広島大学附属福山中・高等学校
中等教育研究紀要　第36巻

# コンピュータを使った授業の実践と考察

入川　義克

コンピュータを使った授業の面白さの１つに，入力した関数のグラフや図形を連続的に動かすことによって，その中に隠れている特性を見抜いたり，確かめたりする事がある。ここでは，授業の中で実践してきた幾つかの具体的事例を挙げて，どんな問題を学習するときにコンピュータを使った授業が効果的であったかを紹介する。

## １．授業の具体的実践例

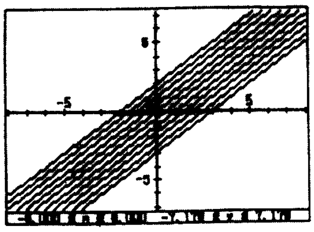
（１）「関数ラボ」を使った事例

基本となる関数$y=ax$，$y=ax^2$のグラフの特徴を確認した後に
$y=ax+b$，$y=ax^2+bx+c$ のグラフが次の条件のもとではどのようなグラフになるか予想しながらグラフ上の点がどのような図形上を動くか考える。

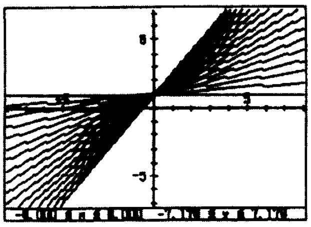
①　関数$y=ax+b$において，

ア．aを固定して，bを変化させる。《グラフ１》

イ．bを固定して，aを変化させる。《グラフ２》



《グラフ１》

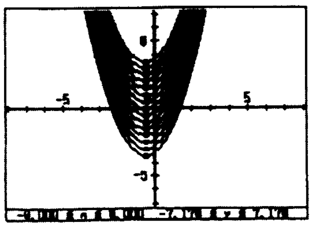


《グラフ２》

②　二次関数$y=ax^2+bx+c$において，

ア．aとbを固定して，cを変化させる。

$$\begin{cases} x=-\dfrac{b}{2a} \\ y=-\dfrac{b^2-4ac}{4a} \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} x=-\dfrac{b}{2a} \ \text{（定数）} \\ y=c-\dfrac{b^2}{4a} \quad \left(-\dfrac{b^2}{4a}\text{は定数}\right) \end{cases}$$



《グラフ３》

∴　放物線の頂点は，y軸に平行な直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 上を動く。《グラフ３》

イ．ａとｃを固定して，ｂを変化させる。

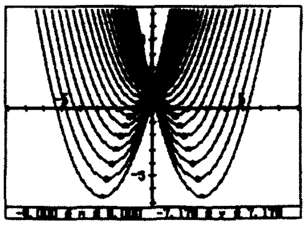
$$\begin{cases} x = -\dfrac{b}{2a} \\ y = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$y = -\frac{(-2ax)^2 - 4ac}{4a}$$

$$\Downarrow$$

$$y = -ax^2 + c$$



《グラフ４》

∴ 放物線の頂点は，放物線 $y = -ax^2 + c$ 上を動く。《グラフ４》

ウ．ｂとｃを固定して，ａを変化させる。

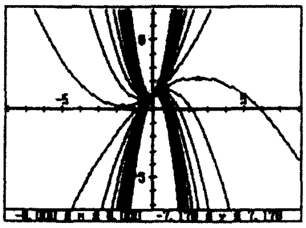
$$\begin{cases} x = -\dfrac{b}{2a} \\ y = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{b}{2}\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$\Downarrow$$

