

平成 30 年度
広島大学博士論文

複数のばね・ダッシュポットで離散的に
連結された二重はりの振動解析
(Vibration Analyses of Double Beams Discretely Connected
by Multiple Springs and Dashpots)

2018 年 5 月

工学研究科 機械システム工学専攻

加藤 隆一

目次

第1章	緒論	1
1.1	研究の背景と目的	1
1.2	従来の研究概要	4
1.2.1	連続的に接合された二重はりの振動	4
1.2.2	離散的にばねで連結された二重はりの振動	5
1.3	本論文の構成	7
第2章	複数のばねで離散的に連結された二重はりの自由振動	8
2.1	緒言	8
2.2	理論解析	9
2.2.1	運動方程式	9
2.2.2	固有角振動数とモード関数	10
2.3	数値計算結果	16
2.3.1	連結ばねが1本の場合 (ケース A)	16
2.3.2	連結ばねが2本の場合 (ケース B)	25
2.4	有限要素法解析による検証	29
2.5	結言	32
第3章	複数のばね・ダッシュポットで離散的に連結された二重はりの強制振動	34
3.1	緒言	34
3.2	理論解析	35
3.2.1	運動方程式	35
3.2.2	モード関数の直交性	37
3.2.3	強制振動	43
3.3	数値計算結果	45
3.3.1	連結要素が1組の場合 (ケース A)	45
3.3.2	連結要素が2組の場合 (ケース B)	52
3.4	有限要素法解析による検証	55
3.5	結言	60

第4章	複数のばね・ダッシュポットで離散的に連結された 二重はりの衝撃応答	61
4.1	緒言	61
4.2	理論解析	62
4.2.1	運動方程式と自由振動解	62
4.2.2	過渡応答	63
4.3	数値計算結果	67
4.3.1	連結要素が1組の場合 (ケース A)	67
4.3.2	連結要素が2組の場合 (ケース B)	74
4.4	有限要素法解析による検証	78
4.5	結言	82
第5章	今後の研究課題	83
第6章	結論	86
	参考文献	88
	原著論文および発表論文	92
	謝辞	93
	付録 A 運動方程式の無次元化	
	付録 B FEM 解析モデル	
	付録 C 減衰係数が位相遅れに与える影響 (2 質点モデル)	
	付録 D 1 自由度系の過渡応答の一般解	
	付録 E 残留振動振幅の最小条件	

記号一覧

第 2 章

a_j はりの左端から j 番目のばねまでの距離

$$a'_j = a_j/l$$

b_i はり i の幅

E_i はり i のヤング率

$$e_i = \sqrt{k'_i/\mu_i}$$

h_i はり i の厚さ

I_i はり i の断面 2 次モーメント

K_j j 番目の連結ばねのばね定数

$$K'_j = (K_j l^3)/(E_1 I_1)$$

$$k'_i = (E_i I_i)/(E_1 I_1)$$

l はりの長さ

p 系の固有角振動数

p_1 系の 1 次の固有角振動数

S_i はり i の断面積

t 時間

$$t' = p_1 t$$

$U(\bullet)$ ステップ関数

w_i はり i のたわみ

$$w'_i = w_i/l$$

x_i はり i の x 座標

$$x'_i = x_i/l$$

β 位相遅れ

$\delta(\bullet)$ デルタ関数

$$\delta'(\bullet) = \delta(\bullet)l$$

$$\mu_i = (\rho_i S_i l^4 p_1^2)/(E_1 I_1)$$

$$v_i = \sqrt{p/e_i}$$

ρ_i はり i の密度

$\phi_{i,r}$ 系の r 次のモード関数

第3章

a_j はりの左端から j 番目のばねまでの距離

$$a'_j = a_j/l$$

b_i はり i の幅

C_j j 番目のダッシュポットの減衰係数

$$C'_j = (C_j l^3 p_1)/(E_1 I_1)$$

c_i はり i の減衰係数

$$c'_j = (c_j l^4 p_1)/(E_1 I_1)$$

\bar{c}_r r 次のモード減衰

d 調和外力が作用する位置

$$d' = d/l$$

E_i はり i のヤング率

F_0 調和外力の振幅

$$F'_0 = (F_0 l^2)/(E_1 I_1)$$

\bar{F}_r r 次のモード外力

h_i はり i の厚さ

I_i はり i の断面 2 次モーメント

K_j j 番目のばねのばね定数

$$K'_j = (K_j l^3)/(E_1 I_1)$$

$$k'_i = (E_i I_i)/(E_1 I_1)$$

\bar{k}_r r 次のモード剛性

l はりの長さ

p_1 系の 1 次の固有角振動数

S_i はり i の断面積

t 時間

$$t' = p_1 t$$

$U(\bullet)$ ステップ関数

w_i はり i のたわみ

$$w'_i = w_i/l$$

x_i はり i の x 座標

$$x'_i = x_i/l$$

$\delta(\bullet)$ デルタ関数

$$\delta'(\bullet) = \delta(\bullet)l$$

$$\mu_i = (\rho_i S_i l^4 p_1^2) / (E_1 I_1)$$

$\bar{\mu}_r$ r 次のモード質量

ρ_i はり i の密度

$\phi_{i,r}$ 系の r 次のモード関数

ω 調和外力の励振振動数

$$\omega' = \omega / p_1$$

第 4 章

a_j はりの左端から j 番目のばねまでの距離

$$a'_j = a_j / l$$

b_i はり i の幅

C_j j 番目のダッシュポットの減衰係数

$$C'_j = (C_j l^3 p_1) / (E_1 I_1)$$

c_i はり i の減衰係数

$$c'_j = (c_j l^4 p_1) / (E_1 I_1)$$

\bar{c}_r r 次のモード減衰

d 半波正弦励振力が作用する位置

$$d' = d / l$$

E_i はり i のヤング率

F_0 半波正弦励振力の振幅

$$F'_0 = (F_0 l^2) / (E_1 I_1)$$

\bar{f}_r r 次のモード外力

h_i はり i の厚さ

I_i はり i の断面 2 次モーメント

K_j j 番目のばねのばね定数

$$K'_j = (K_j l^3) / (E_1 I_1)$$

$$k'_i = (E_i I_i) / (E_1 I_1)$$

\bar{k}_r r 次のモード剛性

l はりの長さ

p_1 系の 1 次の固有角振動数

p_r 系の r 次の固有角振動数

S_i はり i の断面積

$T/2$ 励振力が作用する時間幅

t 時間

$$t' = p_1 t$$

w_i はり i のたわみ

$$w'_i = w_i / l$$

x_i はり i の x 座標

$$x'_i = x_i / l$$

$\delta(\bullet)$ デルタ関数

$$\delta'(\bullet) = \delta(\bullet) l$$

$$\mu_i = (\rho_i S_i l^4 p_1^2) / (E_1 I_1)$$

$\bar{\mu}_r$ r 次のモード質量

ρ_i はり i の密度

$\phi_{i,r}$ 系の r 次のモード関数

Ω フーリエ変換領域の励振振動数

ω 半波正弦励振力の励振振動数

$$\omega' = \omega / p_1$$

第 1 章 緒論

1.1 研究の背景と目的

橋梁，高層建物などの建築構造物，ロボットのアームやマニピュレータをはじめとする産業機械，航空機，船舶などの構成部材は，はりとして扱うことができるため，その基本要素である単一のはりに生じる振動現象に関する研究は盛んに行われてきた．固定端，支持端および自由端をもつ単一のはりについては，一般的にモード解析により自由振動解や強制振動解が求められる [1–3]．はりの本体に集中質量が取付られた場合やはりが並進ばねや回転ばねで支持された場合についても，モード解析を用いて自由振動や強制振動に関する研究が多くなされてきた [4–9]．ただし，はりに取付られる集中質量やはりを支持するばねなどの付加要素が複数になると境界条件が増し，固有角振動数を求める行列式やモード関数を求める行列のサイズが大きくなるため，その計算が困難になってしまうことがある．そのため，伝達マトリクス法を使用して解析されている研究もある [10–12]．単一のはりに衝撃荷重が作用する場合の過渡応答解析も，モード解析が利用され，インパルス応答やパルス状の荷重を受けた場合の応答が調べられている [13–15]．また，はりの支持スパンが固定された両端単純支持はりや両端固定はり，はりのたわみが大きくなると，はりに張力が発生する．この張力はたわみの大きさにより変化するため非線形振動となり，通常モード解析が適用できず，ガラーキン法による解析が行われ，固有角振動数の振幅依存性などが調べられている [16–18]．

一方，複数のはりでモデル化することができる最も単純な構造として，二重はり構造が挙げられる．二重はり構造は，本論文での研究対象である 2 本のはりがばねで連結された系を示す．二重はり構造の例として，上部が道路で下部が鉄道である二重構造の橋，新交通システムやモノレールに用いられるコンクリート床と鋼板ウェブ複合の高架橋，宇宙ステーションの太陽電池パネルとその保持部材から成る太陽電池パドルやハニカムパネルと太陽電池素子の接着構造，船の上部構造（上甲板）と下部構造（内底）が隔壁で連結されている構造，飛行艇のフロートと翼の連結構造などが挙げられる．これらの構造は振動自体や振動から発生する騒音が問題となるために，その挙動を把握することは重要である．筆者が研究・開発に取り組んでいる具体的な二重はり構造として，図 1.1 に示す床一天井吊り構造がある．特に集合住宅では，上階の居住者の飛び跳ねや歩行などにより発生する固体伝播音が下階での騒音問題となっている [19]．この固体伝播音は，床と天井を結ぶ吊り具を介して，上階の床振動が下階の天井を振動させることによって発生する．従って，上

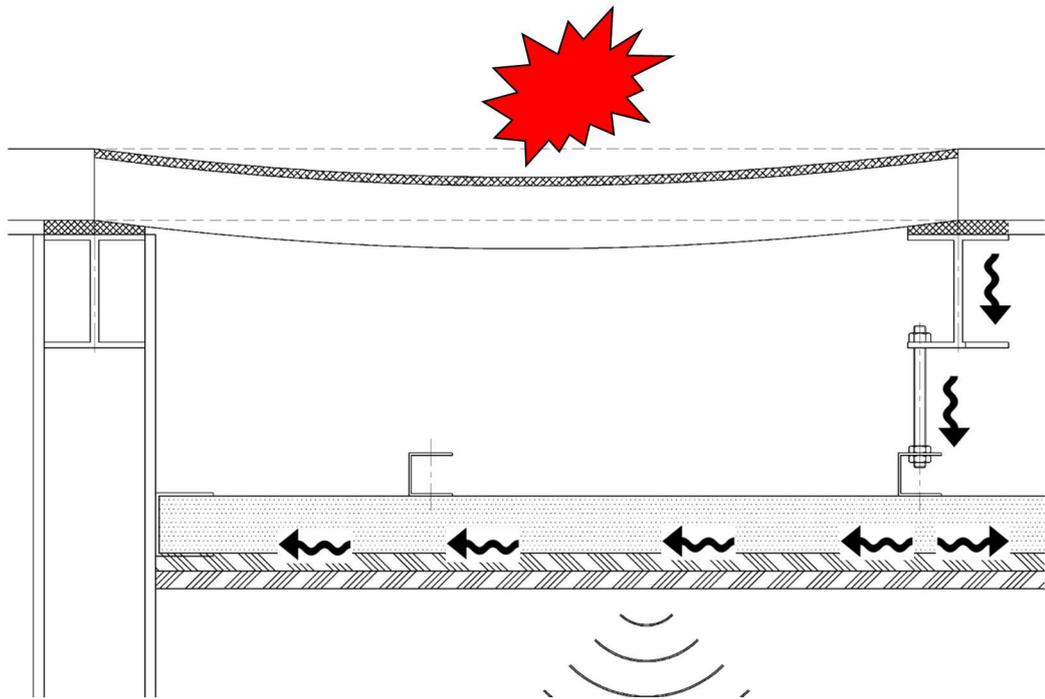


図 1.1 二重はり構造（住宅の床-天井構造）

階から下階に伝わる振動を抑制するため、連結する吊り具の特性や設置位置などを適切に設計することが必要である。そのため、2本のはりがばねで連結された系に等しい二重はり構造に生じる振動現象を把握することは肝要である。

連結された2本の弾性はりを対象とした振動に関する研究は、ゴムのような粘弾性材料で連続的に接合されたサンドイッチ構造をもつ二重はりを対象としたものが多く、その自由振動や強制振動について、モード解析などを利用して多くの研究 [20-33] がなされている。一方、2本のはりが離散的に配置されたばねで連結された系の自由振動については、伝達マトリクス法を利用した解析 [34, 35] やグリーン関数を用いた解析 [36, 37] が見受けられるものの、モード解析を利用したもの [38, 39] は少ないようである。離散的に配置されたばねで連結された2本のはりについて、モード解析を用いて強制振動を解析している研究例はさらに少なく、伝達マトリクス法とその手法を拡張した手法 [40-43]、グリーン関数を用いた手法 [44, 45] およびウェーブレット法 [46] による研究に留まっている。その理由として、両端が単純支持された2本のはりが連続的に配置されたばねで結ばれた系の強制振動解は、比較的容易に求められるのに対し、離散的にばねで連結された系では、モード関数の直交性を利用して各モードを非連成化することは一般的に困難で

あるためである。しかし、離散的にばねで連結された系は実用的な構造であり、それを対象とした振動解析は広い分野での応用が期待される。

振動の解析手法として広く用いられているモード解析は、集中質量系、分布定数系（連続体）のいずれにも適用でき、連続体については、固有モード関数の直交性を用いると、運動方程式を非連成化した1自由度のモード方程式に分離することができる。さらに、各モード方程式を解き、線形振動問題ではそれらを重ね合わせることで、系の解を求めることができるため、非常に計算効率が高い。この理由により、モード解析は振動問題に適用され、大規模なモデルについて有効な手法として発展してきた。

そこで、本論文では、2本のはりが離散的に配置された複数のばね・ダッシュポットで連結された系を対象に、モード解析により、自由振動、強制振動および衝撃振動を調べる。

第2章では、2本の両端単純支持はりが N 本のばねで離散的に連結された系を対象として、音の発生メカニズムに関わる固有角振動数と振動モード形状を明らかにするため、モード解析により固有角振動数とそれに対応する正確なモード関数を求める。数値計算では、1本、または2本の連結ばねで連結された場合において、連結ばねのばね定数、設置位置および2本のはりが異なる場合の固有角振動数と振動モード形状に及ぼす影響を調べる。

第3章では、2本の両端単純支持はりが離散的に配置された N 組のばねとダッシュポットから成る連結要素により繋がれた系を対象とし、一方のはりに正弦外力が作用する場合、他方のはりの振動を低減するための、連結ばねのばね定数、設置位置などを調べる。また2本のはりが連結要素により繋がれた系について、モード関数の直交性を用いてモード方程式を導く。この解析手法は、本研究で初めて開発することになる。強制振動解を解析的に求める。数値計算では、連結要素が1組の場合と2組の場合について、強制振動の応答を調べる。

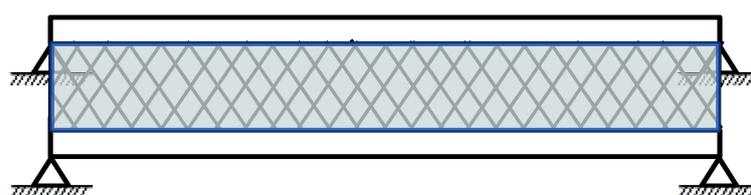
第4章では、第3章と同じ系について、実際の住宅の評価に使用される半波正弦励振の衝撃荷重が二重はりに作用する場合のはりの挙動を明らかにする。上部のはりに半波正弦励振力が作用する場合、モード関数の直交性を用いて求めたモード方程式により、過渡応答解を求める。数値計算では、連結要素が1組の場合と2組の場合について、各モードと各はりのたわみに対する過渡応答を求めた。半波正弦励振力の振動数が過渡応答の残留振動の最大値に及ぼす影響について調べる。

1.2 従来の研究概要

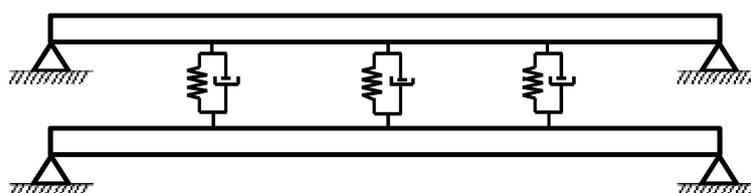
図 1.2 (a), (b)に, ゴムのような粘弾性材料で2本のはりが連続的に接合されたサンドイッチ構造をもつ二重はりモデルと, 離散的にばねで連結された二重はりモデルを示す. 本節では, それぞれの二重はりモデルについての曲げ振動に関する研究とその内容を示す.

