

論文審査の要旨

博士の専攻分野の名称	博 士 (理 学)	氏名	尾白 典文
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 ①・② 項該当		
論文題目			
Rational curves on a smooth Hermitian surface (非特異エルミート曲面上の有理曲線)			
論文審査担当者			
主 査	教 授	島田 伊知朗	
審査委員	教 授	木村 俊一	
審査委員	教 授	松本 眞	
審査委員	准教授	高橋 宣能	
〔論文審査の要旨〕			
<p>有限体上定義された代数多様体であるエルミート多様体は、正標数特有の興味深い幾何学的性質（かつては「病的」と呼ばれていた性質）をもつために、多くの研究がなされてきた。例えば、次元についてのある条件の下で、この多様体は小平次元が非負であるにもかかわらず単有理的であり、さらにまた超特異的であることが示されている。また、1次元エルミート多様体、すなわちエルミート曲線は、標数が 0 では決してありえない位数の自己同型群をもち、この曲線上の有理点の集合から良い誤り訂正符号を構成することができる。さらに、エルミート多様体上に乗っている線形部分空間のコンフィギュレーションについても多くの結果が知られている。</p> <p>本論文は、2次元エルミート多様体、すなわちエルミート曲面上に存在する次数の高い有理曲線を、幾何学的に（すなわち基礎体を代数閉体として）研究したものである。上にも述べたように、次数が 1 の有理曲線、すなわちエルミート曲面上の直線に関しては多くの研究があるが、次数を高くした場合の研究はこの論文をもって嚆矢とする。</p> <p>以下、基礎体の標数を p とし q を p の冪とする。標数 p の代数閉体 k を固定する。成分がすべて k の元であるサイズ $n+2$ の正方行列 $A=(a_{ij})$ を考える。（ただし添字 i, j は 0 から $+1$ までを動くとする。）$n+1$ 次元射影空間の同次座標をなす $n+2$ 個の変数 x_i（ただし $i=0, \dots, n+1$）をもつ $q+1$ 次の同次多項式</p> $\sum a_{ij} x_i x_j^q = 0 \quad (\text{和はすべての添字 } i, j \text{ についてとる})$ <p>により定義される n 次元射影超曲面を $X(A)$ と書き、n 次元 k-エルミート多様体と呼ぶ。A の成分が q^2 個の元からなる有限体の元であり A が転置と q 乗フロベニウス射に関してエルミートの場合は、単にエルミート多様体と呼ぶ。本研究では、エルミート多様体の幾何学的側面に興味の対象があるので、代数閉体を基礎体にとることとする。A</p>			

が正則であることと $X(A)$ が非特異であることは同値である. Segre-Lang-Beauville の結果により, n 次元非特異 k -エルミート多様体は $q+1$ 次のフェルマー型方程式

$$x_0^{q+1} + \cdots + x_{n+1}^{q+1} = 0$$

で定義される超曲面と射影同型であることが知られている. したがってその射影的自己同型群は $\text{PGU}(n+2, F)$ と等しい. ここで F は q^2 個の元からなる有限体である.

X を $q+1$ 次の非特異 k -エルミート曲面とする. 本論文の主結果は以下の 2 つである.

定理 1. $1 < d < q+1$ なる整数 d に対し, X 上に次数 d の非平面有理曲線は存在しない.

定理 2. X 上の次数 $q+1$ の非平面有理曲線全体の集合 R_{q+1} は空でなく, X の射影的自己同型群の R_{q+1} への作用は推移的である. さらにこの作用の固定部分群は $\text{PGU}(2, F')$ と同型である. ここで F' は q^4 個の元からなる有限体である.

系. X 上の次数 $q+1$ の非平面有理曲線は

$$(s, t) \rightarrow (s^{q+1}, s^q t, s t^q, t^{q+1})$$

の像として与えられる曲線と射影同値である. ここで (s, t) は射影直線の同次座標である.

系. X がフェルマー曲面の場合, R_{q+1} の各元は q^2 個の元からなる有限体 F 上で定義されている.

系. R_{q+1} は $q^4(q^3+1)(q^2-1)$ 個の元からなる.

さらにこの論文では, $p=q=2$ の場合に R_3 の元を全て計算機を用いて明示的に書き下し, そのコンフィギュレーションを詳しく調べている

この論文は, 次元と次数が低い場合に完全な結果を与えたものであり, 今後, この分野の研究の基礎となることが期待される.

以上, 審査の結果, 本論文の著者は博士 (理学) の学位を授与される十分な資格があるものと認める.

公表論文

Rational curves on a smooth Hermitian surface,

(非特異エルミート曲面上の有理曲線)

Norifumi Ojio, Hiroshima Mathematical Journal, Vol.49, No.1, March 2019, 掲載決定

参考論文

A 40-dimensional extremal Type II lattice with no 4-frames,

Norifumi Ojio, preprint, arXiv:1812.03197v1.