

# てこクラック機構を題材とする高等学校数学 I 「図形と計量」の授業実践

森脇 政泰

本稿は当校の 2018 年度公開教育研究会における、高等学校数学科の公開授業「図形と計量」の課題学習」の報告である。この公開授業では、日常の事象に潜む三角形の辺の長さや角の大きさに着目して問題を見出し、三角比を利用して解決する活動を通して、課題解決のための資質・能力の育成を目指した。そのための題材として「てこクラック機構」を扱った。ここで「機構」とは機械の動きを作る仕組みのことである。

## 1. はじめに

当校の 2018 年度公開教育研究会の全体テーマは「課題解決のための資質・能力と豊かな創造性の育成 I」で、数学科の研究主題は「数学的活動による課題解決のための資質・能力の育成～数学的な見方・考え方を重視して～」であった。この研究主題に基づいて、高等学校数学科の公開授業として「図形と計量」の課題学習」を実施した。本稿はこの公開授業の報告である。

次期高等学校学習指導要領では、育成を目指す資質・能力が明確化されており、数学科の目標は、

数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を次のとおり育成することを目指す。

- (1) 数学における基本的な概念や原理・法則を体系的に理解するとともに、事象を数学化したり、数学的に解釈したり、数学的に表現・処理したりする技能を身に付けるようにする。
- (2) 数学を活用して事象を論理的に考察する力、事象の本質や他の事象との関係を認識し統合的・発展的に考察する力、数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う。
- (3) 数学のよさを認識し積極的に数学を活用しようとする態度、粘り強く考え数学的論拠に基づいて判断しようとする態度、問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとする態度や創造性の基礎を養う。

とされている（文部科学省，2018a，p.111）。

この目標の資質・能力は、いずれも課題解決のための資質・能力に関連しており、本授業では特に

- (1)の「事象を数学化」する技能
  - (2)の「数学を活用して事象を論理的に考察する力」
  - (3)の「数学的論拠に基づいて判断しようとする態度」
- の 3 つの育成を目指した。

課題学習は、現行の高等学校学習指導要領では数学 I と数学 A に、次期学習指導要領では数学 I，数学 II，数学 III に位置付けられている。次期学習指導要領では課題学習を、その科目で学習する「内容又はそれらを相互に関連付けた内容を生活と関連付けたり発展させたりするなどした課題を設け、生徒の主体的な学習を促し、数学のよさを認識させ、学習意欲を含めた数学的に考える資質・能力を高めるようにする」（文部科学省，2018a，p.114，p.117，p.120）とされている。また、次期学習指導要領解説数学編理数編では「課題については、各内容で学習する内容を総合したり日常の事象や他教科等での学習に関連付けたりするなどして見いだされるものや、生徒の疑問をもとにしたものなどを設定する」（文部科学省，2018b，p.50，p.68，p.84）とされている。

本授業では、数学 I の「図形と計量」の課題学習として、日常の事象に潜む三角形の辺の長さや角の大きさに着目して問題を見出すようにし、三角比を利用してその問題を解決する活動を行って、目標とする 3 つの資質・能力の育成を目指した。

そのための題材として、自動車のワイパーや自転車をこぐときの脚の動きなどに見られる「てこクラック機構」に着目した。ここで「機構」とは、回転運動を直線運動に変換するような、機械の動きを作る仕組みのことをいう。次の章のように、「てこクラック機構」の動きは「図形と計量」で学習する内容で解析することができる。「図形と計量」では、日常の事象に関連付けた課題として、測量に関わるものが多く扱われているが、機械に関連する題材も授業で扱う余地があると考え、以前「ポアソリエの機構」という機構の動きを解析する授業を行った（井上芳文 ほか，2012，pp.68-69）。この授業実践を発表した際、もう少し扱いやすい機構がないかとの質問を受け、4本の棒を四角形につないだような形の「てこクラック機構」を公開授業の題材として取り上げた。本稿ではこの題材の可能性も検討したい。

