

学位論文要旨

Rational curves on a smooth Hermitian surface
(非特異エルミート曲面上の有理曲線)

氏名 尾白 典文

q を素数べきとし、有限体 \mathbb{F}_q の代数閉包を k とする。 k 上の行列 m に対し、 m の各成分 $m_{i,j}$ の q 乗 $m_{i,j}^q$ を成分にもつ行列を $m^{(q)}$ で表す。 k -射影空間 \mathbb{P}^3 の点を縦ベクトル \mathbf{x} で表し、その転置を ${}^t\mathbf{x}$ で表す。 任意の $A \in \mathrm{GL}_4(k)$ に対し、次数 $q+1$ の非特異 k -エルミート曲面 X_A は次によって定義される:

$$X_A := \{\mathbf{x} \in \mathbb{P}^3 \mid {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}^{(q)} = 0\}.$$

A がエルミート行列 ${}^tA = A^{(q)}$ のとき、 X_A は \mathbb{F}_{q^2} 上で定義され、単純に非特異エルミート曲面と呼ばれる。

エルミート多様体の幾何は B. Segre によって体系的に研究され、特に非特異エルミート曲面 $X \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{F}_{q^2})$ は平面を含まないこと、直線を $(q^3+1)(q+1)$ 本、点を $(q^3+1)(q^2+1)$ 個含むことが示された。 また、 Bose-Chakravarti によって X 上の直線と点からなる集合の配置はあるデザインを形成することが知られている。 特別なデザインを構成することは参考論文の主題である整格子の構成と分類のためにも有用である。 本論文において、我々は非特異 k -エルミート曲面に含まれる次数 $d > 1$ の有理曲線について研究する。

非特異 k -エルミート曲面に含まれる平面有理曲線は直線もしくは非特異エルミート曲線に含まれる有理曲線であり、そのような有理曲線に対する研究は上述の Segre の研究に帰着される。 それゆえ我々は平面に含まれない有理曲線のみを考察の対象とする。

非特異 k -エルミート曲面 X_A に含まれる非平面 d 次有理曲線全体の集合を R_d とする。 単純な議論によって次の定理が示される。

定理 1. $d \leq q$ ならば R_d は空集合である。

以下 $d = q+1$ とし、 R_{q+1} を R と書く。 R に属する有理曲線の媒介変数表示から生ずる集合

$$S^* := \left\{ F^* \in \mathrm{GL}_4(k) \mid {}^tF^*AF^{*(q)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{b}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{b}_2 \\ -\mathbf{b}_1 & \mathbf{0} & -\mathbf{b}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2) \in \mathrm{GL}_2(k) \right\}$$

と媒介変数の変換から生ずる群

$$\mathrm{Im}(\varphi)_* := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha^q g & \beta^q g \\ \gamma^q g & \delta^q g \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4(k) \mid g := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(k) \right\}$$

に対して、商 $k^\times \backslash S^* / \mathrm{Im}(\varphi)_*$ から R に一対一対応

$$k^\times \backslash S^* / \mathrm{Im}(\varphi)_* \ni k^\times F^* \mathrm{Im}(\varphi)_* \longmapsto C_F \in R$$

が存在する. ここで $C_F = \{F^*(s^{q+1}, s^q t, st^q, t^{q+1}) \in \mathbb{P}^3 \mid {}^t(s, t) \in \mathbb{P}^1\}$ である. さらに任意の $m \in \mathrm{GL}_n(k)$ に対して $m = {}^t m' m'^{(q)}$ となる $m' \in \mathrm{GL}_n(k)$ が存在するというよく知られた定理から

$$M := \left\{ D_B := \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{b}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{b}_2 \\ -\mathbf{b}_1 & \mathbf{0} & -\mathbf{b}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4(k) \mid B := (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2) \in \mathrm{GL}_2(k) \right\}$$

とすると,

$$S^* \ni F^* \longmapsto {}^t F^* A F^{*(q)} \in M$$

は全射である. それゆえ S^* は空ではなく, したがって R もまた空ではない. 特に R の任意の要素は非特異有理曲線

$$C_0 := \{{}^t(s^{q+1}, s^q t, st^q, t^{q+1}) \in \mathbb{P}^3 \mid {}^t(s, t) \in \mathbb{P}^1\}$$