$$y = \frac{b}{2}x + c$$

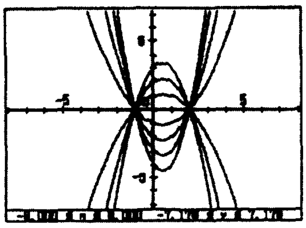


《グラフ５》

∴ 放物線の頂点は，直線 $y = \dfrac{b}{2}x + c$ 上を動く。《グラフ５》

③ 二次関数の概形を理解した所で，次の問題を扱うと更に理解を深めることができる。

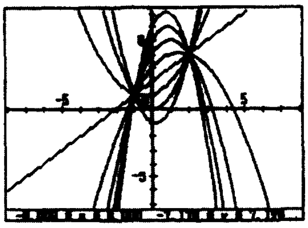
ア．２点（－１，０），（２，０）を通る放物線群の式を求めよ。《グラフ６》



《グラフ６》

$y = a(x+1)(x-2)$

イ．２点（－１，１），（２，４）を通る放物線群の式を求めよ。《グラフ７》

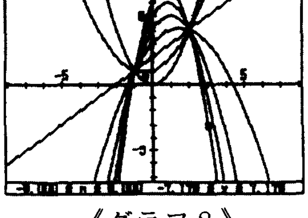


《グラフ７》

$y = a(x+1)(x-2) + x + 2$

ウ．３点（－１，１），（２，４），（３，－３）を通る放物線の式を求めよ。《グラフ８》

(3元連立1次方程式による解法もあるが…)

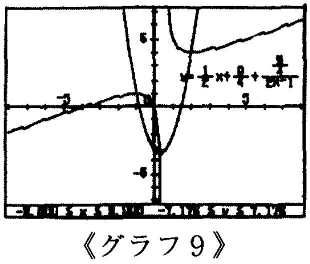


《グラフ８》

$y = -2(x+1)(x-2) + x + 2$

エ．２点（－１，１），（２，４）を通る放物線の頂点はどんな図形上を動くか。

《グラフ９》



《グラフ９》

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{4} + \frac{\frac{9}{4}}{2x - 1}$$

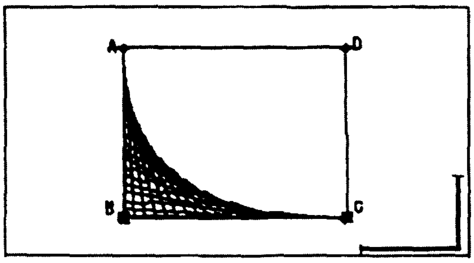
(2)「Ｇｅｏｂｌｏｃｋ」を使った事例

平面幾何の作図は「Ｇｅｏｂｌｏｃｋ」を使うと簡単にシミュレーションできる。

ただし，条件設定した図形を連続的に動かすことによって，不変の性質を確認したり，ある図形の軌跡を確認することはできるが，その証明の仕方を示唆してくれるものではない。

そこで「関数ラボ」と「Ｇｅｏｂｌｏｃｋ」を併用すれば効果的である。

① 正方形ＡＢＣＤの辺ＡＢ，ＢＣ上で，ＡＰ＝ＢＱを満たしながら動く点を，それぞれＰ，Ｑとする。
このとき，線分ＰＱの通過する範囲を図示せよ。




この場合，コンピュータを使ったシミュレーションによらなくても線分ＰＱの通過する範囲は予想出来る。

しかし，通過する範囲を「Ｇｅｏｂｌｏｃｋ」で図示し，続いて，その境界線の方程式にかかわる問題に発展させ，その式を求めて「関数ラボ」に入力してグラフィックスの再現をすると，更に興味深い展開となる。

尚，この正方形の１辺の長さをａとおいて，頂点Ａを（０，ａ），頂点Ｂを原点（０，０），頂点Ｃを（ａ，０）と座標設定する。

Ｐ（０，ａ－ｔ），Ｑ（ｔ，０）　ただし，$0 \leqq t \leqq a$とおく。

このとき，直線ＰＱの方程式は，$(a-t)x+ty=t(a-t)$であり，線分ＰＱは$t=0$，$t=a$のとき，それぞれ線分ＡＢ，線分ＢＣと一致する。

$0<t<a$のとき，

$y=\dfrac{t-a}{t}x+a-t$ …① より，　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{ax-t^2}{t^2}$　だから

①でｘを固定して，ｔの値を$0<t<a$の範囲で変化させたとき，ｙの取りうる値の範囲は，

| t | 0 | … | $\sqrt{ax}$ | … | a |
|---|---|---|---|---|---|
| y′ | ／ | ＋ | 0 | － | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 最大 | ↘ | 0 |