## 2. てこクランク機構について

棒を三角形に組むと固定されて動くことはない。これはトラス構造と呼ばれ、建築などに利用されている。

授業で扱ったのは、図1のように長さが

$$AB=18, BC=8, CD=17, DA=6 \dots\dots \textcircled{1}$$

(単位は cm) である 4 本の棒 (リンク) を接続してできる機構である。このような 4 本の棒をつないだ機構を 4 節リンク機構という。

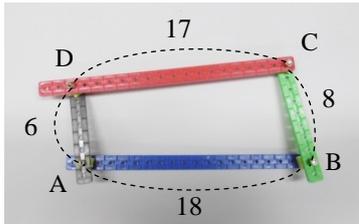


図1 (単位は cm)

この機構は、固定する棒や動かす頂点によって動き方が変わる。その例を2つ挙げる。

**例1 (てこクランク機構).** 図2のように、辺 AB を固定して点 D を動かすと、点 D は一回転させることができ、それに応じて点 C は、点 B を中心とし、辺 BC の長さを半径とする定まった範囲の円弧を往復する (これを「揺動する」という)。これを「てこクランク機構」という。これは中学校技術・家庭科の技術分野で扱われる。

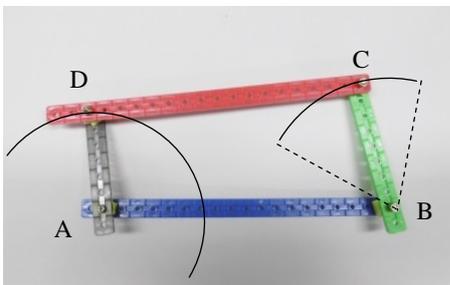


図2 てこクランク機構

**例2 (両クランク機構).** 図3のように、最も短い辺 AD を固定すると、点 B は一回転させることができ、それに応じて点 C も一回転する。この機構を「両クランク機構」という。

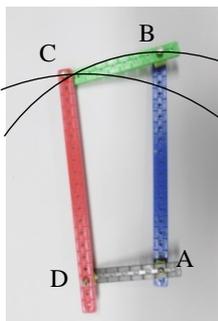


図3 両クランク機構

ここで、揺動するリンクを「てこ」、完全に回転するリンクを「クランク」という。

ここからは、例1のてこクランク機構を取り上げる。

この機構では辺 AB が固定されており、点 D を回転させると、点 C は点 B を中心とし、辺 BC の長さを半径とする定まった範囲の円弧を往復する。以下、この範囲を求める。

図4のように、2点 A, C を結んで△ACD と△ABC を考える。

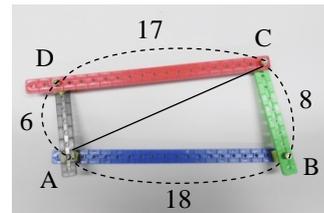


図4

まず、△ACD に着目する。△ACD において、辺の長さが変化するのは辺 AC だけであるから、この三角形が存在するための条件は、

$$|AD-CD| < AC < AD+CD \dots\dots \textcircled{2}$$

である。

$AC = |AD-CD|$  となるのは、図5の場合で、 $AC = AD+CD$  となるのは、図6の場合である。

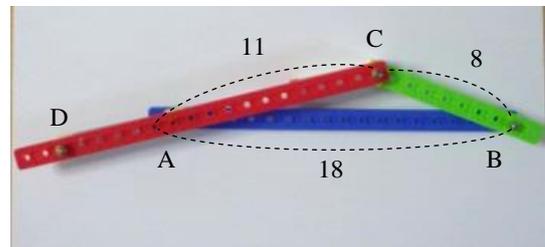


図5

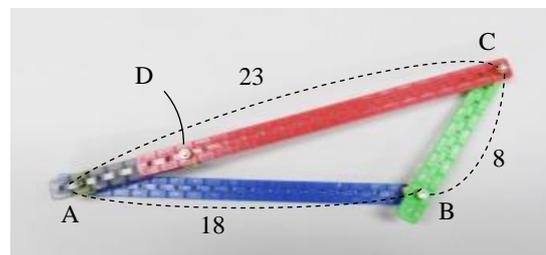


図6

いずれの場合も 3 点 A, C, D は一直線上に並ぶ。この 3 点 A, C, D が一直線上に並ぶ場合も含めると、不等式②から線分 AC の長さの範囲は、

$$|AD-CD| \leq AC \leq AD+CD$$

となり、4 辺の長さ①から、

$$11 \leq AC \leq 23$$

を得る。

一方、 $\triangle ABC$  に着目すると、点 C の位置によらず、常に  $AB+BC=26$ 、 $|AB-BC|=10$  である。よって、点 C の位置によらず、常に

