# 学位論文要約
# EMBEDDABILITY OF RIGHT-ANGLED ARTIN GROUPS ON THE COMPLEMENTS OF LINEAR FORESTS
# (線形森の補グラフに付随する直角アルティン群の埋め込み可能性)

片山 拓弥
広島大学大学院理学研究科数学専攻

Contents



## 1. Introduction

この節では，主結果及び背景を紹介する．最終目標は次の定理の証明の補完である．

**Theorem 1** ([3, Theorem 1.3(1)])**.** $\Lambda$ を有限な線形森の補グラフ，$\Gamma$ を有限グラフとする．もし $A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$ ならば $\Lambda \leq \Gamma$.

ここで，線形森とは道グラフの非交和である．また，有限グラフ $\Gamma$ に付随する直角アルティン群を $A(\Gamma)$ と書いた．さらに，グラフ $\Lambda$ からグラフ $\Gamma$ にフルグラフ埋め込みが存在するとき $\Lambda \leq \Gamma$ と書く．この定理の証明の過程で次の定理を援用した．

**Theorem 2** ([1, Theorem 3.14])**.** $\Lambda$ を有限な森の補グラフ，$\Gamma$ を有限グラフとする．もし $A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$ ならば $\Lambda \leq \Gamma^e$.

ここで森とはループを含まないグラフのことである．また，有限グラフ $\Gamma$ の拡張グラフ $\Gamma^e$ とは，頂点集合を $\Gamma$ の頂点の $A(\Gamma)$ による共役元全体とし，2 つの共役元が $A(\Gamma)$ において可換であるとき辺を張ると定めて得られるグラフである．しかし，Theorem 2 は Lee–Lee[5] によって反証され，上の Theorem 1 の証明は正しくないことが示された．そこで本論文では，Theorem 1 の証明に必要な仮定のもとで次の定理を示すことで Theorem 1 が正しいことを証明する．

**Theorem 3.** $\Lambda$ を有限な線形森の補グラフ，$\Gamma$ を有限グラフとする．もし $A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$ ならば $\Lambda \leq \Gamma^e$.

## 2. Preliminaries

この節では，[2, 6] に書かれている直角アルティン群の word problem や直角アルティン群の 2 つの元がいつ可換になるか，といった基本的事項を復習する．また，直角アルティン群の間の埋め込みのある種の良い性質である (KK) 条件を定義し，直角アルティン群の任意の埋め込みは (KK) 条件を満たす埋め込みに取り直すことができる，という Kim–Koberda の定理 [4, Theorem 4.3] を紹介する．

## 3. Graph-join

直角アルティン群の間の (KK) 条件を満たす埋め込み $A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$ が与えられたとき，フルグラフ埋め込み $\Lambda \leq \Gamma$ に還元できるか？という問題を考える．この節では，この問題がグラフの結としての $\Lambda$ の各既約成分に対する同様の問題に帰着されることを示す．

## 4. Proof of Theorem 3

この節で Theorem 3 の証明を行う.「線形森の補グラフ」は「道グラフの補グラフの結」であるので，まずは線形森の補グラフの既約成分は道グラフの補グラフであることに注意する．$\Lambda$ が道グラフの補グラフのときに，(KK) 条件を満たす埋め込み $A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$ をフルグラフ埋め込み $\Lambda \leq \Gamma$ に還元する．この結果を 2 節で紹介した Kim–Koberda の定理と 3 節の結果と組み合わせて，Theorem 3 を得る．

## References

[1] M. Casals-Ruiz, *Embeddability and universal theory of partially commutative groups*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2015, no. 24, 13575–13622.

[2] J. Crisp and B. Wiest, *Embeddings of graph braid and surface groups in right-angled Artin groups and braid groups*, Algebr. Geom. Topol. **4** (2004), 439–472.

[3] T. Katayama, *Right-angled Artin groups and full subgraphs of graphs*, J. Knot Theory Ramifications, **26** (2017) 1750059, 22 pp.

[4] S. Kim and T. Koberda, *Embedability between right-angled Artin groups*, Geom. Topol. **17** (2013), no. 1, 493–530.

[5] E. Lee and S. Lee, *Embeddability of right-angled Artin groups on complements of trees*, preprint, available at arXiv: 1706.10002.

[6] H. Servatius. *Automorphisms of graph groups*, J. Algebra **126** (1989), no. 1, 34–60.