$\lim_{t\to+0} y=-\infty$　，$\lim_{t\to a} y=0$

ｙの最大値は，$y=x-2\sqrt{ax}+a$　（$t=\sqrt{ax}$のとき）であるから，境界線の方程式は$y=(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2$　でＡ（０，ａ）とＣ（ａ，０）を両端とする部分$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$である。尚，この曲線が,放物線の一部分であることを確認してもよい。

(3)「ニュー・シミュレーション」を使った事例

既製のソフトの中には，問題を解く上で非常に効果的なものもある。

① １辺の長さがａの立方体を，その１つの対角線を軸にして回転した時にできる回転体の体積を求めよ。
この問題を扱うときには，立方体の模型を使って，このときにできる回転体の概形をとらえさせ，次のシミュレーションで確認しながら説明している。

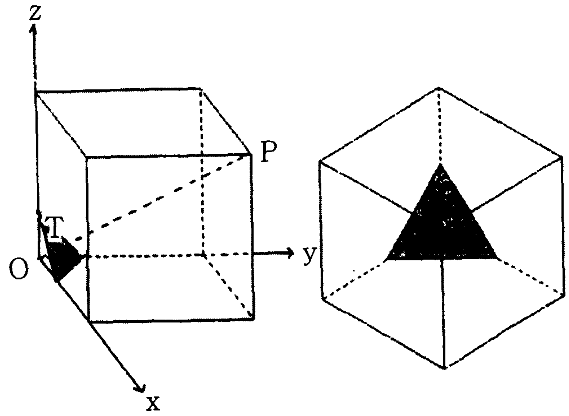
下図の立方体において,対角線ＯＰ上の点Ｔ（ｔ，ｔ，ｔ）を通り，回転軸ＯＰに垂直な平面で，この立方体を切断したときの切断面を考える。