1.2.1 連続的に接合された二重はりの振動

連続的に接合された二重はりを対象とした. 研究の一つに, Seeling と Hoppmann [20, 21] によるものがある. この研究では, 同材質, 同形状の等しい長さの両端単純支持された2本のはり(オイラー・ベルヌーイはり)がばねで密に連結されている構造を対象として, モード解析により, 固有振動数とモード形状を求めた. また, 二重はりの一方に半波正弦衝撃荷重が作用した場合の曲げ振動から, はりに発生するひずみを理論解析と実験により求め, その比較を行った. 斎藤と長南 [22] は Seeling, Hoppmann の解析と同じ対象について, それぞれのはりを結合するばね自体の質量を考慮して, 自由振動と強制振動を解析し, ばね自体の質量が振動特性に与える影響を検討した. また, 長南 [23, 24] は, 同じ系について, 運動方程式と境界条件をラプラス変換して衝撃応答も求めた. 浜田ら [25] は, 上下のはりの曲げ剛性や質量が異なる二重はりの運動方程式と境界条件に有限積分変換とラプ



(a) 連続的に接合された二重はりモデル



(b) 離散的にばねで連結された二重はりモデル

図 1.2 二重はり構造

ラス変換を用いて、自由振動と強制振動を調べた。曾我部ら [26] は、はりの断面形状が比較的大きな場合について、回転慣性とせん断変形を考慮したチモシェンコはり理論により、二重はりの非定常振動を有限積分変換により解析し、インパルス応答やステップ応答などの過渡応答を調べた。Vu ら [27] は、同材質、同形状で長さの等しい両端単純支持された 2 本のはりがばねとダッシュポットで連結された系について、モード解析と簡単な変数変換により非連成化が図れることを示し、強制振動の解析を実施した。Oniszcuk [28,29] は、上下のはりの曲げ剛性や質量が異なる二重はりの一方のはりと連結ばねを動吸振器として利用するため、モード解析により自由振動解を求めた。自由振動解は、モード関数と時間関数の積の級数和とし、モード関数は両端単純支持はり単体のモード関数 (sin 関数) を用い解析を簡便にした。この手法を用いて、はりの一方に任意の集中荷重や分布荷重が作用した場合の強制振動を求め、2 本のはりが同材質、同形状の等しい長さの場合、それぞれのはりが逆位相で振動する固有角振動数では、一方のはりと連結ばねが動吸振器として作用して、他方のはりの振動を低減できることを示した。Gbadeyan と Agboola [30] や Abu-Hilal [31] は橋梁を同材質、同形状の 2 本のはりが粘弾性体で接合された系と仮定して、橋梁を通過する自動車を動的荷重として、その系に作用する場合の解析を行った。一方のはりに作用する外力を時間関数として、その外力がはり上を移動する場合、応答がその移動速度により影響を受けることを調べた。Zhang ら [32] は連続的に接合された二重はりをオイラー・ベルヌーイはりとして、圧縮軸力がはりに作用した場合の挙動を調べた。また、Stojanović と Kozić [33] は 2 本のはりをチモシェンコはりとして圧縮軸力が作用した場合の強制振動を調べた。

このように、2 本のはりの曲げ剛性や質量が同一の場合や異なる場合、異なるはり理論 (オイラー・ベルヌーイとチモシェンコ理論) 適用した場合およびはりに作用させる荷重が異なる場合の自由振動解析、および強制振動解析が多く行われている。また、連続的に接合された二重はり対象とした研究は、主としてモード解析により行われている。ただし、最近の研究では、はりを連結するばねがモード関数に与える影響が小さいものと仮定し、はり単体のモード関数を用いて解析された研究例が多い。

1.2.2 離散的にばねで連結された二重はりの振動

離散的にばねで連結された二重はりについての研究は、Dublin と Friedrich [40] によるものがある。この研究では 2 本のはりが異なる支持条件で、それぞれのはり

の曲げ剛性や質量が異なる場合の強制振動について、伝達マトリクス法 (Myklestad's method) を用いて調べられている。山口 [41, 42] は2本の粘弾性はりが、ばね・ダッシュポットで連結された系について、Dublin と Friedrich と同様に伝達マトリクス法により解析した。その解析対象は、1本のはりと1組のばね・ダッシュポットで構成される動吸振器を片持ちはりに設置したものであり、その制振効果が調べられた。その他の伝達マトリクス法を用いた研究は Lin と Yang [34] の研究や Inceoglu, と Gürgöze [35] の研究などがあり、Zhang ら [43] は、伝達マトリクス法を拡張した手法により、複数のばね・ダッシュポットで連結された二重はりを解析した。Kukla [36, 37] は曲げ剛性、質量および長さの異なる2本のはりが複数のばねで連結された系について、グリーン関数を用いて、ばねの取付位置が系の固有角振動数に及ぼす影響について調べた。また、Shankar と Keane [44, 45] は Kukla と同様に曲げ剛性、質量および長さの異なる2本の両端単純支持はりについて、グリーン関数と FEM 解析を組み合わせる強制振動について調べた。伝達マトリクス法やグリーン関数以外の手法で、レイリー法による Gürgöze と Erol [48] の研究やウェーブレット法を用いた Ibrahim [46] らの研究がある。

Joshi と Upadhyaya [38] はモード解析により、片持ちはりと両端自由はりが2本のばねで連結された系の自由振動を調べた。また、Gürgöze ら [39] は、片持ちはりの自由端に集中質量をもつ2本のはりがばねおよび付加質量で繋がれた系の自由振動を調べた。Erol と Gürgöze [50] は、2本の片持ちはりが複数のばねで連結された系について、モード関数として簡易的に \sin 関数と \cos 関数の和を採用して強制振動を調べている。Zhang [51] は両端単純支持された2本のはりが1本のばねで連結され、2本のはりの間が液体で満たされた系について、モード関数にはり単体のモード関数 (\sin 関数) を用いて、構造と液体の連成問題を調べた。Kawazoe ら [49] は、両端自由はりとばね・ダッシュポットで構成される動吸振器を両端単純支持はりに設置した系について、それぞれのはり単体のモード関数を用い強制振動を調べた。

2本のはりが離散的に配置されたばねで連結された系の自由振動や強制振動についてグリーン関数や伝達マトリクス法などモード解析とは異なる手法を用いた研究例は多くみられる。一方で、はり単体のモード関数を用いた簡易的なモード解析を除いて、モード解析を利用して自由振動を調べた研究は少ない [38, 39]。強制振動の理論解析について、はり単体のモード関数を簡易的なモード解析を除いた研究は、自由振動の解析に比べ非常に少なく、著者の調査では研究例を見つけることができなかった。

1.3 本論文の構成

本論文では、2本のはりが離散的に配置された複数のばね・ダッシュポットで連結された系を対象として、以下の検討を行う。

第2章では、2本の両端単純支持はりが N 本のばね（以下、連結ばねと呼ぶ）で離散的に連結された系を対象として、モード解析により厳密な固有角振動数や振動モード形状を求めることを目的とする。数値計算では、2本のはりが1本のばねで連結された場合（ケースA）、2本のばねで連結された場合（ケースB）において、連結ばねのばね定数、および設置位置が系の固有角振動数と振動モード形状に及ぼす影響を調べる。また、有限要素法解析により、本解析結果の妥当性を確認する。

第3章では、2本の両端単純支持はりが離散的に配置された N 組のばねとダッシュポットから成る連結要素により繋がれた系を対象とし、上部のはりに正弦外力が作用する場合、モード関数の直交性を用いてモード方程式を導き、強制振動解を解析的に求める。数値計算では、連結要素が1組の場合（ケースA）と2組の場合（ケースB）について、強制振動の応答曲線を示す。また、応答曲線の数値計算結果を有限要素法による計算結果と比較することにより、本理論解析の妥当性を検証する。

第4章では、2本の両端単純支持はりが離散的に配置された N 組のばねとダッシュポットから成る連結要素により繋がれた系を対象とし、上部のはりに半波正弦励振の衝撃荷重が作用する場合、モード関数の直交性を用いて求めたモード方程式より、過渡応答解を求める。数値計算では、連結要素が1組の場合（ケースA）と2組の場合（ケースB）について、各モードと各はりのたわみに対する過渡応答を求める。半波正弦励振力の振動数が過渡応答の残留振動の最大振幅に及ぼす影響について調べる。また、過渡応答の数値計算結果を有限要素法による計算結果と比較することにより、本理論解析の妥当性を検証する。

第5章では、第2章から第4章までで用いた解析手法が適用可能な具体的な例を挙げて、今後の課題を述べる。

第6章では、2本のはりが離散的に配置された複数のばね・ダッシュポットで連結された系を対象として、自由振動、強制振動および衝撃振動をモード解析により解析した結果を総括する。

第 2 章 複数のばねで離散的に連結された二重はりの自由振動

2.1 緒言

橋梁，高層建物などの建築構造物，ロボットのアームやマニピュレータをはじめとする産業機械，航空機，船舶などの構成部材は，はりとして扱うことができるため，その基本要素である単一のはりに生じる振動現象に関する研究は盛んに行われてきた．一方，複数のはりでモデル化することができる最も単純な構造として，二重はり構造が挙げられる．この二重はり構造の例として，上部が道路で下部が鉄道である二重構造の橋，上階床から天井が吊り下げられた床-天井吊り構造がある．床-天井吊り構造をもつ集合住宅については，上階の居住者の飛び跳ねや歩行などにより発生する固体伝播音が下階での騒音問題となっている

[19]．この固体伝播音は，床と天井を結ぶ吊り具を介して，上階の床振動が下階の天井を振動させることによって発生する．天井からの放射音の観点では，天井の振動モードが対称モードの場合には天井から室内への放射効率が高く，非対称モードの場合は小さくなることが分かっている [52]．一方，天井下の室内が閉空間と想定される場合には天井の振動と室内音の連成問題となり，放射音とは逆に天井が対称モードのときに室内音が小さく，非対称モードで音が大きくなることが報告されている [53]．このように住宅構造物では天井の振動と室内音は密接な関係にあり，天井の振動モードを正確に把握することは工学的に重要な問題である．

連結された 2 本の弾性はりを対象とした振動に関する研究は，ゴムのような粘弾性材料で連続的に接合されたサンドイッチ構造をもつ二重はりを対象としたものが多く，一般的な振動解析に用いられるモード解析を用いて行われているものが多い [20–33]．一方，2 本のはりが離散的に配置されたばねで連結された系の自由振動については，伝達マトリクス法を利用した解析 [34, 35] やグリーン関数を用いた解析 [36, 37] が見受けられるものの，モード解析を利用したものは少ないようである [38, 39]．

本章では，2 本の両端単純支持はりが複数のばね（以下，連結ばねと呼ぶ）で離散的に連結された系を対象として，モード解析により厳密な固有角振動数や振動モード形状を求めることを目的とする．数値計算では，1 本，または 2 本の連結ばねで連結された場合において，連結ばねのばね定数，および設置位置が固有

角振動数と振動モード形状に及ぼす影響を調べた。また、有限要素法解析により、本解析結果の妥当性を確認した。

2.2 理論解析

2.2.1 運動方程式

図 2.1 のように、両端が単純支持され、一様で長さの等しい 2 本のはりが、ばね定数 K_j の N 本のばね ($j=1, 2, \dots, N$) でつながれている系を考える。はりの左端から j 番目のばねは、左端から距離 a_j の位置に取り付けられている。各はりを“はり 1”および“はり 2”と呼び、パラメータの添字は、各はりを表すものとする。はり i ($i=1, 2$) のたわみを $w_i(x_i, t)$ 、長さを l 、幅を b_i 、厚さを h_i 、密度を ρ_i 、ヤング率を E_i 、断面積を S_i ($=b_i \times h_i$)、断面 2 次モーメントを I_i とする。このとき各はりの運動方程式は、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 S_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + E_1 I_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x_1^4} + \sum_{j=1}^N K_j (w_1 - w_2) \delta(x_1 - a_j) &= 0 & (a) \\ \rho_2 S_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + E_2 I_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x_2^4} + \sum_{j=1}^N K_j (w_2 - w_1) \delta(x_2 - a_j) &= 0 & (b) \end{aligned} \right\} (2.1)$$

ここに、 $\delta(\bullet)$ はデルタ関数である。ここで、次の無次元量を導入する。

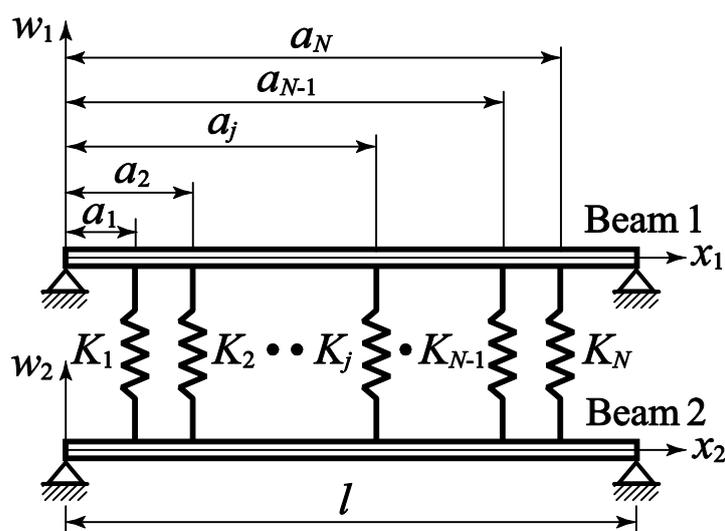


図 2.1 理論解析モデル

$$\left. \begin{aligned}
x'_i &= \frac{x_i}{l}, \quad w'_i = \frac{w_i}{l}, \quad a'_j = \frac{a_j}{l}, \\
\mu_1 &= \left(\frac{\rho_1 S_1}{E_1 I_1} \right) l^4 p_1^2, \quad \mu_2 = \left(\frac{\rho_2 S_2}{E_1 I_1} \right) l^4 p_1^2, \\
k'_i &= \frac{E_i I_i}{E_1 I_1}, \quad K'_j = \frac{K_j l^3}{E_1 I_1}, \quad \delta' = \delta l, \quad t' = p_1 t \quad (i=1, 2; j=1, 2, \dots, N)
\end{aligned} \right\} (2.2)$$

ここに、 p_1 は系の 1 次の固有角振動数を表す．式 (2.2) を用いて式 (2.1) を無次元化すると、次式を得る（無次元化の詳細は付録 A 参照）．ただし、式 (2.3) 以降では、無次元量を表す記号「'」はすべて省略されている．

$$\left. \begin{aligned}
\mu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + k_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x_1^4} + \sum_{j=1}^N K_j (w_1 - w_2) \delta(x_1 - a_j) &= 0 & (a) \\
\mu_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + k_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x_2^4} + \sum_{j=1}^N K_j (w_2 - w_1) \delta(x_2 - a_j) &= 0 & (b)
\end{aligned} \right\} (2.3)$$

ただし、式 (2.2) より $k_1=1$ は常に成り立つ．

2.2.2 固有角振動数とモード関数

式 (2.3) の自由振動解を求めるため、式 (2.3) のデルタ関数を含んだ形式の運動方程式を用いずに、左側から $j-1, j, j+1$ 番目のばねで連結された区間のほりを対象とし、 j 番目のばねの位置の左側と右側の区間に分けて考える．このとき、ほりのたわみを次のように定義する．

$$\left. \begin{aligned}
w_1(x_1, t) &= \begin{cases} w_{1,j}(x_1, t) & \text{for } a_{j-1} \leq x_1 \leq a_j \\ w_{1,j+1}(x_1, t) & \text{for } a_j \leq x_1 \leq a_{j+1} \end{cases} \\
w_2(x_2, t) &= \begin{cases} w_{2,j}(x_2, t) & \text{for } a_{j-1} \leq x_2 \leq a_j \\ w_{2,j+1}(x_2, t) & \text{for } a_j \leq x_2 \leq a_{j+1} \end{cases}
\end{aligned} \right\} (2.4)$$

ここに、 $a_0=0, a_{N+1}=1$ である．このとき式 (2.4) で定義された各区間におけるほりの運動方程式は次式となる．

$$\begin{cases}
\mu_1 \frac{\partial^2 w_{1,j}}{\partial t^2} + k_1 \frac{\partial^4 w_{1,j}}{\partial x_1^4} = 0 & \text{(a)} \\
\mu_2 \frac{\partial^2 w_{2,j}}{\partial t^2} + k_2 \frac{\partial^4 w_{2,j}}{\partial x_2^4} = 0 & \text{(b)}
\end{cases} \quad (2.5)$$

式 (2.5) の境界条件, すなわち $x_i=0, 1$ における単純支持, および $x_i=a_j$ における連結ばねによる支持の境界条件は, 次式で与えられる.

$$\begin{cases}
w_{i,1} = 0 \quad (\text{at } x_i = 0) & \text{(a)} \\
k_i \frac{\partial^2 w_{i,1}}{\partial x_i^2} = 0 \quad (\text{at } x_i = 0) & \text{(b)} \\
w_{i,N+1} = 0 \quad (\text{at } x_i = 1) & \text{(c)} \\
k_i \frac{\partial^2 w_{i,N+1}}{\partial x_i^2} = 0 \quad (\text{at } x_i = 1) & \text{(d)} \\
w_{i,j} = w_{i,j+1} \quad (\text{at } x_i = a_j) & \text{(e)} \\
\frac{\partial w_{i,j}}{\partial x_i} = \frac{\partial w_{i,j+1}}{\partial x_i} \quad (\text{at } x_i = a_j) & \text{(f)} \\
k_i \frac{\partial^2 w_{i,j}}{\partial x_i^2} - k_i \frac{\partial^2 w_{i,j+1}}{\partial x_i^2} = 0 \quad (\text{at } x_i = a_j) & \text{(g)} \\
k_i \frac{\partial^3 w_{i,j}}{\partial x_i^3} - k_i \frac{\partial^3 w_{i,j+1}}{\partial x_i^3} - (-1)^{i-1} K_j (w_{1,j} - w_{2,j}) = 0 \quad (\text{at } x_i = a_j) & \text{(h)}
\end{cases} \quad (2.6)$$

式 (2.6a) - (2.6d) は, はりの両端におけるたわみと曲げモーメントが零の条件, 式 (2.6e), (2.6f) は, たわみとたわみ角が連続である条件を表す. 図 2.2 に, はり 1 のばね K_j が取り付けられた部分の拡大図を示す. 各図の中央部の口部は, ばねが取り付けられたはりの微小要素を表し, 図 2.2 (a), (b) は, それぞれ微小要素に作用する曲げモーメントとせん断力を示す. 式 (2.6g), (2.6h) は, 図 2.2 (a), (b) に示すように曲げモーメントとせん断力の釣り合い条件を表す. 系の固有角振動数を p とおき, 式 (2.5a), (2.5b) の自由振動解を次のように仮定する.