$$|AB-BC| < 11 \leq AC \leq 23 < AB+BC$$

すなわち

$$|AB-BC| < AC < AB+BC$$

が成り立つので、 $\triangle ABC$  は常に存在する。

$\theta = \angle ABC$  とおくと、 $\triangle ABC$  において余弦定理から、

$$\cos \theta = \frac{18^2 + 8^2 - AC^2}{2 \cdot 18 \cdot 8} \quad (11 \leq AC \leq 23) \dots\dots \textcircled{3}$$

を得る。

③から、線分 AC の長さが大きくなると、 $\cos \theta$  は単調に減少し、 $\theta$  は単調に増加することがわかる。

よって、 $AC=11$  のとき (図 5)、 $\theta$  は最小となる。このときの  $\theta$  の値は、③から

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{267}{288} = \frac{89}{96} \\ &= 0.92708\dots \end{aligned}$$

となり、三角比の表から  $\theta \doteq 22^\circ$  を得る。

また、 $AC=23$  のとき (図 6)、 $\theta$  は最大となる。このとき、③から

$$\begin{aligned} \cos \theta &= -\frac{141}{288} = -\frac{47}{96} \\ &= -0.48958\dots \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$  であるから、三角比の表により  $180^\circ - \theta \doteq 61^\circ$  となるので、 $\theta \doteq 119^\circ$  を得る。

したがって、点 C は辺 BC の長さを半径とする円弧を、 $\angle ABC$  が約  $22^\circ$  から約  $119^\circ$  となる範囲で往復する。このように、てこクラック機構の動きは、数学 I の「図形と計量」や数学 A の「図形の性質」で学習する内容で解析することができる。

### 3. 授業の計画

図 7 は、平成 28 年 12 月の中央教育審議会答申で示された算数・数学の学習過程のイメージ図(文部科学省, 2018b, p.27) である。

この図における A1, B, C は、育成を目指す「事象を数学化」する技能、「数学を活用して事象を論理的に考察する力」、「数学的論拠に基づいて判断しようとする態度」に関わると考えられる。そこで、現実の事象に関連し、図 7 の  $A1 \rightarrow B \rightarrow C$  という学習過程が見込まれ、目標とする資質・能力の育成が期待できるような題材を検討した。

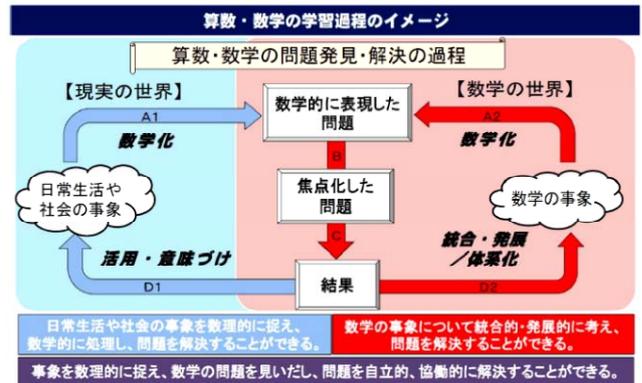


図 7

数学 I 「図形と計量」では、日常の事象に関連付けた課題として、測量に関わるものが多く扱われている。前の章のように、機械に関連する「てこクラック機構」の動きも数学 I の「図形と計量」や数学 A の「図形の性質」で学習する内容を利用して解析することができる。また、てこクラック機構は四角形のような形なので、模型を作ることは容易で手軽に観察することができる。この機構の模型を繰り返し観察することで、生徒から円弧を往復する点 C の動く範囲が課題として見い出され、特徴的な図 6 の三角形から  $\angle ABC$  が最大となる場合がわかり、その角度が余弦定理から求められるという見通しを持つのではないかと予想した。この道筋は、図 7 の学習過程  $A1 \rightarrow B \rightarrow C$  に沿うものである。

