上のトーリック曲面$X \coloneqq (xy - z^4 = 0) \subset \mathbb{A}^3$に対して
$\mathrm{Nash}_n(X)$は任意の次数$n \geq 1$で特異的である。

証明の鍵は、Duarte (2014)による正規アフィン・トーリック多様体の高次ナッシュ爆発に関する研究である。Xを一般に正規アフィン・トーリック多様体であるとする。ナッシュ爆発の正規化は正規ナッシュ爆発と呼ばれるが、Duarte によれば、Xの

n 次正規ナッシュ爆発は再び正規トーリック多様体であり、それが付随している扇も、明示的に与えられるイデアルのグレブナー扇として得られる(後で詳述)。

本論文では、A_3 型特異点を持つトーリック曲面 $xy - z^4 = 0$ の正規ナッシュ爆発を全ての次数について調べ、それらが付随している扇たちには、非正則錐が必ず含まれることを示した。よって正規ナッシュ爆発が、したがってナッシュ爆発も、全ての次数で特異的である。こうして主結果が示された。

具体的には、次のようなステップで主結果の証明が与えられる。

まず第 1 節において、Duarte とはやや異なる方法で、グレブナー扇の表示が与えられる。単項式 $x^{m_1}, \dots, x^{m_r} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ で生成される部分代数 $S := \mathbb{C}[x^{m_1}, \dots, x^{m_r}] \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ は単項式部分代数と呼ばれるが、Duarte は多項式環上で通常考えられる単項式順序やイデアルのグレブナー基底、割り算アルゴリズムなどを単項式部分代数上に自然な方法で一般化し、また単項式部分代数の零でない任意のイデアル $I \subset S$ に対してグレブナー扇 $GF(I)$ を定義した。本論文の第 1 節では、S 上の単項式順序 $\preceq$ が与えられたとき、I の $\preceq$ に関する印付き被約グレブナー基底 $\mathbb{G}$ が定義されること、また $\mathbb{G}$ から $GF(I)$ の極大錐 $C_{\mathbb{G}}$ が構成されることが示される。その帰結として、I の印付き被約グレブナー基底と $GF(I)$ の極大錐とが、この対応のもと 1 ： 1 に対応することが示される。

特に、正規アフィン・トーリック多様体の座標環はある単項式部分代数 S として表すことができ、その n 次正規ナッシュ爆発は、イデアル $J_n \coloneqq (x^{m_1} - 1, \dots, x^{m_r} - 1)^{n+1}$ のグレブナー扇 $GF(J_n)$ に付随するトーリック多様体となることが知られている（Duarte, 2014)。

第 2 節では主定理の場合が具体的に考察される。$X = (xy - z^4 = 0)$ の座標環は $S = \mathbb{C}[u, u^3v^4, uv]$ なる単項式部分代数として表すことができる。第 1 節の結果から、主定理を示すには次が実現できれば良い： すなわち S 上の単項式順序 $\preceq$ であって、イデアル $J_n = (u - 1, u^3v^4 - 1, uv - 1)^{n+1}$ の $\preceq$ に関する印付き被約グレブナー基底 $\mathbb{G}_n$ を取ると、対応する $GF(J_n)$ の錐 $C_{\mathbb{G}_n}$ が非正則となっているようなものを与えれば良い。本論文ではベクトル $(2, -1)$ で重み付けられた次数付き逆辞書式順序が、所期の条件を満たすことが示される。

以上の方針における困難は、任意の $n \geq 1$ について $\mathbb{G}_n$ を一般的に与えることが難しい点にあり、実際それはできなかった。しかし $\mathbb{G}_n$ の元たちの先頭項については一般的に記述することができ、また $\mathbb{G}_n$ の元のうち（先頭項の他にもう一つ）ある形の項をもつものの存在を示すことができた。このことから、$\mathbb{G}_n$ に対応する $GF(J_n)$ の極大錐 $C_{\mathbb{G}_n}$ を明示的に記述することができ、その非正則性が確かめられる。このようにして主定理は示された。