イ．　$0 \leqq t \leqq \frac{a}{3}$ のとき

切断面は，１辺の長さが $3\sqrt{2}\,t$ の正三角形である。

この正三角形を回転軸の回りに回転させてできる図形は，半径 $\sqrt{6}\,t$ の円だから，回転体の切断面の面積は

$S(t) = 6\pi t^2$




ロ．　$\frac{a}{3} \leqq t \leqq \frac{a}{2}$ のとき

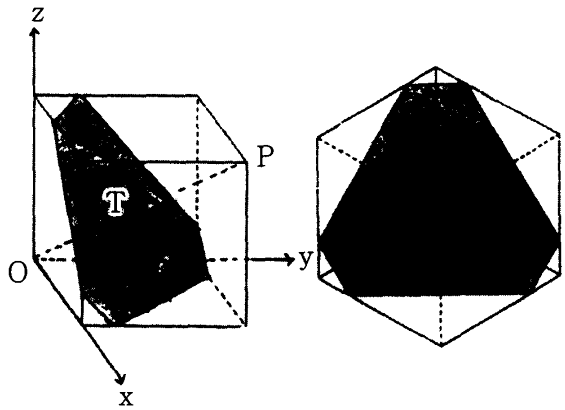
切断面は，$(a,\ 0,\ 3t-a)$を１つの頂点とする六角形である。

この六角形を回転軸の回りに回転させてできる図形は，

半径 $\sqrt{6t^2-6at+2a^2}$ の円

だから，回転体の切断面の面積は

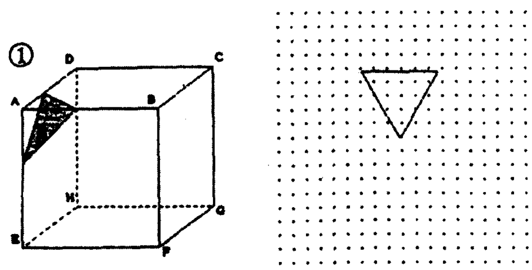
$S(t) = 2\pi(3t^2-3at+a^2)$

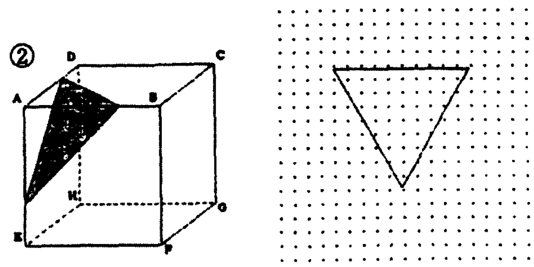


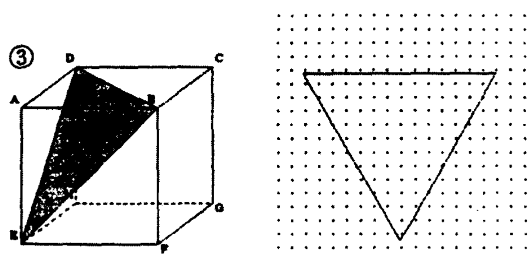

ハ．切断面の図形の対称性及び回転軸と積分する座標軸の方向のちがいの調整に留意して積分すると

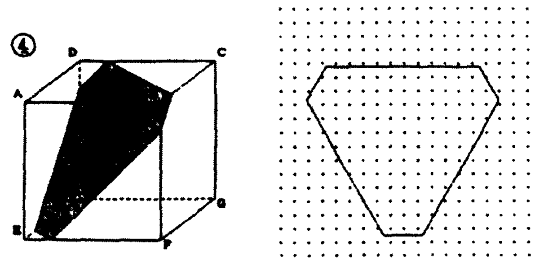
$$\frac{1}{2}V = \pi\int_0^{\frac{a}{3}} 6t^2\cdot\sqrt{3}\,dt + 2\pi\int_{\frac{a}{3}}^{\frac{a}{2}} (3t^2-3at+a^2)\cdot\sqrt{3}\,dt = \frac{\sqrt{3}}{6}\pi a^3$$

したがって，求める回転体の体積 $V = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$

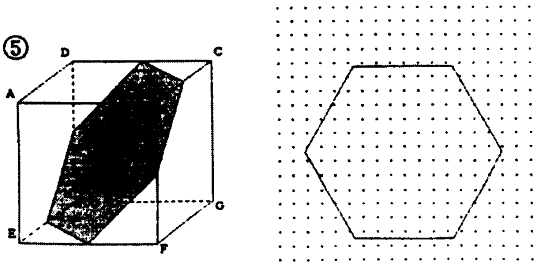


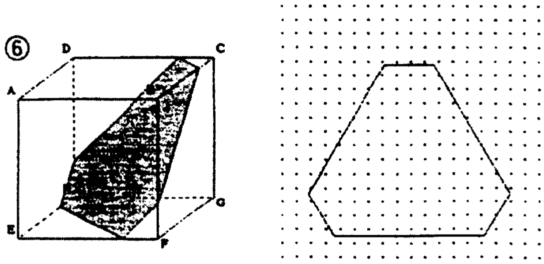



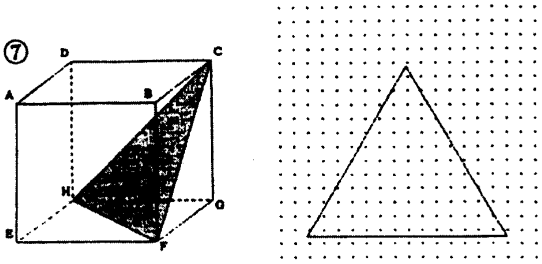
⑤



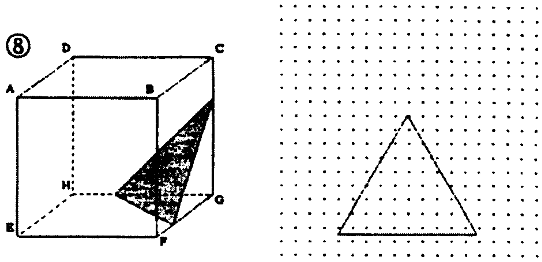

⑥



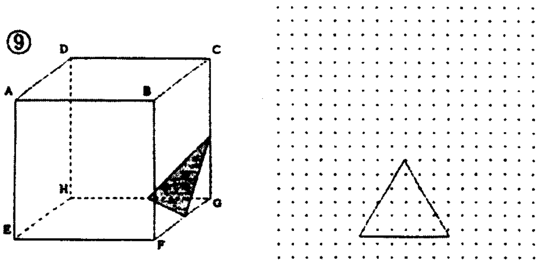

⑦




⑧




⑨




**3．発展的考察と効果的なコンピュータの利用について**

（1） カヴァリエリの原理と空間図形への応用

２つの曲線で囲まれる平面図形Ｐ，Ｑがあるとき，定直線に平行な直線から Ｐ，Ｑが切り取る線分の長さの比が，つねにｍ：ｎならば，２つの図形Ｐ，Ｑの面積比もｍ：ｎである。