このように、てこクラック機構は、目標とする資質・能力の育成のための題材として適当であり、機械に関連する教材の開発にもつながると考えられる。そこで、この機構を公開授業の題材として採用し、次のように第 1 時を計画した。

日 時 2018 年 11 月 16 日 (金)  
第 1 限 (9:50 ~ 10:40)

学年・組 4 年 B 組 40 人

単 元 図形と計量

単元計画 (全 20 時間)

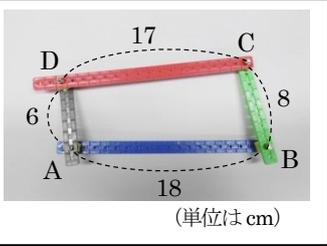
- (1) 鋭角の三角比・・・4 時間
- (2) 鈍角の三角比・・・4 時間
- (3) 正弦定理と余弦定理・・・5 時間
- (4) 図形の計量・・・5 時間
- (5) 課題学習・・・2 時間 (本時はその 1 時間目)

本時の題目 模型の動きを調べよう

本時の評価規準 (観点)

- ア. 日常の事象に潜む図形の数学的な特徴に着目して問題を見い出せたか。(見方・考え方)
- イ. 三角比の既習事項を用いて  $\angle ABC$  の大きさの範囲を求めることができたか。(技能)

授業展開過程

時間 (分)	学習活動	指導上の留意点	評価の実際
導入 5	○三角形と四角形の木枠を観察し、四角形の方は固定されずに動くことを確認する。	三角形についてトラス構造の話題に触れる。	
展開 ① 10	○四節リンク機構の模型を観察し、課題1に取り組む。  課題1 右の図のように4本の棒がつながれた模型で、頂点をそれぞれA, B, C, Dとします。1つの辺を固定し、1つの頂点(または辺)を動かしたとき、ほかの頂点はどのように動くでしょうか。   (単位はcm)	観察用の模型は40個準備する。	
展開 ② 30	・どのように動くか全体で共有する。 ○辺ABを固定し点Dを動かす場合に、数学的に考えられることを挙げる。 ・挙げられた内容から、次の課題を見い出す。  課題2 点Cの動く範囲を調べよう。	この場合の動きが、車のワイパーの動きに関わることを指摘する。	
まとめ 5	・個々に解決の方針を考察し、全体で検討して解決の構想を練る。 ・右側の限界は辺CDの延長線上に点Aが位置する場合で、左側の限界は辺CD上に点Aが位置する場合であることを模型で確認する。 ・それぞれの場合について、余弦定理から $\angle ABC$ の大きさを求める。 ・三角形の辺と角の大小関係や三角形が存在するための条件から、観察で判断した位置がそれぞれ $\angle ABC$ の大きさの最大・最小となることを確認し、課題2を解決する。	三角比の表や電卓など、何を使用してもよいことにする。	
	○動画を視聴し、課題2の機構の動きが、自転車をこぐときにも見られることを確認する。 ○本時の授業を振り返り、まとめを行う。	振り返りの際に、感想や質問を記述させる。	

ア:机間指導  
および発表

イ:机間指導  
および回収  
したワーク  
シート

第2時では、ワークシートを返却して生徒の記述にコメントし、第1時の補足や生徒から挙げた質問などを取り上げる。

#### 4. 授業の実施

##### (1) 授業の実際

授業の進度が変わったため、本授業は「(3) 正弦定理と余弦定理」の直後に実施した。

導入では、三角形と四角形の構造物としての違いを通

して、3辺の長さが与えられると三角形は一意的に定まるのに対して、四角形は4辺の長さが与えられても一意的に定まらないことを確認した。

課題1では、一人ひとりに模型を配付し、動きを観察させた。はじめは動かし方がわかりにくかったようで、予定より観察する時間を多く取った。この後に、どのように動くか意見を交流させたところ、てこクランク機構の動きに気づく生徒が多かった。机間指導やワークシートで確認したところ、これ以外の動き方は見つけられなかったようである。