に k 上射影同型である. また曲面 X_A の射影自己同型群 $\mathrm{Aut}(X_A)$ は射影ユニタリ群 $\mathrm{PGU}_4(\mathbb{F}_{q^2})$ に同型である. 一方, 任意の $g, B \in \mathrm{GL}_2(k)$ に対して直接の計算から

$${}^t \varphi_*(g) D_B \varphi_*(g)^{(q)} = \det(g)^q D_{{}^t g B g^{(q^2)}}$$

が示され, 群 $\mathrm{Im}(\varphi)_*$ は集合 M に ${}^t \varphi_*(g) D_B \varphi_*(g)^{(q)}$ によって作用することがわかる. この作用に関する同値関係を \sim , 同値類を $D_B \varphi^*$ と書くとき, 写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}(X_A) k^\times \backslash S^* / \mathrm{Im}(\varphi)_* & \longrightarrow & k^\times \backslash M / \sim \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{Aut}(X_A) k^\times F^* \mathrm{Im}(\varphi)_* & \longmapsto & k^\times ({}^t F^* A F^{*(q)}) \varphi^* \end{array}$$

は全単射である. 以上により次の定理を得る.

定理 2. $\mathrm{Aut}(X_A)$ は R に推移的に作用し, その固定化部分群は $\mathrm{PGU}_2(\mathbb{F}_{q^4})$ に同型である.

$\mathrm{PGU}_4(\mathbb{F}_{q^2}), \mathrm{PGU}_2(\mathbb{F}_{q^4})$ の位数は知られており, R に属する曲線の総数を次の式で与えることができる:

系 1.

$$|R| = |\mathrm{PGU}_4(\mathbb{F}_{q^2})| / |\mathrm{PGU}_2(\mathbb{F}_{q^4})| = q^4(q^3 + 1)(q^2 - 1).$$

A が単位行列 I のとき, すなわちフェルマー曲面 X_I の場合, R に属する次の非特異有理曲線を与えることができる:

$$C_{F_J} := \left\{ {}^t(\eta^{-q} \xi^q s^{q+1} - \eta^{-q} t^{q+1}, s^q t, st^q, \omega \eta^{-1} \xi s^{q+1} + \omega \eta^{-1} t^{q+1}) \in \mathbb{P}^3 \mid {}^t(s, t) \in \mathbb{P}^1 \right\},$$

ここで $\omega, \xi, \eta \in \mathbb{F}_{q^2}$ であり, それぞれ $\omega^{q+1} = -1, \xi^{q+1} = 1$ かつ $\xi^2 \neq -1, \eta^{q+1} = \xi^q + \xi \neq 0$ を満足する. $\mathrm{Aut}(X_I)$ の完全代表系は $\mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_{q^2})$ の中から選ばれうることから次の系を得る.

系 2. $A = I$ のとき, R に属する全ての曲線は C_{F_J} に \mathbb{F}_{q^2} 上射影同型である.

系 2 によって, X_I に含まれる全ての非平面 $q+1$ 次有理曲線は C_{F_J} の $\mathrm{PGU}_4(\mathbb{F}_{q^2})$ -軌道から得られることがわかる. 実際 $q=2$ のとき, 代数系ソフトウェア GAP を用いて R に属する 432 本の非平面三次有理曲線をもとめた. さらにそれらの曲線と X_I を \mathbb{F}_{q^2} -有理点に制限し, 曲線間の交差, 曲線と曲面の点の交差数を計算した. ここに二曲線の \mathbb{F}_{q^2} -有理点集合の共通部分が n 元集合であるとき, それらの曲線は n 点で交差するという. そのとき主な計算結果は以下のである: R に属する各曲線は 150 本のお他曲線と一点で交差し, 40 本のお他曲線と二点で交差し, 1 本のお他曲線と五点で交差する. また曲面の各 \mathbb{F}_{q^2} -有理点に対して, その点を通る 48 本の R の曲線が存在する.