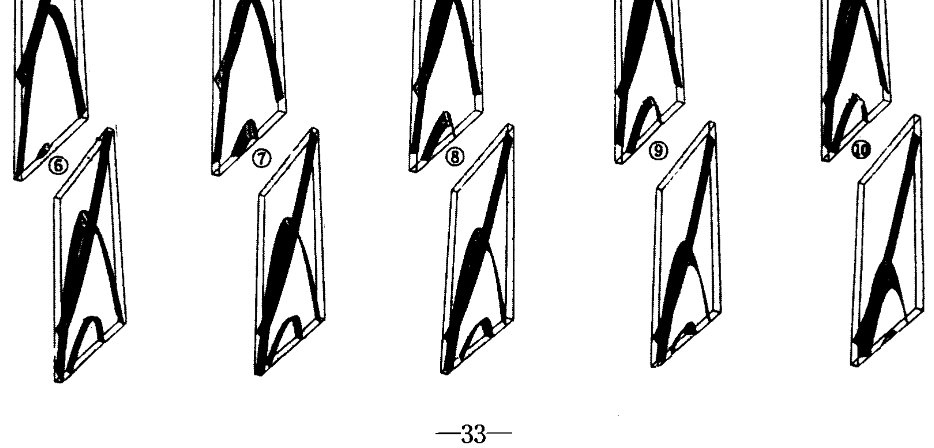
（ｍ＝ｎのときは，等積になる。）

２つの曲面で囲まれる空間図形の体積についても同様である。

空間図形では，平面：$x-y=0$ と回転放物面：$y=-x^2-z^2+\frac{3}{4}$ で囲まれた立体の体積を求めるときに，カヴァリエリの原理が利用できれば鮮やかである。

次に，このことをコンピュータ・グラフィックスで再現しようと考えた。

数式処理ソフト「Ｍａｔｈｅｍａｔｉｃａ」を使えば，このことが可能となる。



平面：x－y＝0 と 回転放物面：$y=-x^2-z^2+\frac{3}{4}$ で囲まれた立体の体積は，

平面：z＝0 と 回転放物面：$y=-x^2-x-z^2+\frac{3}{4}$ で囲まれた立体の体積に等しい。

この立体は，放物線：$y=-x^2-x+\frac{3}{4}$，z＝0 をy軸の回りに回転したものだから

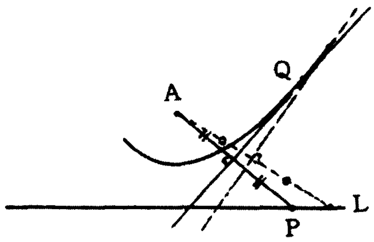
求める体積$V=\frac{1}{2}\pi\ 1^2\cdot 1=\frac{1}{2}\pi$

（2） 操作活動から関数入力へ

２次曲線の導入として，紙面上で包絡線が放物線・楕円・双曲線になるように折る方法がある。なぜこのように折れば，その折り目が放物線・楕円・双曲線になるのかということについては，簡単に説明するだけで，あまり深く触れることはない。勿論，生徒の中には，この証明にチャレンジする生徒もいる。