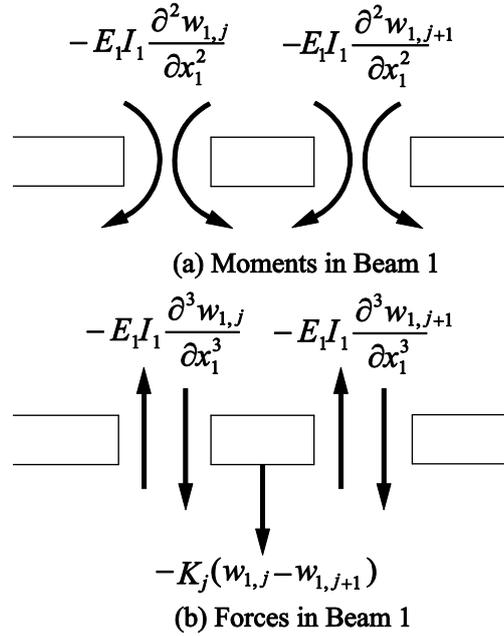


図 2.2 連結部における曲げモーメントとせん断力のつり合い

$$\left. \begin{aligned}
 w_{1,j}(x_1, t) &= W_{1,j}(x_1) \cos(pt + \beta), \\
 w_{1,j+1}(x_1, t) &= W_{1,j+1}(x_1) \cos(pt + \beta), \\
 w_{2,j}(x_2, t) &= W_{2,j}(x_2) \cos(pt + \beta), \\
 w_{2,j+1}(x_2, t) &= W_{2,j+1}(x_2) \cos(pt + \beta)
 \end{aligned} \right\} (2.7)$$

式 (2.7) を式 (2.5a), (2.5b) に代入すると, 次式を得る.

$$\left. \begin{aligned}
 k_1 \frac{d^4 W_{1,j}}{dx_1^4} - \mu_1 p^2 W_{1,j} &= 0 & (a) \\
 k_1 \frac{d^4 W_{1,j+1}}{dx_1^4} - \mu_1 p^2 W_{1,j+1} &= 0 & (b)
 \end{aligned} \right\} (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned}
 k_2 \frac{d^4 W_{2,j}}{dx_2^4} - \mu_2 p^2 W_{2,j} &= 0 & (a) \\
 k_2 \frac{d^4 W_{2,j+1}}{dx_2^4} - \mu_2 p^2 W_{2,j+1} &= 0 & (b)
 \end{aligned} \right\} (2.9)$$

式 (2.8a), (2.8b) は各項の係数が同じであることを考慮して, 自由振動の特性指数 λ_1 を同じとする. 式 (2.9a), (2.9b) についても同様に特性指数を λ_2 とする. したがって, 式 (2.8), (2.9) の解を次のように仮定する.

$$\left. \begin{aligned} W_{1,j}(x_1) &= B_{1,j} e^{\lambda_1 x_1}, & W_{1,j+1}(x_1) &= B_{1,j+1} e^{\lambda_1 x_1} \\ W_{2,j}(x_2) &= B_{2,j} e^{\lambda_2 x_2}, & W_{2,j+1}(x_2) &= B_{2,j+1} e^{\lambda_2 x_2} \end{aligned} \right\} (2.10)$$

ここに, B_{ij} は任意定数である. 式 (2.10) を式 (2.8), (2.9) に代入すると, 次の特性方程式を得る.

$$k_1 \lambda_1^4 - \mu_1 p^2 = 0, \quad k_2 \lambda_2^4 - \mu_2 p^2 = 0 \quad (2.11)$$

ここで, e_i を次のように定義する.

$$e_1 = \sqrt{\frac{k_1}{\mu_1}}, \quad e_2 = \sqrt{\frac{k_2}{\mu_2}} \quad (2.12)$$

式 (2.11) の解は, 次式で与えられる.

$$\lambda_1 = \pm \nu_1, \pm i \nu_1; \quad \lambda_2 = \pm \nu_2, \pm i \nu_2 \quad \left(\text{ただし, } \nu_1 = \sqrt{\frac{p}{e_1}}, \nu_2 = \sqrt{\frac{p}{e_2}} \right) \quad (2.13)$$

ここに, “ i ” は虚数単位である. したがって, 式 (2.8), (2.9) の解は, 次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} W_{1,j}(x_1) &= G_{1_1,j} \cos \nu_1 x_1 + G_{1_2,j} \sin \nu_1 x_1 \\ &\quad + G_{1_3,j} \cosh \nu_1 x_1 + G_{1_4,j} \sinh \nu_1 x_1 & (a) \\ W_{1,j+1}(x_1) &= G_{1_1,j+1} \cos \nu_1 x_1 + G_{1_2,j+1} \sin \nu_1 x_1 \\ &\quad + G_{1_3,j+1} \cosh \nu_1 x_1 + G_{1_4,j+1} \sinh \nu_1 x_1 & (b) \end{aligned} \right\} (2.14)$$

$$\begin{aligned}
W_{2,j}(x_2) &= G_{2_{-1,j}} \cos \nu_2 x_2 + G_{2_{-2,j}} \sin \nu_2 x_2 \\
&\quad + G_{2_{-3,j}} \cosh \nu_2 x_2 + G_{2_{-4,j}} \sinh \nu_2 x_2 & (a) \\
W_{2,j+1}(x_2) &= G_{2_{-1,j+1}} \cos \nu_2 x_2 + G_{2_{-2,j+1}} \sin \nu_2 x_2 \\
&\quad + G_{2_{-3,j+1}} \cosh \nu_2 x_2 + G_{2_{-4,j+1}} \sinh \nu_2 x_2 & (b)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

ここに, $G_{i_{-1,j}}$, $G_{i_{-2,j}}$, $G_{i_{-3,j}}$, $G_{i_{-4,j}}$ は任意定数である. 式 (2.6a) - (2.6d) より, 次式を得る.

$$\begin{aligned}
W_{i,1} &= 0 \quad (\text{at } x_i = 0) & (a) \\
\frac{d^2 W_{i,1}}{dx_i^2} &= 0 \quad (\text{at } x_i = 0) & (b) \\
W_{i,N+1} &= 0 \quad (\text{at } x_i = 1) & (c) \\
\frac{d^2 W_{i,N+1}}{dx_i^2} &= 0 \quad (\text{at } x_i = 1) \quad (i = 1, 2) & (d)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

式 (2.6e) - (2.6h) より, 次式を得る.

$$\begin{aligned}
W_{i,j} &= W_{i,j+1} \quad (\text{at } x_i = a_j) & (a) \\
\frac{dW_{i,j}}{dx_i} &= \frac{dW_{i,j+1}}{dx_i} \quad (\text{at } x_i = a_j) & (b) \\
\frac{d^2 W_{i,j}}{dx_i^2} - \frac{d^2 W_{i,j+1}}{dx_i^2} &= 0 \quad (\text{at } x_i = a_j) & (c) \\
k_i \frac{d^3 W_{i,j}}{dx_i^3} - k_i \frac{d^3 W_{i,j+1}}{dx_i^3} - (-1)^{i-1} K_j (W_{1,j} - W_{2,j}) &= 0 \quad (\text{at } x_i = a_j) & (d)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

式 (2.14), (2.15) を式 (2.16), (2.17) に代入すると, $G_{i_{-1,j}}$, $G_{i_{-2,j}}$, $G_{i_{-3,j}}$, $G_{i_{-4,j}}$ に関する連立方程式を得る. これを行列表記すると, 次式となる.

$$[A]\{G\} = 0 \tag{2.18}$$

ここに, $[A]$ は $8(N+1)$ 次の係数の正方行列であり,

$$\{G\} = \{G_{1_{-1,1}}, G_{1_{-2,1}}, G_{1_{-3,1}}, G_{1_{-4,1}}, \dots, G_{i_{-1,j}}, G_{i_{-2,j}}, G_{i_{-3,j}}, G_{i_{-4,j}}, \dots, G_{2_{-1,N}}, G_{2_{-2,N}}, G_{2_{-3,N}}, G_{2_{-4,N}}\}^T$$

は $8(N+1)$ 次の未定係数ベクトルである．式 (2.18) の $\{G\}$ が非自明な解をもつための条件より，次の振動数方程式を得る．

$$\det[A]=0 \quad (2.19)$$

式 (2.19) より系の r 次の固有角振動数 p_r を求めることができ，対応する固有振動モードは，式 (2.18) より求めることができる．

例えば，2つのはりが1本のばね（ばね定数 K_1 ）で連結され，そのばねがはりの左端から距離 a_1 だけ離れた位置に取り付けられた場合，式 (2.19) は次式となる．

$$\begin{aligned} & k_1 \nu_1^3 K_1 \sin \nu_1 \sinh \nu_1 \{ \sin \nu_2 \sinh \nu_2 a_1 \sinh \nu_2 (a_1 - 1) - \sin \nu_2 a_1 \sin \nu_2 (a_1 - 1) \sinh \nu_2 \} \\ & + k_2 \nu_2^3 K_1 \sin \nu_2 \sinh \nu_2 \{ \sin \nu_1 \sinh \nu_1 a_1 \sinh \nu_1 (a_1 - 1) - \sin \nu_1 a_1 \sin \nu_1 (a_1 - 1) \sinh \nu_1 \} \\ & + 2k_1 \nu_1^3 k_2 \nu_2^3 \sin \nu_1 \sinh \nu_1 \sin \nu_2 \sinh \nu_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

単位ステップ関数 $U(x)$ を用いると，系の r 次の振動モードは次の関数で与えられる．

$$\phi_{i,r}(x_i) = \psi_{i-1,r}(x_i) \{ U(x_i) - U(x_i - a_1) \} + \psi_{i-2,r}(x_i) U(x_i - a_1) \quad (2.21)$$

ここに， $\psi_{i,j,r}(x_i)$ は次式で与えられる．

$$\psi_{i-1,r}(x_i) = \gamma_i \left\{ \sin \nu_{ir} x_i + \frac{\sin \nu_{ir}}{\sin \nu_{ir} (a_1 - 1)} \left(\cosh \nu_{ir} a_1 - \frac{\sinh \nu_{ir} a_1}{\tanh \nu_{ir}} \right) \sinh \nu_{ir} x_i \right\} \quad (2.22a)$$

(for $0 \leq x_i \leq a_1$)

$$\begin{aligned} \psi_{i-2,r}(x_i) = \gamma_i \left\{ \frac{\cos \nu_{ir} \sin \nu_{ir} a_1}{\sin \nu_{ir} (a_1 - 1)} \sin \nu_{ir} x_i - \frac{\sin \nu_{ir} \sin \nu_{ir} a_1}{\sin \nu_{ir} (a_1 - 1)} \cos \nu_{ir} x_i \right. \\ \left. - \frac{\sin \nu_{ir} \sinh \nu_{ir} a_1}{\tanh \nu_{ir} \sin \nu_{ir} (a_1 - 1)} \sinh \nu_{ir} x_i + \frac{\sin \nu_{ir} \sinh \nu_{ir} a_1}{\sin \nu_{ir} (a_1 - 1)} \cosh \nu_{ir} x_i \right\} \quad (2.22b) \end{aligned}$$

(for $a_1 \leq x_i \leq 1$)

ここに， γ_i ， ν_{ir} は，以下の通りである．

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 1, \\
\gamma_2 &= \frac{K_1 \left\{ 2 \sin v_{1r} a_1 + \frac{\sin v_{1r}}{\sin v_{1r} (a_1 - 1)} \left(\sinh 2v_{1r} a_1 - \frac{2 \sinh^2 v_{1r} a_1}{\tanh v_{1r}} \right) \right\} - 4v_{1r}^3 \frac{\sin v_{1r}}{\sin v_{1r} (a_1 - 1)}}{2K_1 \left\{ \sin v_{2r} a_1 + \frac{\sin v_{2r} \sinh v_{2r} a_1}{\sin v_{2r} (a_1 - 1)} \left(\cosh v_{2r} a_1 - \frac{\sinh v_{2r} a_1}{\tanh v_{2r}} \right) \right\}}, \\
v_{ir} &= \sqrt{\frac{p_r}{e_i}}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

以上の理論解析により，2本のはりが複数（ N 本）のばねで離散的に連結された系の固有角振動数と固有振動モードを求めるための一般式を誘導することができた。

2.3 数値計算結果

本節では，連結ばねが1本の場合をケースA，2本の場合をケースBと呼び，各場合について計算結果を示す。

2.3.1 連結ばねが1本の場合（ケースA）

図2.3に，2本のはりが1本のばねによって連結された場合の固有角振動数に及ぼす連結ばねのばね定数 K_1 の影響を示す。ただし，2本のはりの断面形状と材質は同じであるとする。式(2.20)より得られた系の固有角振動数の小さい順に振動モードを対応させ，1次から8次までの振動モードの固有角振動数 $p_1 \sim p_8$ を示す。 K_1 以外のパラメータの値は， $\mu_i=100$ ， $k_2=1$ ， $a_1=0.4$ である。固有角振動数 p_1 ， p_3 ， p_5 ， p_7 は K_1 の値に依存せず一定であるが，固有角振動数 p_2 ， p_4 ， p_6 ， p_8 は，ばね定数 K_1 が大きくなるにつれて増加する。

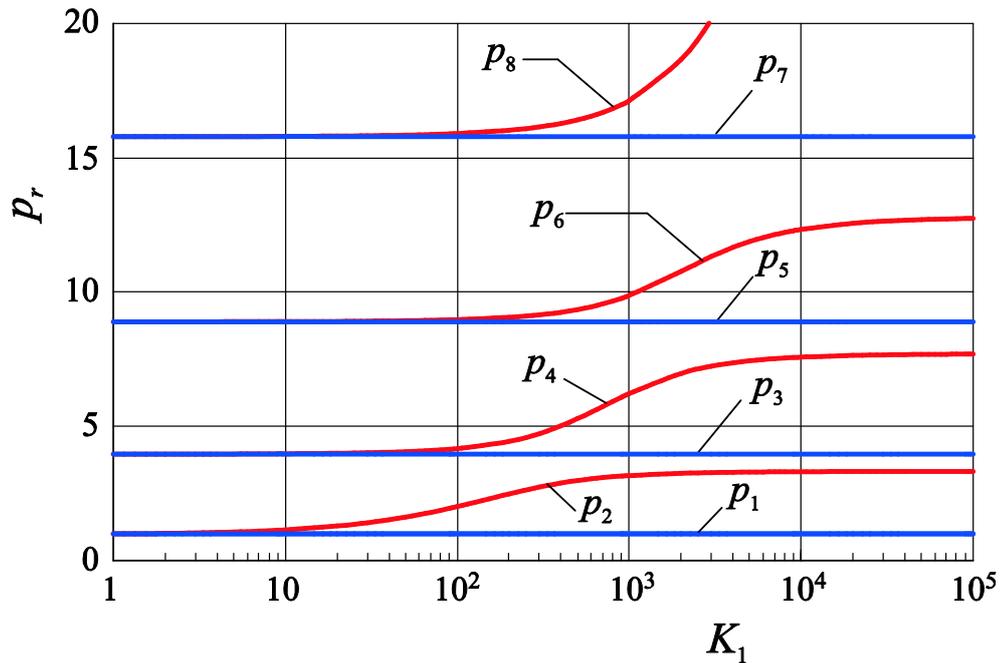


図 2.3 連結ばねのばね定数 K_1 が固有角振動数 p_r に及ぼす影響
($\mu_i=100, k_2=1, a_1=0.4$)

図 2.4 は、図 2.3 の $K_1=300$ の場合の振動モードを示す。この場合の固有角振動数は、 $p_1=0.987, p_2=2.76, p_3=3.95, p_4=4.71, p_5=8.88, p_6=9.14$ である。固有角振動数はモード形状は、はり 1, 2 の最大振幅で正規化されている。図 2.3 において、1 次、3 次、および 5 次に対応する振動モードでは、はり 1, 2 は同振幅、かつ同位相で振動する。すなわち、はりの振動中に連結ばねは伸縮しないため、これらの固有角振動数は連結ばねのばね定数 K_1 に依存しないことがわかる。したがって、これらの固有角振動数は両端が単純支持されたはり単体の固有角振動数に一致する。一方、2 次、4 次、および 6 次の振動モードでは、はり 1, 2 は逆位相で振動するため、はりの振動中に連結ばねは伸縮し、その結果、これらの固有角振動数は K_1 の値が大きくなるにつれ、増加することがわかる。

