学位論文要旨

Embeddability of right-angled Artin groups on the complements of linear forests
(線形森の補グラフに付随する直角アルティン群の埋め込み可能性)

片山 拓弥

与えられた単純グラフ Γ に対して，Γ に付随する直角アルティン群とは次の表示により与えられる群である:

$$A(\Gamma) = \langle\ v_1, v_2, \ldots, v_n \ \mid\ \{v_i, v_j\} \in\ E(\Gamma) \text{ ならば } [v_i, v_j] = 1\ \rangle.$$

ここで $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ と $E(\Gamma)$ はそれぞれ Γ の頂点集合，辺集合である．与えられた 2 つの直角アルティン群の間に単射準同型 (以下，埋め込み) が存在するか否かを決定せよ，という問題は Crisp–Sageev–Sapir によって提起された．この問題が提起された背景は次のようなものである．まず，Servatius–Droms–Servatius によって閉双曲曲面の基本群を部分群に持つ直角アルティン群の存在が示された．そして Crisp–Wiest，Crisp–Sageev–Sapir などによってある種の閉双曲的曲面の基本群を部分群に持たない直角アルティン群についても調べられた．しかし，その時点では直角アルティン群の間の埋め込みの非存在を示すときに，閉双曲的曲面の基本群や自由アーベル群のような，いわば非常に特殊な部分群の存在性・非存在性を使う以外に一般的な手法はほとんどなかった．それで，一般的にどのような方法で埋め込みの存在性を判定するかを問うたのが上記の問題である．この問題に対して，Kim–Koberda は判定のアルゴリズムを与えるため，有限グラフ Γ に対して拡張グラフ Γ^e を定義し，定理「$\Lambda \leq \Gamma^e \Rightarrow A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$」を示して，組織的に埋め込みを構成する手法を与えた．その一方で直角アルティン群の間の埋め込み $A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$ を (KK) 条件というある種の良い性質を持つ埋め込み $A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma^e)$ に修正できることを示して，埋め込みの研究の基礎を作った．しかし，依然として Crisp–Sageev–Sapir の

問題解決にはほど遠い状況である．埋め込みの障害を抽出する研究としては Casals-Ruiz の “定理”「Λ が有限な森の補グラフで Γ が有限グラフのとき，$A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma) \Rightarrow \Lambda \leq \Gamma^e$」がある．これを利用して参考論文 2 において，$\Lambda$ が有限な線形森の補グラフのときは，埋め込み $A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$ は定義グラフの間のフルグラフ埋め込み $\Lambda \leq \Gamma$ にまで還元できることを “示した”．ここで線形森とは，道グラフの非交和のことである．しかし，肝心の上記の Casals-Ruiz の “定理”の証明に不備があり，実際反例のあることが Lee–Lee (arXiv: 1706.10002) によって指摘された．従って参考論文 2 の上述の結果の証明はこのままでは成立しない．これを受けて本論文では，Λ を有限な線形森の補グラフというクラスに制限すれば，Casals-Ruiz の “定理”が成立することを示し，参考論文 2 の上述の結果が正しいことを示した．本論文の主定理は「Λ が有限な線形森の補グラフで Γ が有限グラフのとき，$A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma) \Rightarrow \Lambda \leq \Gamma^e$」である．

主定理の証明は以下のようになっている．Kim–Koberda の結果により，任意の直角アルティン群の間の埋め込みは (KK) 条件を満たす埋め込みに修正することができる．本論文の 3 節で「直角アルティン群の間の (KK) 条件を満たす埋め込みを定義グラフの間のフルグラフ埋め込みに還元できるか」という問題は（グラフの意味の）結の各成分に対する同様の問題に帰着できることを示す．有限線形森の補グラフは道グラフの補グラフの結と表すことができるので，この帰着は主定理の証明の中の重要なステップである．そして 4 節で，Λ が道グラフの補グラフで Γ が任意の有限グラフのときに，任意の (KK) 条件を満たす埋め込み $A(\Lambda) \hookrightarrow A(\Gamma)$ をグラフのフル埋め込み $\Lambda \leq \Gamma$ に還元できることを示す．以上のことを組み合わせて主定理を得る．3 節の結果と 4 節の結果はいずれも埋め込みの障害を研究するうえで理論的に重要な成果である．特に (KK) 条件を満たす直角アルティン群の埋め込みから道グラフの補グラフのフル埋め込みを構成する議論は先行研究に類似の議論はなく，補グラフの世界で解釈するとちょうど “道の持ち上げ”を行っており，グラフの被覆の理論と直角アルティン群の埋め込みの研究の関係が Kim–Koberda や Lee–Lee により示唆されている現状では非常に意義深い結果と言える．