この作図は，「Ｇｅｏｂｌｏｃｋ」を使えば容易である。

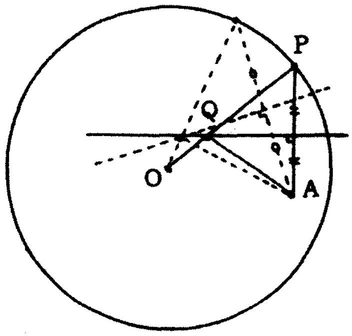
〈放物線の場合の略証〉




定点Ａと定直線Ｌ上の点Ｐを重ねるとこの折り目となる直線は，線分ＡＰの垂直二等分線になっている。

この操作を繰り返すと，定点Ａと定直線Ｌまでの距離が等しい点Ｑを決定していくことになる。

〈楕円の場合の略証〉



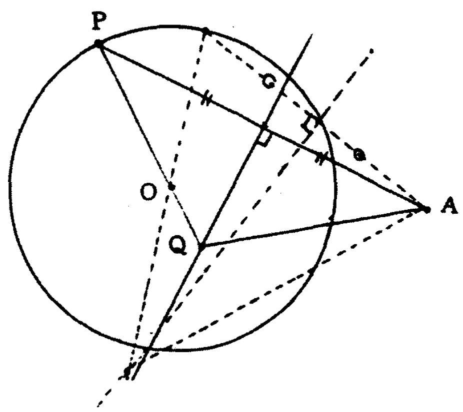

円の半径ＯＰと線分ＰＡの垂直二等分線との交点をＱすると，ＡＱ＝ＰＱである。

このとき，

ＯＱ＋ＡＱ＝ＯＱ＋ＰＱ＝ＯＰ（円の半径）

この操作を繰り返すと，２定点Ｏ，Ａからの距離の和が一定（円の半径）である点Ｑを決定していくことになる。

〈双曲線の場合の略証〉




直線ＯＰと線分ＡＰの垂直二等分線との交点をＱとすると，ＡＱ＝ＰＱである。

このとき，

ＯＱ－ＡＱ＝ＯＱ－ＰＱ＝ＯＰ（円の半径）

この操作を繰り返すと，２定点Ｏ，Ａからの距離の差が一定（円の半径）である点Ｑを決定していくことになる。

「関数ラボ」に入力して，グラフィックスの再現をしようとすると，次のようになる。

図において，A（$r\cos\theta$，$r\sin\theta$），P（p，0）とする。

線分APの中点Mの座標は，M（$\dfrac{r\cos\theta+p}{2}$，$\dfrac{r\sin\theta}{2}$）

また，$\overrightarrow{PA}=(r\cos\theta-p,\ r\sin\theta)$

線分APの垂直二等分線上の任意の点を

Q（x，y）とおくと，$\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{MQ}$ より

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$$

ここで，$\overrightarrow{MQ}=\left(x-\dfrac{r\cos\theta+p}{2},\ y-\dfrac{r\sin\theta}{2}\right)$ だから

$$(r\cos\theta-p)\left(x-\frac{r\cos\theta+p}{2}\right)+r\sin\theta\left(y-\frac{r\sin\theta}{2}\right)=0$$

$$(r\cos\theta-p)x+ry\sin\theta=\frac{r^2-p^2}{2}\quad\cdots①$$

①で媒介変数である$\theta$がかわるとき，この直線群は次の曲線に接しながら動く。

①の両辺を$\theta$で微分して

$$-rx\sin\theta+ry\cos\theta=0\quad\cdots②$$

①より，

$$rx\cos\theta+ry\sin\theta=px+\frac{r^2-p^2}{2}\quad\cdots③$$

②と③の両辺を，それぞれ平方したものを辺々加えると

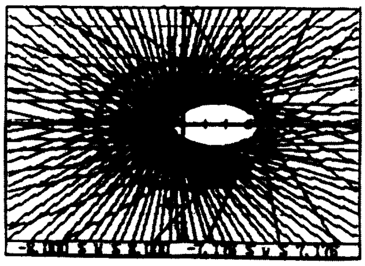
$$r^2x^2+r^2y^2=\left(px+\frac{r^2-p^2}{2}\right)^2$$

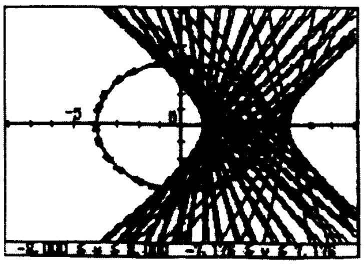
式を整理して

$$\frac{4}{r^2}\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4}{r^2-p^2}y^2=1\quad\cdots④$$