図 2.5 は、ばねの取付位置を図 2.3 の場合 ($a_1=0.4$) からはりの中央 $a_1=0.5$ に変えた場合、固有角振動数に及ぼす連結ばねのばね定数 K_1 の影響を示す。図 2.5 より、 K_1 の値が比較的小さい場合、はり単体のモードの節の位置にばねが取り付けられているため、系の $4n-1$ 次モードと $4n$ 次モード ($n=1, 2, \dots$) の固有角振動数が等しくなる ($p_{4n-1}=p_{4n}$)。さらに、ばね定数 K_1 が特定の値 $K_{1,n}$ ($n=1, 2, \dots$) になると、 $4n-2$ 次、 $4n-1$ 次、 $4n$ 次モードの固有角振動数が等しくなり ($p_{4n-2}=p_{4n-1}=p_{4n}$)、その値を境として、各振動モードに対応する固有角振動数の大小関係が入れ替わる。こ

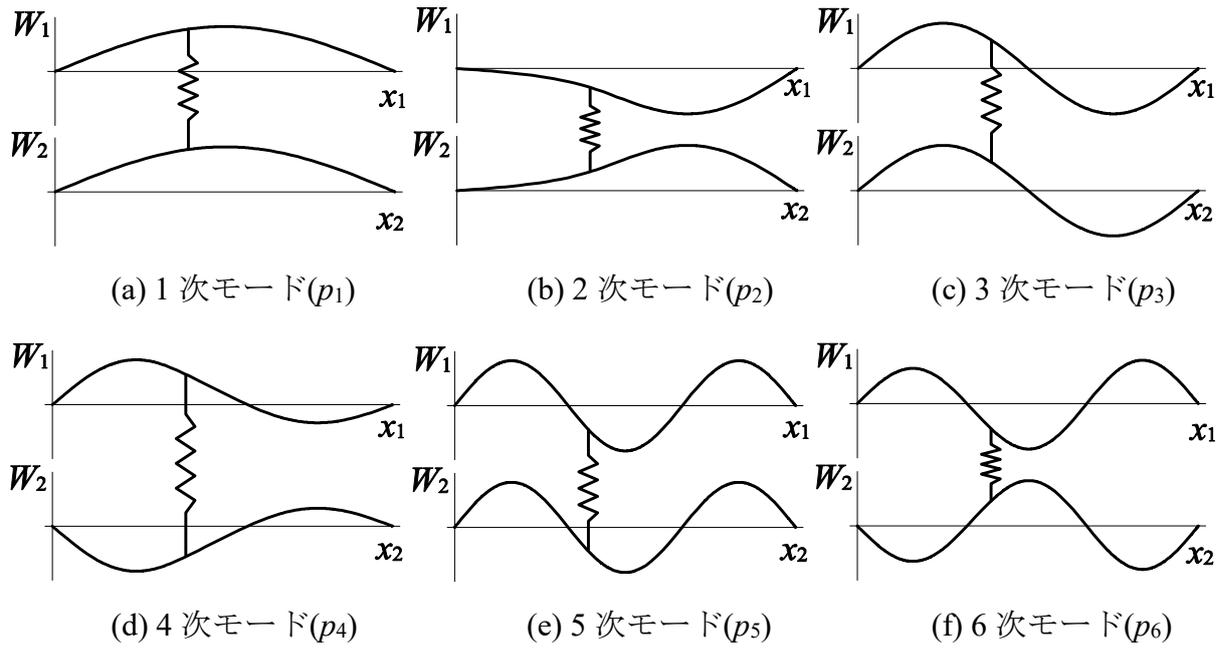


図 2.4 $K_1=300$ の場合の振動モード($\mu_i=100, k_2=1, a_1=0.4$).

ここで、 $p_{4n-2}=p_{4n-1}=p_{4n}$ となる場合の固有角振動数が等しくなるばね定数の値 $K_{1,n}$ の値は次のように求められる. 2 本のはりの断面形状と材質は同じであるので, 式 (2.13) において $\nu_1=\nu_2$ ($=\nu$ とおく) であること, および $a_1=0.5$ であることより, 式 (2.20) は次式となる.

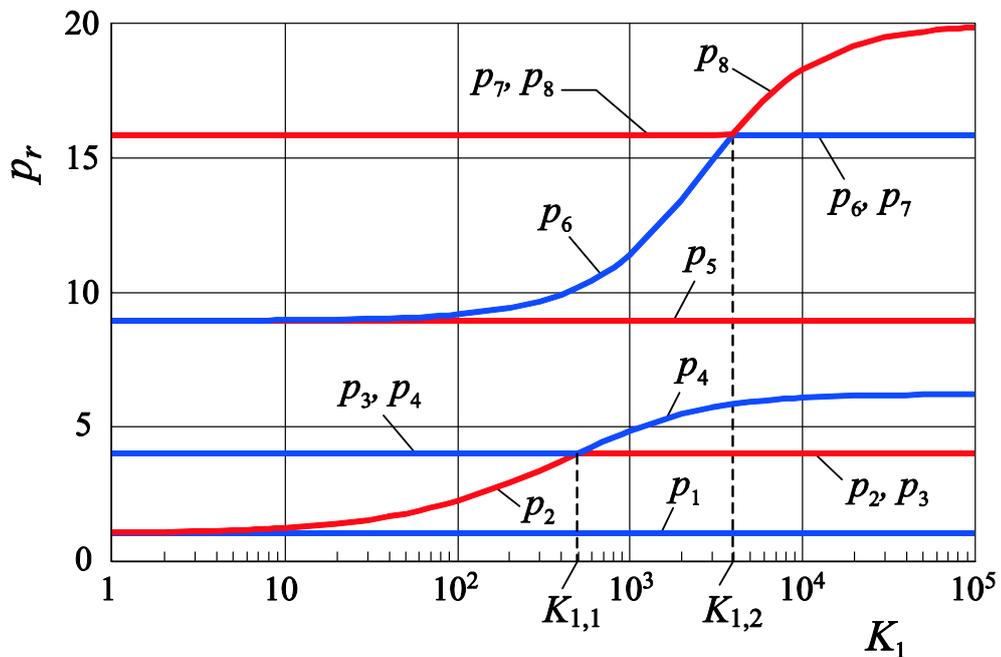


図 2.5 連結ばねのばね定数 K_1 が固有角振動 p_r に及ぼす影響 ($\mu_i=100, k_2=1, a_1=0.5$)

$$2 \sin \frac{\nu}{2} \sinh \frac{\nu}{2} \left\{ 2\nu^3 \cos \frac{\nu}{2} \cosh \frac{\nu}{2} + K_1 \left(\sin \frac{\nu}{2} \cosh \frac{\nu}{2} - \cos \frac{\nu}{2} \sinh \frac{\nu}{2} \right) \right\} = 0 \quad (2.24)$$

式 (2.24) を解くと次式となる.

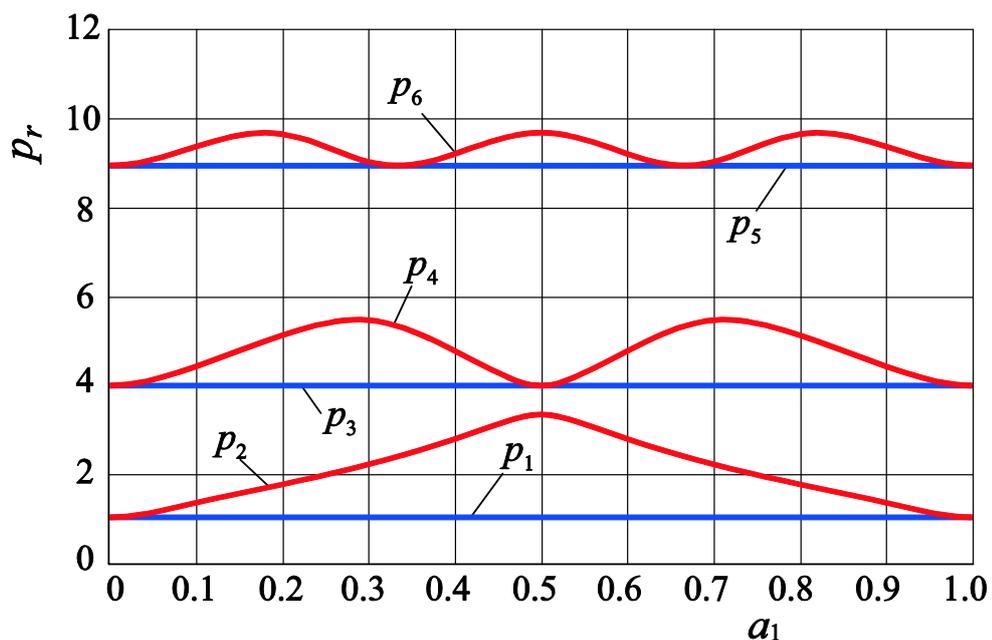
$$\left. \begin{aligned} 2 \sin \frac{\nu}{2} \sinh \frac{\nu}{2} &= 0 & (a) \\ 2\nu^3 \cos \frac{\nu}{2} \cosh \frac{\nu}{2} + K_1 \left(\sin \frac{\nu}{2} \cosh \frac{\nu}{2} - \cos \frac{\nu}{2} \sinh \frac{\nu}{2} \right) &= 0 & (b) \end{aligned} \right\} (2.25)$$

ここで、はり単体の偶数次の固有角振動数 $\nu=2n\pi$ は、式 (2.25a) を満たす. 一方、 $\nu=2n\pi$ を式 (2.25b) に代入すると、 $2\nu^3 \cosh(\nu/2) = K_1 \sinh(\nu/2)$ となる. したがって、 $K_{1,n}$ は次式で与えられる.

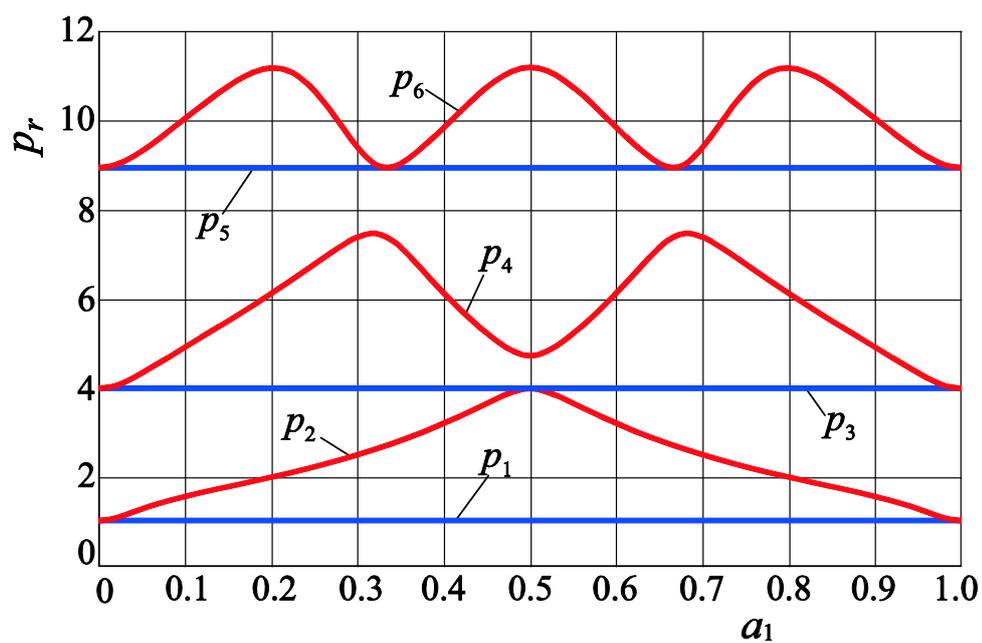
$$K_{1,n} = 2(2n\pi)^3 \coth(n\pi) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (2.26)$$

$n=1$ の $p_2=p_3=p_4$ となる場合、式 (2.26) より $K_{1,1}=498$ が得られる. この値は、はり 1 単体の有次元の曲げ剛性が $48E_1I_1/l^3$ で与えられることを考慮すると、はり 1 単体の曲げ剛性の約10倍に相当する. また、 $n=2$ の $p_6=p_7=p_8$ となる場合、 $K_{1,2}=3969$ が得られる.

図 2.6 は、それぞれ $K_1=300, 900$ の場合、固有角振動数に及ぼす連結ばねの取付位置 a_1 の影響を示す. その他のパラメータの値は、図 2.3 の場合と同じである. はり単体の振動モードの節の位置に連結ばねが取り付けられた場合には、2つの固有角振動数が等しくなる. 例えば、図 2.6(a)では、 $a_1=0.5$ の場合に $p_3=p_4$ となる. また、 $a_1=1/3$ の場合には $p_5=p_6$ となる. 一方、図 2.6(b)では、図 2.6(a)とは異なり、 $a_1=0.5$ の場合に $p_2=p_3$ となる. また、固有角振動数が最も大きくなる連結ばねの取付位置は、2次、4次、および6次モードに対して、それぞれはり単体の1次、2次、3次モードの腹の位置に相当していることがわかる.



(a) $K_1=300$



(b) $K_1=900$

図 2.6 固有角振動数 p_r に及ぼす連結ばねの取付位置 a_1 の影響
($\mu_i=100, k_2=1$)

図 2.7 は、 K_1 の値が $K_{1,i}=498$ より小さい場合と大きい場合の振動モードを比較するために、それぞれ $K_1=300, 900$ を選定した場合、式 (2.22) より計算した振動モ

ードを示す. $K_1=300$ の場合, 2 本のはりが同材質, 同形状で連結ばねの取付位置がはりの中央であるので, 1 次モードでは, 図 2.7 に示すように各はりが 1 つの腹をもち, はり 1, 2 が同振幅, 同位相で振動するため, 連結ばねは伸縮しない. そのため, 1 次モードの固有角振動数 p_1 ははり単体の 1 次モードの固有角振動数と同じであり, 図 2.5 に示したように, K_1 の値によらず一定である. 図 2.8 に示す 2 次モードでは, 各はりは逆位相で振動するため連結ばねが伸縮し, その影響により 2 次モードの固有角振動数 p_2 は p_1 より大きく, 図 2.5 に示したように, K_1 の値の増加とともに p_2 は大きくなるのがわかる.

ばねがはりの中央に取り付けられた場合 ($a_1=0.5$) の 3 次, 4 次モードは, 固有角振動数が同一となる. このとき, ばねははり単体の振動モードの節の位置に取り付けられているため, ばねが伸縮せず, はり 1 とはり 2 の振動は独立となる. このため, はり 1 のみが振動し, はり 2 が振動しない図 2.7 (c) の振動モードと, はり 1 が振動せず, はり 2 のみが振動する図 2.7 (d) の振動モードを基底の振動モードとして選んだ. ただし, 3 次, 4 次モードの選び方は図 2.7 (c) と (d) のモードの線形結合によって表される. 2 つの独立な振動モードの組み合わせは無数に存在することに注意する. このため, 固有角振動数 p_4 は p_3 に等しい. 図 2.7 (e), (f) に示す 5 次モードと 6 次モードの性質は, このような 1 次モードと 2 次モードの性質と類似している. 一方, $K_1=900$ の場合, 図 2.8 では, 連結ばね定数が図 2.7 の場合よりも大きいため, 図 2.5 で示したように, 2 次, 3 次, 4 次モードが図 2.7 の場合と入れ替わることに注意する. これらのモードが入れ替わる現象は, $a_1=0.5$ の場合に限り生じ, 1 本の両端支持はりがその中央をばねで弾性支持された系の計算結果[54]でも見られる.

