論 文 審 査 の 要 旨

博士の専攻分野の名称	博 士（ 理学 ）	氏名	片 山 拓 弥
学位授与の要件	学位規則第４条第①・２項該当		

論文題目
Embeddability of right-angled Artin groups on the complements of linear forests
(線形森の補グラフに付随する直角アルティン群の埋め込み可能性)

論文審査担当者

主 査	教 授	作間 誠
審査委員	教 授	田丸 博士
審査委員	教 授	寺垣内 政一（大学院教育学研究科）
審査委員	准教授	古宇田 悠哉

〔論文審査の要旨〕

単純グラフΓに対して，Γに付随する直角アルティン群とは次の表示により与えられる群である:

$$A(\Gamma) = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \mid \{v_i, v_j\} \in E(\Gamma) \text{ ならば } [v_i, v_j] = 1 \rangle.$$

ここで $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ と $E(\Gamma)$ はそれぞれ Γ の頂点集合，辺集合である．Γが完全グラフのとき $A(\Gamma)$ は自由アーベル群，Γ が辺を持たないとき $A(\Gamma)$ は自由群であり，この意味で直角アルティン群は自由アーベル群と自由群の間を補完する群の族を成している．近年の研究により，(i) 任意のグラフブレイド群，および殆どすべての曲面基本群は直角アルティン群に埋め込まれること，および (ii) 任意の有限体積完備双曲３次元多様体の基本群はvirtualに（すなわち有限指数部分群をとると）直角アルティン群に埋め込まれること，が明らかにされ，直角アルティン群は曲面の写像類群の研究やThurstonのvirtualファイバー予想の解決で本質的な役割を果たしている。そして，Crisp-Sageev-Sapirが提出した下記の問題は，それ自身きわめて自然な問題であると同時に，その解決は様々な応用につながるため，多くの研究者の関心を集めている．

問題:与えられた 2 つの直角アルティン群の間に単射準同型（埋め込み）が存在するか否かを決定せよ．

この基本問題に対して，Kim-Koberda は，グラフ Γ に対して，その拡張グラフ $\mathrm{Ext}(\Gamma)$ の概念を導入し，次の定理を証明した．

定理：任意のグラフΛとΓに対して次が成立する．

(1) フルグラフ埋め込み$\Lambda \leq \mathrm{Ext}(\Gamma)$が存在するならば，直角アルティン群間の埋め込み $A(\Lambda) \to A(\Gamma)$が存在する．

(2) 直角アルティン群の間の埋め込み $A(\Lambda) \to A(\Gamma)$ は，(KK) 条件というある種の良い

性質を持つ埋め込み $A(\Lambda) \to A(\mathrm{Ext}(\Gamma))$ に修正できる。

この研究に立脚して,Casals-Ruiz は “定理”「Λ が有限な森の補グラフで Γ が有限グラフのとき，埋め込み $A(\Lambda) \to A(\Gamma)$ が存在するならフルグラフ埋め込み $\Lambda \leq \mathrm{Ext}(\Gamma)$ が存在する」 を発表した.本論文の著者は，この結果を利用して参考論文 2 において，Λ が有限な線形森の補グラフのときは,埋め込み $A(\Lambda) \to A(\Gamma)$ は定義グラフの間のフルグラフ埋め込み $\Lambda \leq \Gamma$ にまで還元できることを “示した”. ここで,線形森とは道グラフの非交和のことである.しかしながら,肝心の上記の Casals-Ruiz の “定理”の証明に不備があり，実際反例のあることがLee-Lee (arXiv: 1706.10002) によって指摘された. 従って参考論文 2 の上述の結果の証明はこのままでは成立しないという状況に陥った.

これを受けて本論文では，Λ を有限な線形森の補グラフというクラスに制限すれば,Casals-Ruiz の主張が成立することを保証する下記の定理を証明し，それにより，参考論文 2 の上述の結果の正しさも保証した.

主定理: Λ が有限な線形森の補グラフで Γ が有限グラフのとき, $A(\Lambda)$が $A(\Gamma)$ に埋め込まれるならば， Λは $\mathrm{Ext}(\Gamma)$ のフル部分グラフである.

主定理の証明の概略は以下の通りである. まず Kim-Koberda の結果により, 任意の直角アルティン群の間の埋め込みは (KK) 条件を満たす埋め込みに修正できることに注意する.

ステップ１.「直角アルティン群の間の (KK) 条件を満たす埋め込みを定義グラフの間のフルグラフ埋め込みに還元できるか」という問題は(グラフの意味の)結 (ジョイン) の各成分に対する同様の問題に帰着できることを証明する (本論文3節).

ステップ２. Λ が道グラフの補グラフで Γ が任意の有限グラフのとき, 任意の (KK) 条件を満たす埋め込み $A(\Lambda) \to A(\Gamma)$ をグラフのフル埋め込み $\Lambda \leq \Gamma$ に還元できることを証明する (本論文4節).

任意の有限線形森の補グラフは道グラフの補グラフの結と表すことができるため，ステップ１とステップ２により主定理の証明が完成する.

上の二つのステップで得られた結果は，いずれもそれ自身で，埋め込みの障害の研究における重要な成果である.特に (KK) 条件を満たす直角アルティン群の埋め込みから道グラフの補グラフのフル埋め込みを構成する議論は，先行研究に類似の議論がない独創的なものである. これを補グラフの世界で解釈すると，丁度“道の持ち上げ”に対応しており，Kim-Koberda や Lee-Lee によりグラフの被覆の理論と直角アルティン群の埋め込みの研究の関係が示唆されていることを考え合わせれば，非常に意義深い結果と言える.

以上，審査の結果，本論文の著者は博士 (理学) の学位を授与される十分な資格があるものと認める.

公表論文
Embeddability of right-angled Artin groups on the complements of linear forests
Takuya Katayama
Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 27 (2018), no. 1, 1850010, 10pp.

参考論文
(1) RAAGs in knot groups
Takuya Katayama
RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B66 (2017), 037-056.

(2) Right-angled Artin groups and full subgraphs of graphs
Takuya Katayama
Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 26 (2017), no. 10, 1750059, 22pp.

(3) The RAAGs on the complement graphs of path graphs in mapping class groups
Takuya Katayama and Erika Kuno
arXiv: 1804.03470v2