④は，$r>p$のときO（0，0）とP（p，0）を焦点とする楕円になり，

$r<p$のときO（0，0）とP（p，0）を焦点とする双曲線になる。



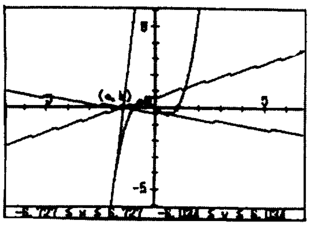


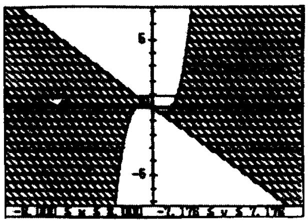
（3）直感的に理解した特性の再現と確認のために

3次関数のグラフが変曲点に関して点対称であること。

3次関数のグラフにおいて，ある点を通る接線の数とその点の存在範囲の関係。

《グラフ10》





《グラフ10》

3次関数のグラフに引いた2本の平行な接線とそのグラフの交点・接点・変曲点・接点・交点の等間隔性《グラフ11》などは，直感的に理解するだけでなく平行移動や点対称移動の式を入力したり接線やグラフとの交点の式を入力してコンピュータ・シミュレーションで再現し確認すれば，更に理解を深めることができる。

例えば，《グラフ11》を確かめようとすれば，次のようなことを考えることになる。

3次関数 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ …① のグラフを平行移動して変曲点を原点に移す。

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=6ax+2b=0$ より

変曲点の座標は，$\left(-\dfrac{b}{3a},\ f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ だから，①のグラフを x 軸の正の方向に $\dfrac{b}{3a}$

y 軸の正の方向に $-f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)$ 平行移動すると，①のグラフの変曲点は，原点に移る。

このとき，①は $y=ax^3-\dfrac{b^2}{3a}x$ …② に移る。

② は奇関数だから，そのグラフは原点に関して点対称である。

したがって，3次関数 ① のグラフも，変曲点に関して点対称である。

3次関数のグラフは，変曲点に関して点対称であるから，変曲点を原点に移すことによって，

$f(x)=ax^3+bx$ …③ とおいても一般性を失わない。

このグラフ上の点 $T_1(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

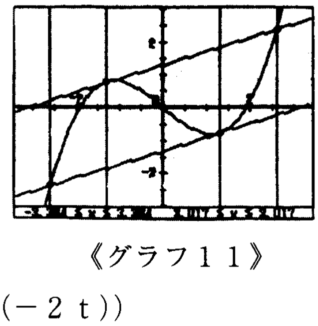
すなわち

$y-(at^3+bt)=(3at^2+b)(x-t)$

$\therefore\ y=(3at^2+b)x-2at^3$ …④

③と④を連立させて，交点の x 座標を求めると，

$a(x-t)^2(x+2t)=0$ より $x=t,\ -2t$



《グラフ11》

したがって，接点と異なる交点Aの座標は，$A(-2t,\ f(-2t))$

また，$T_1(t,\ f(t))$ における接線 ④ と平行な接線の接点の座標を $T_2(s,\ f(s))$ とおく。ただし，$s \neq t$

題意より，$f'(s)=f'(t)$ より $3as^2+b=3at^2+b$

$\therefore 3a(s+t)(s-t)=0$

$s \neq t$ だから，$s=-t$

以上のことより，接線④と平行な接線の接点の座標は，$T_2(-t,\ f(-t))$ 接点と異なる交点Bの座標は，$B(2t,\ f(2t))$ となる。

これらの点や接線の式を入力してコンピュータ・グラフィックで再現すると、３次関数のグラフで引いた２本の平行な接線とそのグラフの交点・接点・変曲点・接点・交点の等間隔性を確認することができる。《グラフ１１》