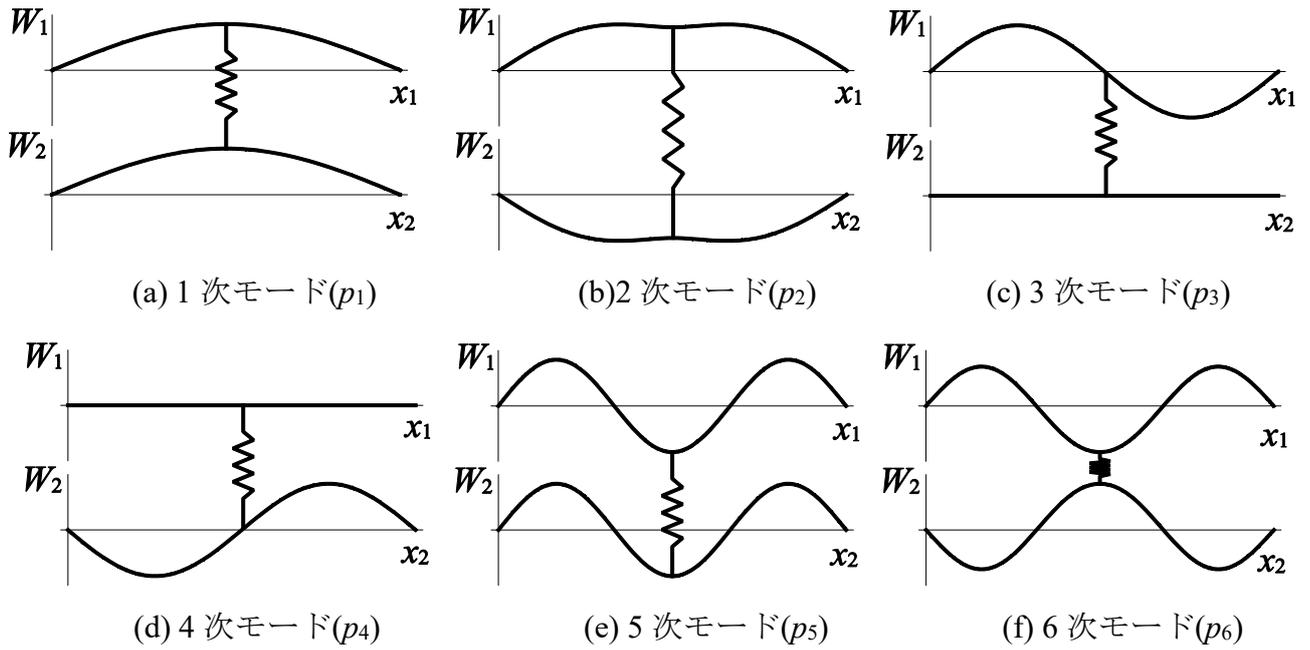


図 2.7 $K_1=300$ の場合の振動モード ($\mu_i=100, k_2=1, a_1=0.5$)

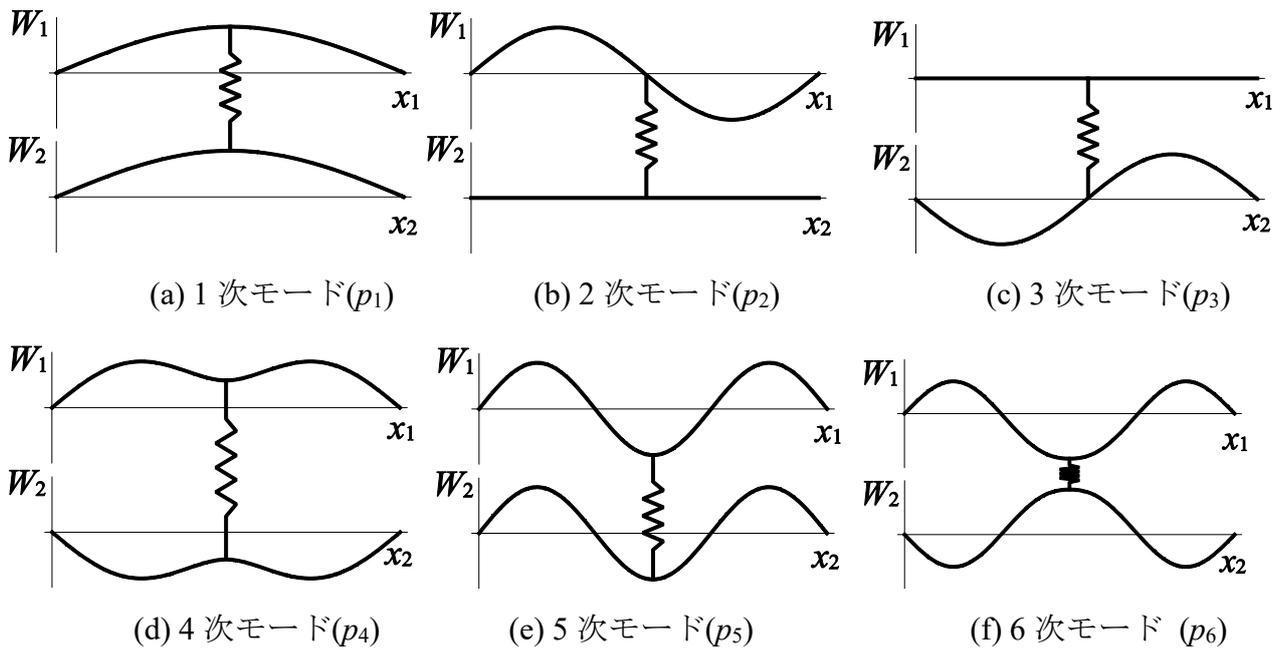


図 2.8 $K_1=900$ の場合の振動モード ($\mu_i=100, k_2=1, a_1=0.5$)

図 2.9 は、はり 1, 2 の厚み比 h_2/h_1 が固有角振動数に及ぼす影響を示す。パラメータの値は、 $\mu_1=100$, $K_1=300$, $a_1=0.4$ である。また、はり 2 の厚みが増加すると、はりの断面積も変化するため、 $\mu_2=\mu_1(h_2/h_1)$ の関係がある。さらに、はりの剛性に相当する k_2 については、はり 1, 2 のヤング率を同じ値としたとき、 $k_2=(h_2/h_1)^3$ の関係があることに注意する。図 2.9 より、連結ばねがはり 1, 2 の両方に影響を及ぼし、系の固有角振動数は一定とならず、はり 2 の厚みが減少するにつれて p_r は減少する。特に、この傾向は高次モードの固有角振動数ほど顕著であり、ある振動数以下の振動モードの数が増えることがわかる。

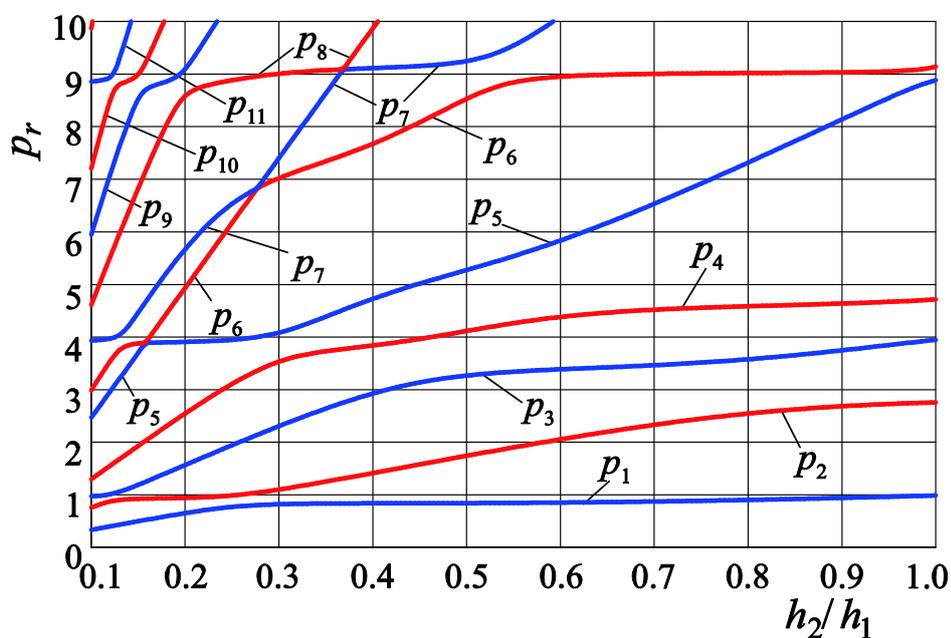


図 2.9 はり 1, 2 の厚み比 h_2/h_1 が固有角振動数 p_r に及ぼす影響
($\mu_1=100, a_1=0.4, K_1=300$)

図 2.10 は、 $K_1=300$, $\mu_1=100$, $\mu_2=20$, $k_2=0.008$, $h_2/h_1=0.2$, $a_1=0.4$ の場合の振動モードを示す。はり 2 の剛性が小さく、はり 2 単体の固有角振動数が小さくなるため、はり 1 単体の低次モードとはり 2 単体の高次モードが組み合わされたモード形状となっている。1 次、3 次、4 次モードについては、ばねの取付位置 ($a_1=0.4$) の付近で、はり 1 の振幅が零に近くなっており、はり単体の振動モード形状とは大きく異なることがわかる。

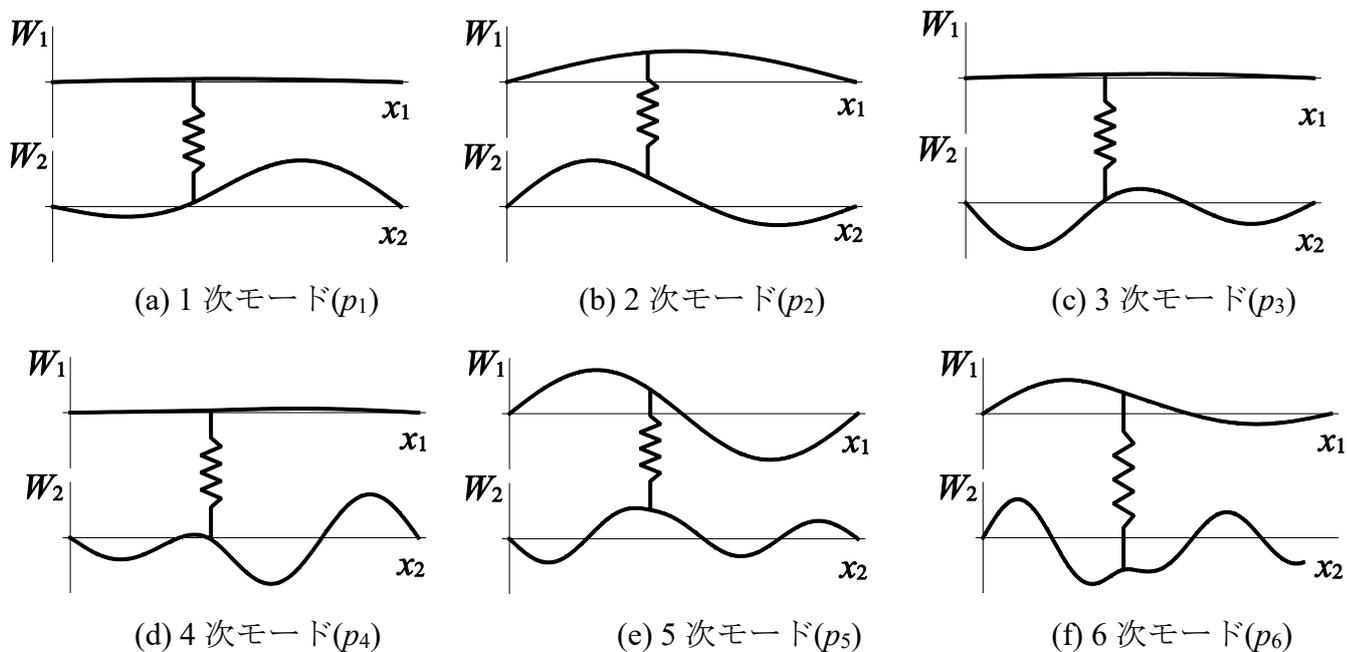


図 2.10 $K_1=300$ の場合の振動モード($\mu_1=100$, $\mu_2=20$, $k_2=0.008$, $h_2/h_1=0.2$, $a_1=0.4$)

2.3.2 連結ばねが2本の場合（ケースB）

図 2.11 は、2本のはりが同材質、同形状で、2本のばねによって連結された場合、系の固有角振動数に及ぼす連結ばねのばね定数 K_j ($j=1, 2$) の影響を示す。ここでは、2本のばねはそれぞれ左端、および右端から等距離 $a=0.22$ の位置に取り付けられ、 $a_1=a=0.22$ 、 $a_2=1-a=0.78$ である。これらの取付位置は、はり単体の6次までの振動モードの節の位置と一致しない。2.3.1 節で述べた連結ばねが1本の場合と同様に、 K_j 、 a_j 以外のパラメータの値は、 $\mu_i=100$ 、 $k_2=1$ である。連結ばねが1本の場合（図 2.5）では、 $a_1=0.5$ の特別な場合に固有角振動数の曲線が接近して、複数の固有角振動数が等しくなるばね定数 $K_{1,n}$ が存在した。図 2.11 に示すように、連結ばねが2本の場合においても、はりの中央に対して2本のばねが左右対称に配置されているため、 $K_j=800$ 付近の2ヶ所で $p_2=p_3$ 、 $p_4=p_5$ となっている。この関係は $p_{2n}=p_{2n+1}$ で一般化されることが、 $n=4$ まで確かめられている。

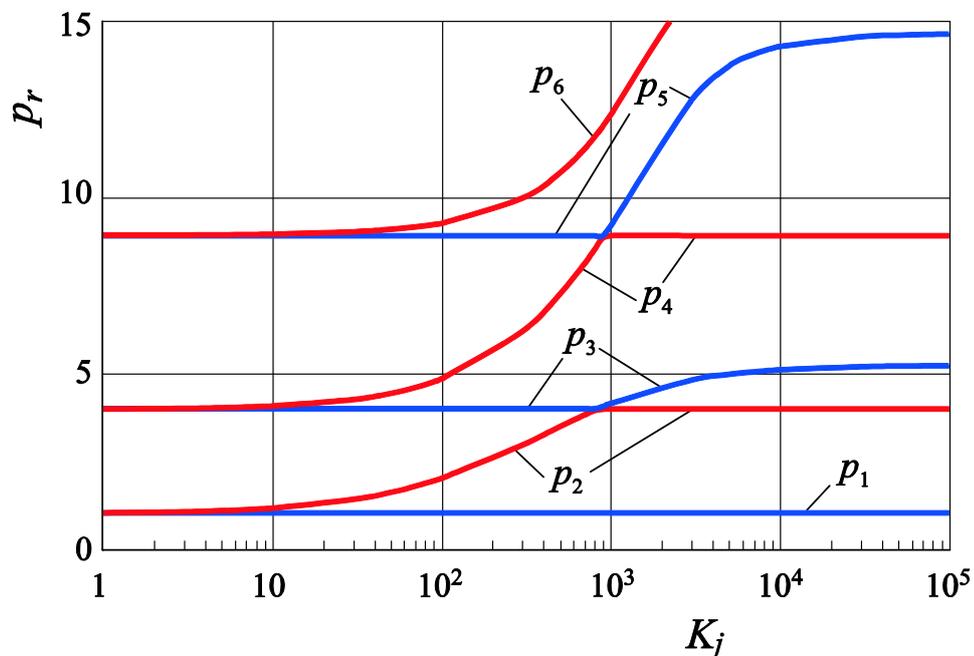
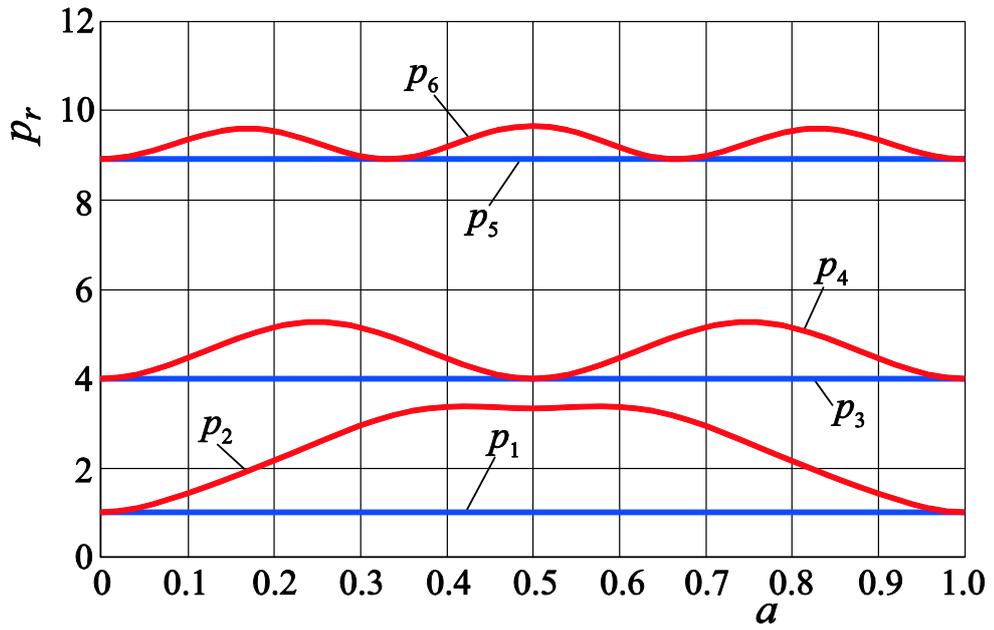
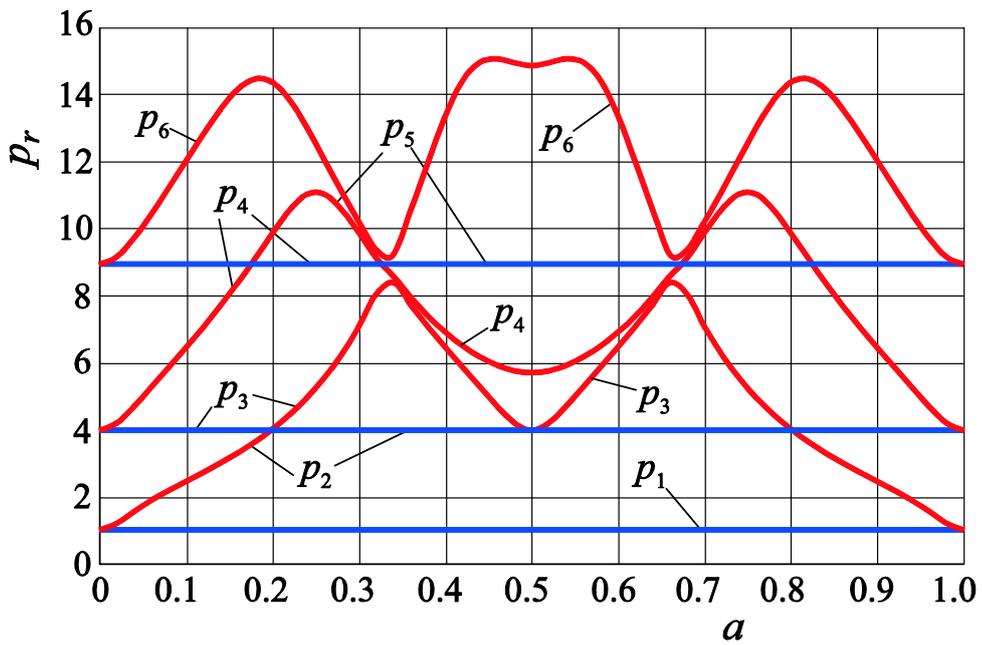