辺 AB を固定し点 D を動かす場合に、数学的に考えられることを挙げる場面では、次の3つが挙げられた。

- ・三角形もつくりことができる。
  - ・ $\angle DAB=180^\circ$  のとき $\triangle DBC$ ができる。
  - ・点 D の動線は点 A を中心とした半径 AD の円の弧
- ここでは、自動車のワイパーの例を取り上げて、辺 BC の動きに注目させようとしたが、辺 BC の動く範囲の必要性に気づかせることはできなかった。そのため、課題2は授業者から提示した。

課題2では、想定していたように、 $\angle ABC$  が最大となる場合が図6であることに気がついた生徒が多かった。この場合、余弦定理から求めた余弦の値は負であるが、多くの生徒は、 $180^\circ - \angle ABC$  から $\angle ABC$  の値を求めることができた。

一方、 $\angle ABC$  が最小となる場合では、 $\angle DAB=180^\circ$  のとき(図8)が最小であると考えた生徒が少なかった。そこで、図5に気づいた生徒がいたので発表してもらったところ、模型で観察して確認したり、余弦定理を用いて図8の $\angle ABC$  を求め最小値と比較したりして、多くの生徒が納得できたようである。

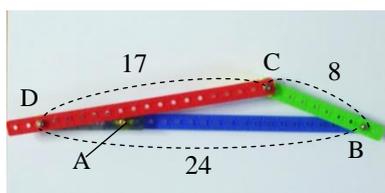


図8

時間が不足していたため、 $\angle ABC$  が最大・最小となる場合の数学的な考察はできなかった。

最後に、点 C がどのように動くかまとめたところで第1時の授業を終えた。

次の授業では、「三角形の辺と角の大小関係」に触れ、 $\angle ABC$  の最大・最小となる場合の説明をした。また、映像を視聴し、今回調べた動きが自転車のペダルをこぐときの運動に見られることを確認した。

## (2) 生徒の反応

ワークシートには「授業でわかったこと、さらに知りたいと思ったこと」と「今日の授業の感想」の2点について記述させた。

「授業でわかったこと、さらに知りたいと思ったこと」のうち、まず前半の「授業でわかったこと」に関する記述を挙げる。

多く見られたのは「日ごろの身近な生活に役立つような三角比の使い方がわかった」「三角比(正弦定理や余弦定理)を使えば日常の中にあるものの構造などがわかるのではないか」のような、三角比が身の回りで利用され

ていることに触れたものだった。

また、「四角形から三角形に発想を転換させることで角度が求められることがわかった」「四角形の辺の長さや角の大きさも、三角形のものが基礎になっているとわかった」のように、三角形に帰着させることがポイントであることに気づいた記述もあった。

このほかに「 $\angle ABC$  が最小のときは、(図8の)  $\triangle DCB$  になると思っていたが、本当は(図5の)  $\triangle ABC$  になることが分かった」「余弦定理を使うと、角度をわずかな情報から求めることができると改めてわかりました」「三角形は丈夫で安定しているが、四角形は不安定な図形である」などがあった。

後半の「さらに知りたいと思ったこと」については、「点 C の振幅を円周角として求めてみましたが上手にいきませんでした」「四角形の辺や角度を求められる公式などはあるか」「立体の角を考えてみたい」などがあった。これらは授業者が想定していないことだった。

次に「今日の授業の感想」の記述を挙げる。

最も多かったのは、まとめて書くと「実際に模型を使ったので、いろいろな発見があり、考えやすく、理解しやすく、(難しかったけれど)おもしろかった。楽しかった」というものである。余弦定理をすぐに適用するものではなかったことや、三角形の構造が丈夫であることの話がおもしろかった、という感想もあった。

次に多かったのは、「どの状態のとき $\angle ABC$  が最小・最大になるか考えるのが難しかった」という感想である。特に、最小となる図5の方については「最小の角度が D をはみ出してまで出るとは思わなかった」「自分は3点 D, A, B が(この順に)一直線になるときが最小だと思っていたが、最小値より  $2^\circ$  大きかった」などの記述が見られた。また難しかったこととして「cos の複雑な計算」を挙げるものもあった。