## 4．コンピュータを使った授業の指導案

（１）単元

関数とグラフ

（２）本時の主題

媒介変数を含む関数のグラフ

（３）本時のねらい

$t$ を媒介変数とする $x$ の関数 $y=f(x,\ t)$ において，$t$ の値を変化させて描いたグラフの特性をつかませる。

更に，そのグラフの特性を利用した問題が解けるようにし，媒介変数を含んだ関数とグラフの理解を深める。

（４）授業展開過程

| 時間 | 学習内容及び活動 | 指導上の留意点 |
|---|---|---|
| 導入<br>(10分) | ・実数 $t$ が $1 \leqq t \leqq 2$ で変化するとき，直線 $y=-tx+t$ が通りうる範囲を図示する。<br>（発問）グラフを書きながら，気付いたことを２つ以上挙げなさい。<br>※机間巡視をして生徒の理解度を確かめながら，コンピュータ・グラフィックで残像を残したグラフを描いて，直線が通りうる範囲を理解させる。 | ・グラフは，座標軸を設定したプリントに書かせる。(別紙)<br>・生徒が発表したことをまとめ，説明や証明をしていく。 |
| 展開<br>(30分) | ・実数 $t$ が変化するとき，直線 $y=tx-t^2$ が通りうる範囲を図示する。<br>（発問）グラフを書きながら，気付いたことを２つ以上挙げなさい。<br>［証１］<br>$t$ の２次方程式 $t^2-xt+y=0$ と考え<br>この２次方程式が実数解をもつ条件を求める<br>［証２］<br>$x$ を固定して，$t$ を変化させたときの $y$ の最大値を考える。<br>《放物線に接した直線であることに気付かせ， | ・生徒が発表したことをまとめ，説明や証明をしていく。<br>・［証２］の説明は，生徒が，この考え方に気付いた場合だけとする。 |

| | | |
|---|---|---|
| | 放物線と直線の接点の座標を求めておく。》<br>※机間巡視をして生徒の理解度を確かめながら，コンピュータ・グラフィックで残像を残したグラフを描いて，直線が通りうる範囲を理解させる。 | |
| | ・実数ｔがｔ≧－１で変化するとき，直線 $y=tx-t^2$ が通りうる範囲を図示する。<br>① この直線が接する放物線の式を求める。<br>② 放物線と直線の接点の座標を求める。<br>③ ｔ≧－１のとき，接点のｘ座標の範囲を求める。 | ・［証１］の考え方ではｔの２次方程式 $t^2-xt+y=0$ がｔ≧－１の解を少なくとも１つもつ条件を求めることになる。 |
| まとめ<br>(10分) | ・学習内容をまとめ，時間があれば，次の問題で理解度を確認する。<br>・実数ｔが１＜ｔ＜２で変化するとき，直線 $y=tx-t^2$ が通りうる範囲を図示する。 | |

（５）準備物

使用教具；「ＩＢＭ関数ラボ」，ＮＥＣノートパソコン－9821，グラフ黒板

**5．おわりに**

コンピュータを使った授業の展開について，幾つかの事例を挙げてきた。

ここでは，どのような問題を考えるときにコンピュータを使って指導した方が，より効果的かという内容面での紹介になってしまったが，どのように利用すればよいかという方法面の考察や従来のような操作活動を取り入れた授業とコンピュータを取り入れた授業では，学習内容の理解度と定着度においてどのようなちがいがでてくるのかということも考察すべきであろう。

いくつかの課題はあるが，生徒の実態から判断すると，学習する内容によって板書と操作活動及びコンピュータを取り入れた指導を組み合わせて授業を展開していくことを考えている。

コンピュータを使った授業においても，はじめは好奇心から生徒の関心をひくが，学習内容の定着度を高めていく為には工夫が必要である。「ＩＢＭの関数ラボ」を使ってきて気付いたことであるが，数学的な考え方を養い，発展的に考える力をつけていくためにも，生徒自身が入力した関数の式でイメージした通りのグラフを描いたり，入力する式を工夫し改良するなどの経験をすることが大切である。そして，個々の生徒が入力したものを授業の中で評価する時間がもてれば，より効果的な授業になると考える。

**参考図書**

１.「関数グラフ編 関数ラボ」　日本アイ・ビー・エム　1992.5
２.「平面幾何編 Ｇｅｏｂｌｏｃｋ」　日本アイ・ビー・エム　1992.5
３.「秋山 仁の数学タイムトラベル」　日本放送出版協会　1995.7
４.「立体のとらえかた」　秋山 仁著 駿台文庫　1989.5
５.「数学の視覚的な解きかた」　秋山 仁著 駿台文庫　1989.5