図 2.11 連結ばねのばね定数 K_j が固有角振動数 p_r に及ぼす影響
 ($\mu_i=100$, $k_2=1$, $a_1=0.22$, $a_2=0.78$)

図 2.12 は、2 本の連結ばねのばね定数が上述の $K_f=800$ より小さい $K_f=150$ 、および大きい $K_f=1500$ の場合、固有角振動数に及ぼす連結ばねの取付位置の影響を示す。図 2.12(a)では、固有角振動数の曲線は交差していない。図 2.6 に示した連結ばねが 1 本の場合には、2 次の固有角振動数 p_2 は $a_1=0.5$ の 1 ヶ所で最大となっていたのに対して、連結ばねが 2 本の場合の p_2 は、 a の値の 2 ヶ所で最大となっている。ただし、 p_4 と p_6 は、連結ばねが 1 本の場合と同様に、振動モードの腹の位置で固有角振動数が最大となっていることがわかる。一方、図 2.12(b)では、 p_2 と p_3 の曲線は $a=0.2, 0.8$ で等しくなっており、 p_4 と p_5 の曲線は $a=0.18, 0.82$ で等しくなっている。また、図 2.6(b)と同様に、固有角振動数の大小関係が入れ替わる。



(a) $K_j=150$



(b) $K_j=1500$

図 2.12 固有角振動数 p_r に及ぼす連結ばねの取付位置 $a_1=a, a_2=1-a$ の影響
($\mu_i=100, k_2=1$)

図 2.13 は、2 本のはりが同材質，同形状で， $\mu_i=100$ ， $k_2=1$ ， $K_j=150$ ， $a_1=0.22$ ， $a_2=0.78$ の場合の 6 次までの振動モードを示す．2 本のはりが，1 本のばねによりはりの中央 ($a=0.5$) で連結された場合 (図 2.7) の結果と比較すると，図 2.13 (c)，(d) を除き，よく似ていることがわかる．図 2.13 (c)，(d) において，モードの節と一致しない位置に連結ばねが取り付けられているため，図 2.7 (c)，(d) とは異なり，はり 1，2 が振動することになる．そのため，はり 1，2 が同位相，または逆位相で振動するモードが現れている．

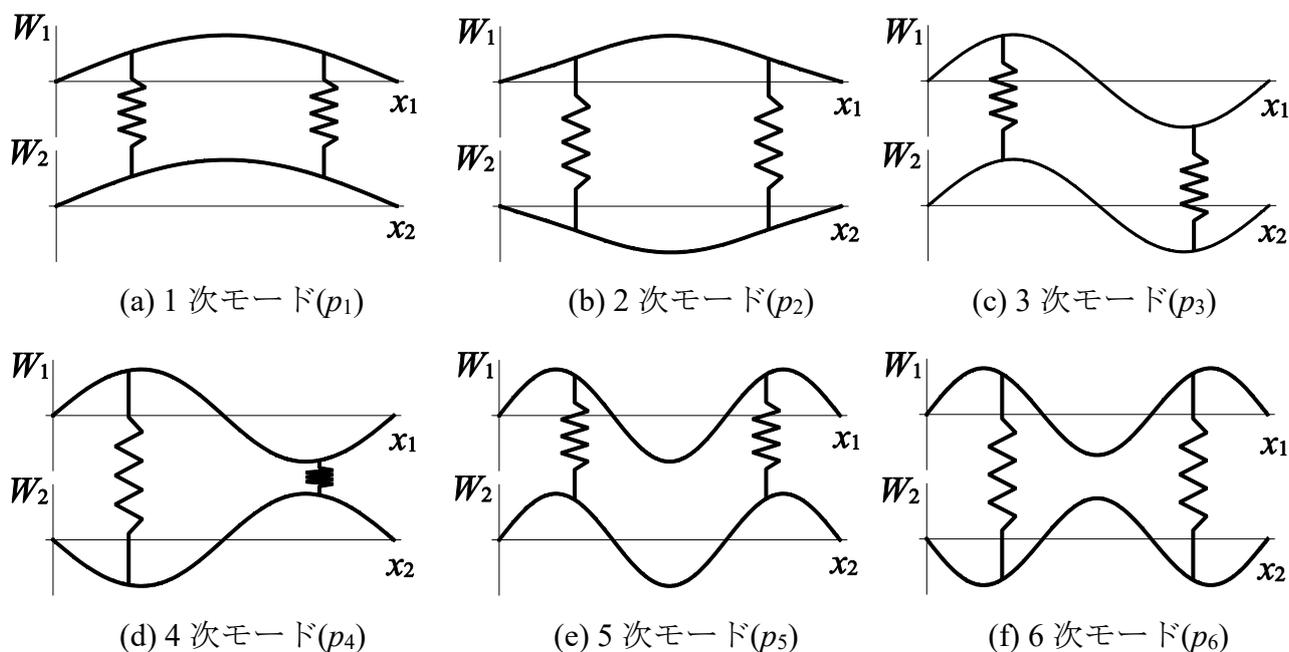


図 2.13 $K_j=150$ の場合の振動モード ($\mu_i=100$ ， $k_2=1$ ， $a_1=0.22$ ， $a_2=0.78$)．

2.4 有限要素法解析による検証

理論解析の妥当性を検証するため、有限要素法 (FEM) 解析を行い、両者による固有角振動数とモード形状を比較する。図 2.14, 2.15 は、それぞれ連結ばねが 1 本と 2 本の場合の固有角振動数を示す。はりのパラメータの値は、長さ $l=4$ m, 幅 $b_1=b_2=0.01$ m, 厚さ $h_1=h_2=0.0724$ m, 密度 $\rho_1=\rho_2=410$ kg/m³, ヤング率 $E_1=E_2=10^{10}$ N/m² である。また、ばねの取付位置は、図 2.14, 2.15 で、それぞれ $a_1=1.6$ m, $a=0.88$ m ($a_1=0.88$ m, $a_2=3.12$ m) である。これらの有次元量に対応する無次元量の値は、 $\mu_i=100$, $k_2=1$, $a_1=0.4$, $a=0.22$ ($a_1=0.22$, $a_2=0.78$) である。図中の実線は理論解析による結果、▲, ●印はそれぞれ、奇数次、偶数次モードの FEM 解析結果を表す。FEM 解析では汎用構造解析ソフトウェア MSC.Marc を用い、ばねが 1 本の場合にははりを 30 要素、ばねが 2 本の場合は 32 要素に分割したモデルを使用した。要素には 2 次元はり要素を用い、はり両端の単純支持条件ははりの軸方向とたわみ方向の変位を拘束することにより実現した (FEM 解析モデルの詳細は付録 B 参照)。FEM 解析と理論解析により求めた各モードの固有角振動数の差の最大値は 2.0×10^{-5} % 以下であり、理論解析の妥当性が確かめられた。

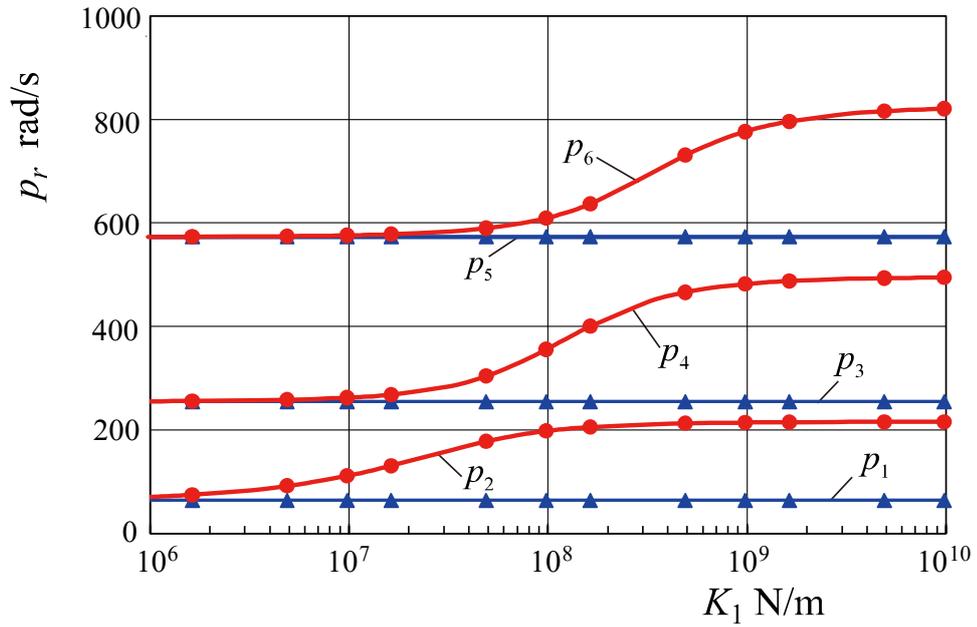


図 2.14 理論解析（実線）と FEM 解析（シンボル）により求めた連結ばねが 1 本の場合の固有角振動数 p_r の比較（ケース A）

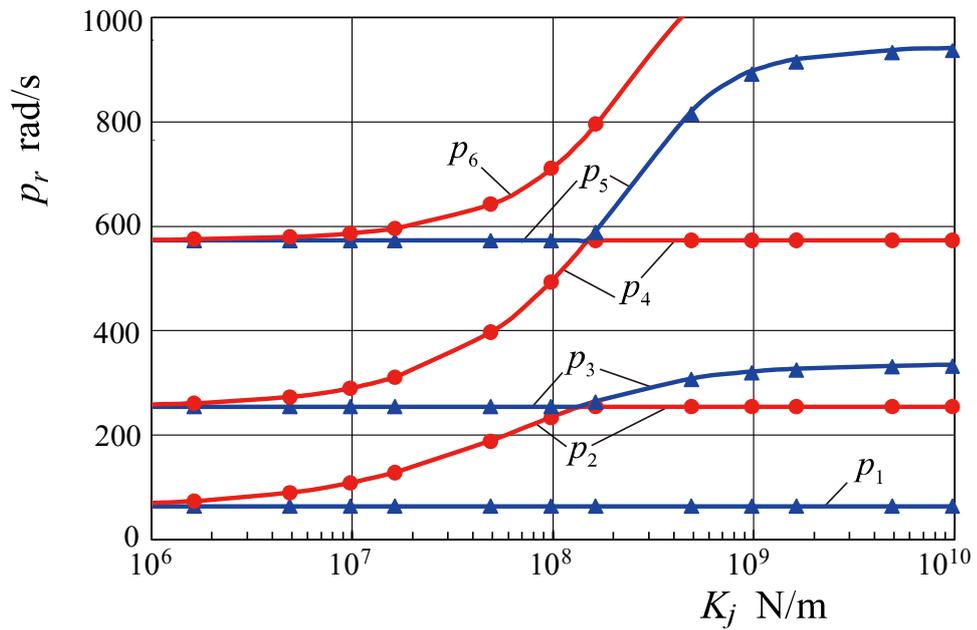


図 2.15 理論解析（実線）と FEM 解析（シンボル）により求めた連結ばねが 2 本の場合の固有角振動数 p_r の比較（ケース B）

図 2.16, 2.17 は, それぞれ $K_1=4.89 \times 10^7$ N/m, $K_j=2.445 \times 10^7$ N/m の場合, 理論解析の計算結果と FEM 解析による振動モードの比較を示す. それぞれの計算結果は実線および●印で表され, 両者はよく一致していることがわかる.

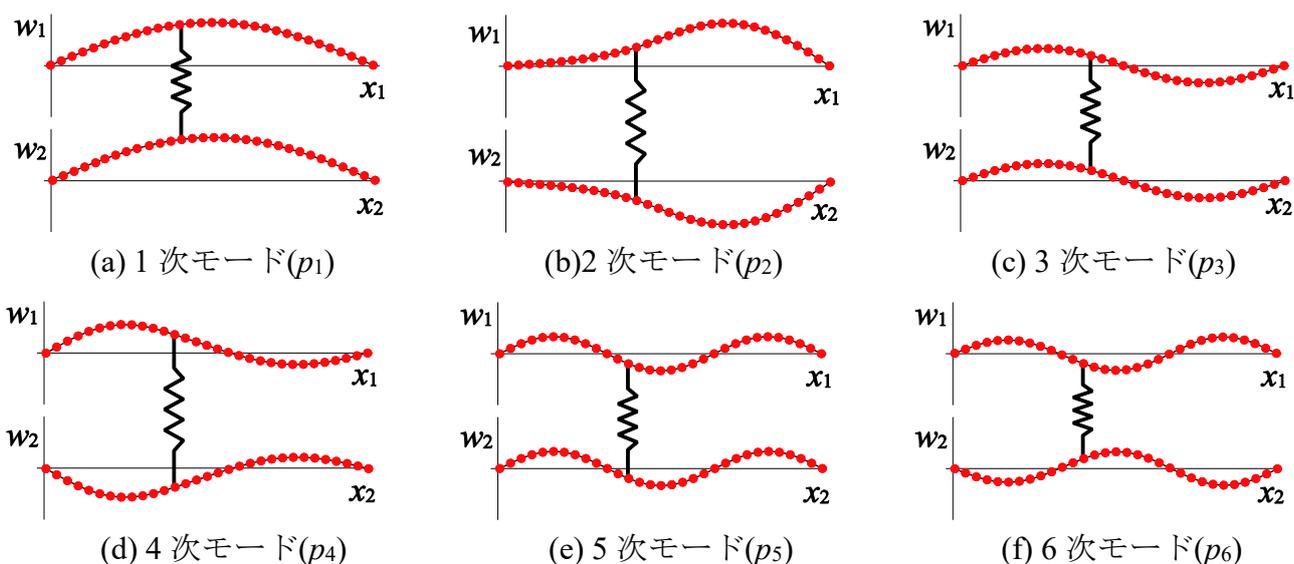


図 2.16 理論解析 (実線) と FEM 解析 (シンボル) により求めた連結ばねが 1 本の場合の振動モードの比較 (ケース A : $K_1=4.89 \times 10^7$ N/m)

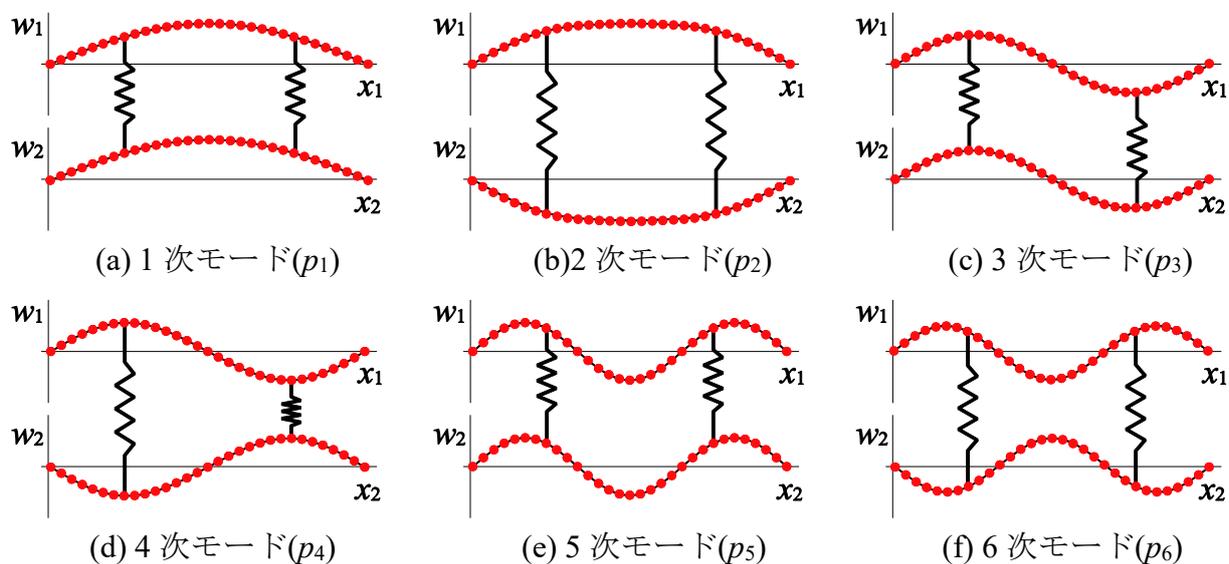


図 2.17 理論解析 (実線) と FEM 解析 (シンボル) により求めた連結ばねが 2 本の場合の振動モードの比較 (ケース B : $K_j=2.445 \times 10^7$ N/m)