図7の学習過程 A1  $\rightarrow$  B  $\rightarrow$  C についても記述があり、「機構をつかって、全くゼロから自ら動かして数学的なことをしていくのはとても楽しかった」「実際に模型を動かしながら、何も知らない状態からの学びだったのでとても楽しかった」「最初の方、何がしたいのか理解できなかったが、最後は理解し、少しスカッとした」などが見られた。

このほかに、「点 D は  $360^\circ$  回るのに、点 C は  $97^\circ$  しか回らないのが不思議だった」「余弦定理(三角比)の汎用性がすごい」といった感想もあった。

授業では、自動車のワイパーや自転車をこぐ脚の動きを例として挙げたが、SL やモーターの機構に触れている記述もあった。

### (3) 授業を振り返って

公開授業として計画した第1時の授業展開過程は、本来2時間から3時間はかかる内容であった。課題2を授業者が提示したが、もう少し時間をかけて生徒から問いが見い出されるようにしたかった。また、課題2では観察に頼って、 $\angle ABC$ が最大・最小となる場合の数学的な考察ができなかったことも反省点である。個人で考える時間が想定より多く必要で、周囲と話し合いを始めるまでに授業を進めるところもあった。

育成を目指した3つの資質・能力については、事象を数学化し、数学を活用して事象を論理的に考察し、数学的論拠に基づいて判断するという図7の学習過程A1→B→Cを、不十分な点もあったが経験することはできた。しかし、資質・能力が育成されたことを評価する方法については準備が不足していた。この点については、動きを調べた後に、動かしたい角度を設計するような課題を出して、評価する方法などが考えられる。今後の改善点として検討していきたい。

第2時に、三角形の辺と角の大小関係から、 $\angle ABC$ の最大・最小となる場合の説明をしたが、これは適切ではなかった。三角形の辺と角の大小関係は、1つの三角形において成り立つことであって、1辺の長さが異なる複数の三角形の角の大きさを比較するような場合には適用できない。

授業の改善点は少なくないが、生徒の記述は概ね肯定的だった。難しいという意見もあったが、課題の質は生徒の実態に応じたものだと考えられる。

本授業は「図形と計量」の最後に課題学習として実施する予定だった。円に内接する四角形の問題などに取り組んだ後で、本授業を実施した場合、今回と異なる感想になることが予想される。

## 5. おわりに

研究会の後に、参加された数名の方々から、模型を持ち帰りたいとのご要望があり、いくつか提供させていただいた。また、このような授業を実施するために模型を生徒の人数分借りたいとの依頼もあり、すぐにお貸しした。後日、この模型を使った授業の記録をお送りいただき、今回とは異なる授業の展開を知ることができた。

このような交流ができたことや生徒の記述からも、てこクラック機構は数学の教材になり得る題材であると言える。資質・能力の育成に関わる評価の方法や、授業展開の工夫などを一層検討して、この題材の授業実践を重ねていきたい。

### 引用・参考文献

- 1) 安藤茂樹 ほか(2017)『技術・家庭 技術分野』, 開隆堂.
- 2) 井上芳文 ほか(2012)「高等学校数学における課題学習の教材開発」, 『中等教育研究紀要』58号, 広島大学附属中・高等学校, pp. 63-76.
- 3) 鈴木健司, 森田寿郎(2010)『基礎から学ぶ機構学』, オーム社.
- 4) 文部科学省(2018a)『高等学校学習指導要領』, [http://www.mext.go.jp/component/a\\_menu/education/micro\\_detail/\\_icsFiles/afieldfile/2018/07/11/1384661\\_6\\_1\\_2.pdf](http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/_icsFiles/afieldfile/2018/07/11/1384661_6_1_2.pdf), 2018. (2018年8月16日取得)
- 5) 文部科学省(2018b)『高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編』, [http://www.mext.go.jp/component/a\\_menu/education/micro\\_detail/\\_icsFiles/afieldfile/2018/07/17/1407073\\_05.pdf](http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/_icsFiles/afieldfile/2018/07/17/1407073_05.pdf), 2018. (2018年8月16日取得)