2.5 結言

本章では、2本の両端単純支持はりが複数のばねで離散的に連結された系を対象として、モード解析により固有角振動数と振動モード形状を求める式を解析的に誘導した。これらの式を用いて、連結ばねが1本 [ケース A (A1, A2)] または2本の場合 (ケース B) の固有角振動数と振動モード形状を計算した。その計算結果の妥当性を確かめるため、FEM 解析結果と比較した。主に固有角振動数と振動モード形状に及ぼす連結ばねのばね定数と設置位置の影響を調べた結果、以下の結論を得た。

A1. 2本のはりが同材質、同形状で、1本のばねで連結された場合

- (1) はり 1, 2 が同振幅、同位相で振動するモードでは、連結ばねは伸縮しないため、そのばね定数 K_1 の変化に依存せず、対応する固有角振動数は一定であり、はり単体の固有角振動数と等しい。一方、同振幅、逆位相で振動するモードでは、ばね定数 K_1 が大きくなるにつれ、対応する固有角振動数は大きくなる。
- (2) 連結ばねがはりの中央に取り付けられた場合、ばねの取付位置がはり単体のモードの節の位置に一致するため、系の $4n-1$ 次モードと $4n$ 次モード ($n=1, 2, \dots$) の固有角振動数は等しくなる。さらに、ばね定数 K_1 が特定の値 $K_{1,n}$ になると、 $4n-2$ 次、 $4n-1$ 次、 $4n$ 次モードの固有角振動数が等しくなる。その値を境として、固有振動モードに対応する固有角振動数の大小関係が入れ替わる。
- (3) 振動モードの腹の位置に連結ばねが取り付けられた場合、はり 1, 2 が逆位相で振動するモードの固有角振動数は最大となる。
- (4) 固有角振動数と振動モードの理論解析結果は、FEM 解析結果とよく一致しており、理論解析の妥当性が確かめられた。

A2. 2本のはりが同材質、異形状で、1本のばねで連結された場合

- (1) はり 1 に対してはり 2 の厚みが小さくなるにつれ、固有角振動数が小さくなる。特に、この傾向は高次モードの固有角振動数ほど顕著であり、ある振動数以下の振動モードの数が多くなる。

B. 2本のはりが同材質、同形状で、2本のばねで連結された場合

- (1) はりの中央に対して左右対称に2本の連結ばねを取り付けた場合、はり単体のモードの節の位置にばねが取り付けられていなくても、ばね定数が特定の値になると、 $2n$ 次、 $2n+1$ 次モードの固有角振動数が等しくなり、その値を境として、振動モードに対応する固有角振動数の大小関係が入れ替わる。

- (2) はり単体の振動モードの節の位置と一致しない対称な位置に連結ばねを取り付けると，はり 1, 2 は同位相，または逆位相で振動するモードが現れる．

第3章 複数のばね・ダッシュポットで離散的に 連結された二重はりの強制振動

3.1 緒言

建築構造物，産業機械，宇宙構造物，航空機，船舶などの構成部材や本体は，はりとして扱うことができる．橋梁のような構造物には，自動車が通過する際に発生する交通振動や風荷重により発生する振動，エンジンや回転機械を支持する構造物が受ける定常的な荷重により発生する振動および宇宙構造物をロケットで打ち上げる時やロケット切り離し時に部材が受ける荷重により発生する振動などがある．そのため，はり構造物が動的な荷重を受けた場合に発生する振動問題を調べることは重要であり，単一のはりに関する強制振動の研究は盛んに行われてきた．一方で，複数のはりでモデル化することができる最も単純な構造として，二重はり構造が挙げられる．この二重はり構造の例として，床-天井吊り構造がある．床-天井吊り構造をもつ集合住宅では，居住者の飛び跳ねなどにより上階の床が加振され，それに伴い発生した床の振動が床と天井を結ぶ吊り具を介して，下階の天井を振動させることにより音が発生する．従って，上階から下階に伝わる振動を抑制するため，連結する吊り具の特性や設置位置などを適切に設計することが必要である．そのため，2本のはりがばねで連結された系が強制外力を受け，その系に生じる振動現象を把握することは重要である．

連結された2本の弾性はりを対象とした強制振動に関する研究は，ゴムのような粘弾性材料で連続的に接合されたサンドイッチ構造をもつ二重はりを対象としたものが多く，強制振動について，モード解析などを利用して多くの研究 [22, 25, 27, 29, 31, 32] がなされている．一方，2本のはりが離散的に配置されたばねで連結された系の強制振動は，伝達マトリクス法 [40, 41, 42]，伝達マトリクス法を拡張した手法 [43] およびウェーブレット法 [46] による研究に留まっている．その理由として，両端が単純支持された2本のはりが連続的に配置されたばねで結ばれた系の強制振動解は，比較的容易に求められるのに対し，離散的にばねで連結された系では，モード関数の直交性が成立することが確かめられていないため，それを利用した各モードの非連成化が行えない点が挙げられる．しかし，離散的にばねで連結された系は実用的な構造であり，それを対象とした振動解析は広い分野での応用が期待される．

そこで本章では、2本の両端単純支持はりが離散的に配置された N 組のばねとダッシュポットから成る連結要素により繋がれた系を対象とし、上部のはりに正弦外力が作用する場合、モード関数の直交性を用いてモード方程式を導き、強制振動解を解析的に求めた。数値計算では、連結要素が1組の場合（ケース A）と2組の場合（ケース B）について、強制振動の応答曲線を示した。また、応答曲線の数値計算結果を有限要素法による計算結果と比較することにより、本理論解析の妥当性を検証した。

3.2 理論解析

3.2.1 運動方程式

図 3.1 のように、両端が単純支持され、一様で長さの等しい 2 本のはりが、 N 組のばね定数 K_j ($j=1, 2, \dots, N$) のばねと減衰係数 C_j のダッシュポットで繋がれている系を考える。はりの左端から j 番目の連結要素は、左端から距離 a_j の位置に取り付けられている。上部のはりを“はり 1”、下部のはりを“はり 2”と呼び、パラメータの添字は、各はりを表すものとする。はり i ($i=1, 2$) の長さを l 、幅を b_i 、厚さを h_i 、密度を ρ_i 、ヤング率を E_i 、断面積を S_i ($=b_i \times h_i$)、断面 2 次モーメントを I_i 、はりの減衰係数を c_i とする。はり 1 の左端から距離 d の位置に、大きさ F_0 、励振振動数 ω の調和外力 $F_0 \cos \omega t$ が作用する。はり i の長手方向の座標軸を x_i とし、時間 t におけるはり i のたわみを $w_i(x_i, t)$ とする。解析結果に一般性をもたせるため、次の無次元量を導入する。

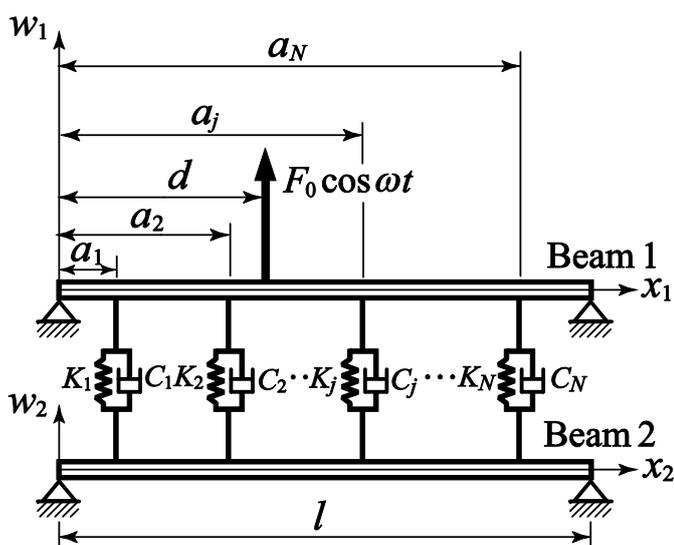


図 3.1 理論解析モデル

$$\left. \begin{aligned}
x'_i &= \frac{x_i}{l}, \quad w'_i = \frac{w_i}{l}, \quad a'_j = \frac{a_j}{l}, \quad d' = \frac{d}{l}, \quad \mu_i = \frac{\rho_i S_i l^4 p_1^2}{E_1 I_1}, \\
k'_i &= \frac{E_i I_i}{E_1 I_1}, \quad c'_i = \frac{c_i l^4 p_1}{E_1 I_1}, \quad K'_j = \frac{K_j l^3}{E_1 I_1}, \quad C'_j = \frac{C_j l^3 p_1}{E_1 I_1}, \\
F'_0 &= \frac{F_0 l^2}{E_1 I_1}, \quad \delta' = \delta l, \quad t' = p_1 t, \quad \omega' = \frac{\omega}{p_1} \quad (i=1, 2; j=1, 2, \dots, N)
\end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

ここに、 p_1 は系の 1 次の固有角振動数を表し、 $\delta(\bullet)$ はデルタ関数である。式 (3.1) を用いると、各はりの無次元化された運動方程式は次式となる。ただし、式 (3.2) 以降では、無次元量を表す記号「'」はすべて省略されている。

$$\left. \begin{aligned}
&\mu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + c_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} + k_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x_1^4} \\
&+ \sum_{j=1}^N \left\{ K_j (w_1 - w_2) + C_j \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial w_2}{\partial t} \right) \right\} \delta(x_1 - a_j) = F_0 \delta(x_1 - d) \cos \omega t \quad (a) \\
&\mu_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + c_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} + k_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x_2^4} \\
&+ \sum_{j=1}^N \left\{ K_j (w_2 - w_1) + C_j \left(\frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial w_1}{\partial t} \right) \right\} \delta(x_2 - a_j) = 0 \quad (b)
\end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

ここに、式 (3.1) より常に $k_1=1$ である。第 2 章の式 (2.18) より求められる系の r 次の固有角振動数 p_r に対応するモード関数は、はり i のモード形状に分けて考え、単位ステップ関数 $U(x)$ を用いると、第 2 章の式 (2.21) より次式で与えられる。

$$\phi_{i,r}(x_i) = \sum_{j=1}^N \left[\psi_{i-j,r}(x_i) \{U(x_i - a_{j-1}) - U(x_i - a_j)\} \right] + \psi_{i-N+1,r}(x_i) U(x_i - a_N) \quad (3.3)$$

($i=1, 2$)

ここに、 $\psi_{i,j,r}(x_i)$ は、はり i について $j-1$ 番目のばねと j 番目のばねの間の区間のモード形状を表す。系のモード関数は、はり 1 とはり 2 を一組とした形状を表すが、

本論文では各はりのモード形状を便宜上分けた関数 $\phi_{i,r}(x_i)$ を用いて定義した。このとき、はり i のたわみ $w_i(x_i,t)$ の自由振動の一般解は次式となる。

$$w_i(x_i,t) = \sum_{r=1}^{\infty} b_r \phi_{i,r}(x_i) \cos(p_r t + \beta_r) \quad (3.4)$$

ここに、 p_r は r 次の固有角振動数であり、第 2 章の式 (2.19) により求められる。また、 b_r と β_r は任意定数である。

3.2.2 モード関数の直交性

本節では、式 (3.3) のモード関数の直交性について調べる。左側から $j-1$, j , $j+1$ 番目のばねで連結された区間のはりを対象とし、はり i ($i=1, 2$) のモードについて考える。 r 次と s 次の固有角振動数を、それぞれ p_r , p_s とする。 $p_r \neq p_s$ である場合、 $c_i=0$, $K_j=0$, $C_j=0$, および $F_0=0$ とした式 (3.2) に式 (3.4) を代入し、 $\cos(p_r t + \beta_r)$, $\cos(p_s t + \beta_s)$ のそれぞれの係数を比較すると、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 p_r^2 \phi_{1,r}(x_1) &= k_1 \frac{d^4 \phi_{1,r}(x_1)}{dx_1^4} & (a) \\ \mu_2 p_r^2 \phi_{2,r}(x_2) &= k_2 \frac{d^4 \phi_{2,r}(x_2)}{dx_2^4} & (b) \\ \mu_1 p_s^2 \phi_{1,s}(x_1) &= k_1 \frac{d^4 \phi_{1,s}(x_1)}{dx_1^4} & (c) \\ \mu_2 p_s^2 \phi_{2,s}(x_2) &= k_2 \frac{d^4 \phi_{2,s}(x_2)}{dx_2^4} & (d) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

式 (3.5a), (3.5b) の両辺にそれぞれ $\phi_{1,s}(x_1)$, $\phi_{2,s}(x_2)$ を掛けて、それぞれ x_1 , x_2 について 0 から 1 まで、ばねの取付位置の左右の区間を考慮して積分すると、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} p_r^2 \int_0^1 \mu_1 \phi_{1,s}(x_1) \phi_{1,r}(x_1) dx_1 &= \int_0^1 k_1 \phi_{1,s}(x_1) \frac{d^4 \phi_{1,r}(x_1)}{dx_1^4} dx_1 & (a) \\ p_r^2 \int_0^1 \mu_2 \phi_{2,s}(x_2) \phi_{2,r}(x_2) dx_2 &= \int_0^1 k_2 \phi_{2,s}(x_2) \frac{d^4 \phi_{2,r}(x_2)}{dx_2^4} dx_2 & (b) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

最初に、はり 1 について調べるため、式 (3.6a) の右辺について部分積分を 2 回行うと次式となる.

$$\begin{aligned}
& p_r^2 \int_0^1 \mu_1 \phi_{1,s}(x_1) \phi_{1,r}(x_1) dx_1 \\
&= \left\{ \left[\phi_{1,s}(x_1) k_1 \frac{d^3 \phi_{1,r}(x_1)}{dx_1^3} \right]_0^{a_1} + \cdots + \left[\phi_{1,s}(x_1) k_1 \frac{d^3 \phi_{1,r}(x_1)}{dx_1^3} \right]_{a_{j-1}}^{a_j} + \cdots + \left[\phi_{1,s}(x_1) k_1 \frac{d^3 \phi_{1,r}(x_1)}{dx_1^3} \right]_{a_N}^{a_{N+1}} \right\} \\
&- \left\{ \left[\frac{d\phi_{1,s}(x_1)}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \phi_{1,r}(x_1)}{dx_1^2} \right]_{a_0}^{a_1} + \cdots + \left[\frac{d\phi_{1,s}(x_1)}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \phi_{1,r}(x_1)}{dx_1^2} \right]_{a_{j+1}}^{a_j} \cdots + \left[\frac{d\phi_{1,s}(x_1)}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \phi_{1,r}(x_1)}{dx_1^2} \right]_{a_N}^1 \right\} \\
&+ \int_0^1 \frac{d^2 \phi_{1,s}(x_1)}{dx_1^2} k_1 \frac{d^2 \phi_{1,r}(x_1)}{dx_1^2} dx_1
\end{aligned} \tag{3.7}$$

ここで、式 (3.7) の右辺に、式 (3.3) を用いると、式 (3.7) は次のように書き直すことができる.

$$\begin{aligned}
p_r^2 \int_0^1 \mu_1 \phi_{1,s}(x_1) \phi_{1,r}(x_1) dx_1 &= \left(\psi_{1_{-1},s}(a_1) k_1 \frac{d^3 \psi_{1_{-1},r}(a_1)}{dx_1^3} - \psi_{1_{-1},s}(0) k_1 \frac{d^3 \psi_{1_{-1},r}(0)}{dx_1^3} \right) \\
&+ \left(\psi_{1_{-2},s}(a_2) k_1 \frac{d^3 \psi_{1_{-2},r}(a_2)}{dx_1^3} - \psi_{1_{-2},s}(a_1) k_1 \frac{d^3 \psi_{1_{-2},r}(a_1)}{dx_1^3} \right) \\
&+ \cdots + \left(\psi_{1_{-j},s}(a_j) k_1 \frac{d^3 \psi_{1_{-j},r}(a_j)}{dx_1^3} - \psi_{1_{-j},s}(a_{j-1}) k_1 \frac{d^3 \psi_{1_{-j},r}(a_{j-1})}{dx_1^3} \right) \\
&+ \left(\psi_{1_{-j+1},s}(a_{j+1}) k_1 \frac{d^3 \psi_{1_{-j+1},r}(a_{j+1})}{dx_1^3} - \psi_{1_{-j+1},s}(a_j) k_1 \frac{d^3 \psi_{1_{-j+1},r}(a_j)}{dx_1^3} \right) \\
&+ \cdots + \left(\psi_{1_{-N},s}(a_N) k_1 \frac{d^3 \psi_{1_{-N},r}(a_N)}{dx_1^3} - \psi_{1_{-N},s}(a_{N-1}) k_1 \frac{d^3 \psi_{1_{-N},r}(a_{N-1})}{dx_1^3} \right) \\
&+ \left(\psi_{1_{-N+1},s}(1) k_1 \frac{d^3 \psi_{1_{-N+1},r}(1)}{dx_1^3} - \psi_{1_{-N+1},s}(a_N) k_1 \frac{d^3 \psi_{1_{-N+1},r}(a_N)}{dx_1^3} \right) \\
&+ \left(\frac{d\psi_{1_{-1},s}(a_1)}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \psi_{1_{-1},r}(a_1)}{dx_1^2} - \frac{d\psi_{1_{-1},s}(0)}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \psi_{1_{-1},r}(0)}{dx_1^2} \right) \\
&+ \left(\frac{d\psi_{1_{-2},s}(a_2)}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \psi_{1_{-2},r}(a_2)}{dx_1^2} - \frac{d\psi_{1_{-2},s}(a_1)}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \psi_{1_{-2},r}(a_1)}{dx_1^2} \right) \\
&+ \cdots + \left(\frac{d\psi_{1_{-j},s}(a_j)}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \psi_{1_{-j},r}(a_j)}{dx_1^2} - \frac{d\psi_{1_{-j},s}(a_{j-1})}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \psi_{1_{-j},r}(a_{j-1})}{dx_1^2} \right) \\
&+ \left(\frac{d\psi_{1_{-j+1},s}(a_{j+1})}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \psi_{1_{-j+1},r}(a_{j+1})}{dx_1^2} - \frac{d\psi_{1_{-j+1},s}(a_j)}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \psi_{1_{-j+1},r}(a_j)}{dx_1^2} \right) \\
&+ \cdots + \left(\frac{d\psi_{1_{-N},s}(a_N)}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \psi_{1_{-N},r}(a_N)}{dx_1^2} - \frac{d\psi_{1_{-N},s}(a_{N-1})}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \psi_{1_{-N},r}(a_{N-1})}{dx_1^2} \right) \\
&+ \left(\frac{d\psi_{1_{-N+1},s}(1)}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \psi_{1_{-N+1},r}(1)}{dx_1^2} - \frac{d\psi_{1_{-N+1},s}(a_N)}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \psi_{1_{-N+1},r}(a_N)}{dx_1^2} \right) + \int_0^1 \frac{d^2 \phi_{1,s}(x_1)}{dx_1^2} k_1 \frac{d^2 \phi_{1,r}(x_1)}{dx_1^2} dx_1
\end{aligned} \tag{3.8}$$

さらに式 (3.8) の右辺を整理すると、次式となる。

$$\begin{aligned}
p_r^2 \int_0^1 \mu_1 \phi_{1,s}(x_1) \phi_{1,r}(x_1) dx_1 &= -\psi_{1-1,s}(0) k_1 \frac{d^3 \psi_{1-1,r}(0)}{dx_1^3} \\
&+ \left(\psi_{1-1,s}(a_1) k_1 \frac{d^3 \psi_{1-1,r}(a_1)}{dx_1^3} - \psi_{1-2,s}(a_1) k_1 \frac{d^3 \psi_{1-2,r}(a_1)}{dx_1^3} \right) + \dots \\
&+ \left(\psi_{1-j,s}(a_j) k_1 \frac{d^3 \psi_{1-j,r}(a_j)}{dx_1^3} - \psi_{1-j+1,s}(a_j) k_1 \frac{d^3 \psi_{1-j+1,r}(a_j)}{dx_1^3} \right) + \dots \\
&+ \left(\psi_{1-N,s}(a_N) k_1 \frac{d^3 \psi_{1-N,r}(a_N)}{dx_1^3} - \psi_{1-N+1,s}(a_N) k_1 \frac{d^3 \psi_{1-N+1,r}(a_N)}{dx_1^3} \right) + \psi_{1-N+1,s}(1) k_1 \frac{d^3 \psi_{1-N+1,r}(1)}{dx_1^3} \\
&- \frac{d\psi_{1-1,s}(0)}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \psi_{1-1,r}(0)}{dx_1^2} + \left(\frac{d\psi_{1-1,s}(a_1)}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \psi_{1-1,r}(a_1)}{dx_1^2} - \frac{d\psi_{1-2,s}(a_1)}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \psi_{1-2,r}(a_1)}{dx_1^2} \right) + \dots \\
&+ \left(\frac{d\psi_{1-j,s}(a_j)}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \psi_{1-j,r}(a_j)}{dx_1^2} - \frac{d\psi_{1-j+1,s}(a_j)}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \psi_{1-j+1,r}(a_j)}{dx_1^2} \right) + \dots + \\
&+ \dots + \left(\frac{d\psi_{1-N,s}(a_N)}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \psi_{1-N,r}(a_N)}{dx_1^2} - \frac{d\psi_{1-N+1,s}(a_N)}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \psi_{1-N+1,r}(a_N)}{dx_1^2} \right) \\
&+ \frac{d\psi_{1-N+1,s}(1)}{dx_1} k_1 \frac{d^2 \psi_{1-N+1,r}(1)}{dx_1^2} + \int_0^1 \frac{d^2 \phi_{1,s}(x_1)}{dx_1^2} k_1 \frac{d^2 \phi_{1,r}(x_1)}{dx_1^2} dx_1
\end{aligned} \tag{3.9}$$

第2章の式 (2.16) および (2.17) の境界条件から得られる次の関係式，すなわち

$$\left. \begin{aligned}
&\psi_{i-1,r}(0) = 0, \quad \frac{d^2 \psi_{i-1,r}(0)}{dx_i^2} = 0, \quad \psi_{i-N+1,r}(1) = 0, \quad \frac{d^2 \psi_{i-N+1,r}(1)}{dx_i^2} = 0, \\
&\psi_{i-j,r}(a_j) = \psi_{i-j+1,r}(a_j), \quad \frac{d\psi_{i-j,r}(a_j)}{dx_i} = \frac{d\psi_{i-j+1,r}(a_j)}{dx_i}, \\
&\frac{d^2 \psi_{i-j,r}(a_j)}{dx_i^2} - \frac{d^2 \psi_{i-j+1,r}(a_j)}{dx_i^2} = 0, \\
&k_i \frac{d^3 \psi_{i-j,r}(a_j)}{dx_i^3} - k_i \frac{d^3 \psi_{i-j+1,r}(a_j)}{dx_i^3} + (-1)^i K_j \{ \psi_{1-j,r}(a_j) - \psi_{2-j,r}(a_j) \} = 0 \\
&\hspace{15em} (i=1, 2)
\end{aligned} \right\} \tag{3.10}$$

を式 (3.9) に用いると，次式を得る．

$$\begin{aligned}
p_r^2 \int_0^1 \mu_1 \phi_{1,s}(x_1) \phi_{1,r}(x_1) dx_1 &= \int_0^1 k_1 \frac{d^2 \phi_{1,s}(x_1)}{dx_1^2} \frac{d^2 \phi_{1,r}(x_1)}{dx_1^2} dx_1 \\
&+ \sum_{j=1}^N K_j \psi_{1-j,s}(a_j) \{ \psi_{1-j,r}(a_j) - \psi_{2-j,r}(a_j) \}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

次に、式 (3.5c), (3.5d) の両辺にそれぞれ $\phi_{1,r}(x_1)$, $\phi_{2,r}(x_2)$ を掛けて、それぞれ x_1 , x_2 について 0 から 1 まで、ばねの取付位置の左右の区間を考慮して積分すると、次式を得る。

$$\begin{aligned}
p_s^2 \int_0^1 \mu_1 \phi_{1,r}(x_1) \phi_{1,s}(x_1) dx_1 &= \int_0^1 k_1 \phi_{1,r}(x_1) \frac{d^4 \phi_{1,s}(x_1)}{dx_1^4} dx_1 & \text{(a)} \\
p_s^2 \int_0^1 \mu_2 \phi_{2,r}(x_2) \phi_{2,s}(x_2) dx_2 &= \int_0^1 k_2 \phi_{2,r}(x_2) \frac{d^4 \phi_{2,s}(x_2)}{dx_2^4} dx_2 & \text{(b)}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

式 (3.12a) の右辺について部分積分を 2 回行い、式 (3.7) ~ (3.11) までと同様の変形を行うと次式を得る。

$$\begin{aligned}
p_s^2 \int_0^1 \mu_1 \phi_{1,r}(x_1) \phi_{1,s}(x_1) dx_1 &= \int_0^1 k_1 \frac{d^2 \phi_{1,r}(x_1)}{dx_1^2} \frac{d^2 \phi_{1,s}(x_1)}{dx_1^2} dx_1 \\
&+ \sum_{j=1}^N K_j \psi_{1-j,r}(a_j) \{ \psi_{1-j,s}(a_j) - \psi_{2-j,s}(a_j) \}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

式 (3.11), (3.13) の辺々を引き算すると、次式を得る。

$$(p_r^2 - p_s^2) \int_0^1 \mu_1 \phi_{1,r}(x_1) \phi_{1,s}(x_1) dx_1 = \sum_{j=1}^N K_j \{ \psi_{1-j,r}(a_j) \psi_{2-j,s}(a_j) - \psi_{1-j,s}(a_j) \psi_{2-j,r}(a_j) \} \tag{3.14}$$

一方、はり 2 については、式 (3.6b), (3.12b) を用いて、式 (3.6a) ~ (3.14) と同様の変形を行うと、次式を得る。

$$(p_r^2 - p_s^2) \int_0^1 \mu_2 \phi_{2,r}(x_2) \phi_{2,s}(x_2) dx_2 = - \sum_{j=1}^N K_j \{ \psi_{1-j,r}(a_j) \psi_{2-j,s}(a_j) - \psi_{1-j,s}(a_j) \psi_{2-j,r}(a_j) \} \quad (3.15)$$

式 (3.14) , (3.15) の辺々を足し合わせると, 次式を得る.

$$(p_r^2 - p_s^2) \left\{ \int_0^1 \mu_1 \phi_{1,r}(x_1) \phi_{1,s}(x_1) dx_1 + \int_0^1 \mu_2 \phi_{2,r}(x_2) \phi_{2,s}(x_2) dx_2 \right\} = 0 \quad (3.16)$$

式 (3.16) では $p_r \neq p_s$ であるので, 次式を得る.

$$\int_0^1 \mu_1 \phi_{1,r}(x_1) \phi_{1,s}(x_1) dx_1 + \int_0^1 \mu_2 \phi_{2,r}(x_2) \phi_{2,s}(x_2) dx_2 = 0 \quad (3.17)$$

式 (3.6a) , (3.6b) の辺々を足し合わせ, その式に式 (3.17) を代入し, $\psi_{i-j,r}(a_j) = \phi_{i,r}(a_j)$ の関係を用いると, 次式を得る.

$$\int_0^1 k_1 \phi_{1,s}(x_1) \frac{d^4 \phi_{1,r}(x_1)}{dx^4} dx_1 + \int_0^1 k_2 \phi_{2,s}(x_2) \frac{d^4 \phi_{2,r}(x_2)}{dx^4} dx_2 = 0 \quad (3.18)$$

式 (3.18) の左辺について, 式 (3.7) ~ (3.11) までと同様に部分積分を行い, 変形を行うと次式を得る.

$$\int_0^1 k_1 \frac{d^2 \phi_{1,s}(x_1)}{dx^2} \frac{d^2 \phi_{1,r}(x_1)}{dx^2} dx_1 + \int_0^1 k_2 \frac{d^2 \phi_{2,s}(x_2)}{dx^2} \frac{d^2 \phi_{2,r}(x_2)}{dx^2} dx_2 + \sum_{j=1}^N K_j \{ \phi_{1,r}(a_j) \phi_{1,s}(a_j) - \phi_{2,r}(a_j) \phi_{1,s}(a_j) + \phi_{2,r}(a_j) \phi_{2,s}(a_j) - \phi_{1,r}(a_j) \phi_{2,s}(a_j) \} = 0 \quad (3.19)$$

式 (3.17) , (3.18) および (3.19) の関係は, この系のモード関数の直交性を表す.

同じ次数 $r=s$ の場合には, 式 (3.17), (3.18) および (3.19) は成り立たず, 各式の左辺は次のような正の値 $\bar{\mu}_r, \bar{k}_r$ をとる.

$$\left. \begin{aligned}
& \int_0^1 \mu_1 \phi_{1,r}^2(x_1) dx_1 + \int_0^1 \mu_2 \phi_{2,r}^2(x_2) dx_2 = \bar{\mu}_r \quad (a) \\
& \int_0^1 k_1 \phi_{1,r}(x_1) \frac{d^4 \phi_{1,r}(x_1)}{dx^4} dx_1 + \int_0^1 k_2 \phi_{2,r}(x_2) \frac{d^4 \phi_{2,r}(x_2)}{dx^4} dx_2 \\
& = \int_0^1 k_1 \left(\frac{d^2 \phi_{1,r}(x_1)}{dx^2} \right)^2 dx_1 + \int_0^1 k_2 \left(\frac{d^2 \phi_{2,r}(x_2)}{dx^2} \right)^2 dx_2 + \sum_{j=1}^N K_j \{ \phi_{1,r}(a_j) - \phi_{2,r}(a_j) \}^2 = \bar{k}_r \quad (b)
\end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

式 (3.6a), (3.6b) の辺々を足し合わせ, その式に式 (3.20) を用いると, $\bar{k}_r = \bar{\mu}_r p_r^2$ の関係を得る.

3.2.3 強制振動

本節では, モード解析を用いて, はり 1 とはり 2 の強制振動解を求める. 式 (3.3) のモード関数を用いて, 式 (3.2a), (3.2b) の強制振動解をそれぞれ次式のように仮定する.

$$w_i(x_i, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \phi_{i,s}(x_i) q_s(t) \quad (i=1,2) \quad (3.21)$$

ここに, $q_s(t)$ は, 各はりの s 次の振動モードに対する時間の未知関数であり, モード関数 $\phi_{i,s}(x_i)$ ははり 1 とはり 2 の最大振幅で正規化されている. ただし, ばねとダッシュポットで構成される連結要素に減衰が存在する場合, はり 1 とはり 2 には位相差が生じるため, 実際のはりのモード形状は, 式 (3.3) で与えられるモード関数からずれると考えられる. 本章では, その減衰が十分小さいと仮定し, 式 (3.21) のように, はり 1 とはり 2 の位相差は無視できると仮定した (付録 C にはり 1 とはり 2 をそれぞれ質点と考え, 質点間のダッシュポットの減衰係数が位相遅れに与える影響を 2 質点モデルにより調べている). また, 式 (3.5) で $K_j=0$ とした理由と同様に, $K_j=0$ とした式 (3.2) に式 (3.21) を代入すると, 次式となる.

$$\left. \begin{aligned}
& \sum_{s=1}^{\infty} \mu_1 \phi_{1,s}(x_1) \ddot{q}_s(t) + \sum_{s=1}^{\infty} c_1 \phi_{1,s}(x_1) \dot{q}_s(t) + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N C_j \dot{q}_s(t) \{ \phi_{1,s}(x_1) - \phi_{2,s}(x_1) \} \delta(x_1 - a_j) \\
& + \sum_{s=1}^{\infty} k_1 \frac{d^4 \phi_{1,s}(x_1)}{dx_1^4} q_s(t) = F_0 \delta(x_1 - d) \cos \omega t \quad \text{(a)} \\
& \sum_{s=1}^{\infty} \mu_2 \phi_{2,s}(x_2) \ddot{q}_s(t) + \sum_{s=1}^{\infty} c_2 \phi_{2,s}(x_2) \dot{q}_s(t) + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N C_j \dot{q}_s(t) \{ \phi_{2,s}(x_2) - \phi_{1,s}(x_2) \} \delta(x_2 - a_j) \\
& + \sum_{s=1}^{\infty} k_2 \frac{d^4 \phi_{2,s}(x_2)}{dx_2^4} q_s(t) = 0 \quad \text{(b)}
\end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

ここに、式 (3.22a) 中の $\phi_{2,s}(x_1)$ は、本来は $\phi_{2,s}(x_2)$ であるが、連結要素の取付位置ははり 1 とはり 2 で同じであるので、 $\phi_{2,s}(x_1)$ とした。式 (3.22b) において、 $\phi_{1,s}(x_1)$ を $\phi_{1,s}(x_2)$ としているのも同様の理由である。式 (3.22a), (3.22b) にそれぞれ $\phi_{1,r}(x_1)$, $\phi_{2,r}(x_2)$ を掛け、それぞれ x_1, x_2 について 0 から 1 まで積分して、両式を足し合わせ、モード関数の直交性を用いると、次のモード方程式を得る。ここでは、減衰項についても直交性が成り立つと仮定した。

$$\bar{\mu}_r \ddot{q}_r(t) + \bar{c}_r \dot{q}_r(t) + \bar{k}_r q_r(t) = \bar{F}_r \cos \omega t \quad (r=1, 2, 3, \dots) \quad (3.23)$$

ここに、 $\bar{\mu}_r$ と \bar{k}_r は式 (3.20) で与えられ、 \bar{c}_r と \bar{F}_r は次の通りである。

$$\left. \begin{aligned}
\bar{c}_r &= \int_0^1 c_1 \phi_{1,r}^2(x_1) dx_1 + \int_0^1 c_2 \phi_{2,r}^2(x_2) dx_2 + \sum_{j=1}^N C_j \{ \phi_{1,r}(a_j) - \phi_{2,r}(a_j) \}^2 \quad \text{(a)} \\
\bar{F}_r &= \int_0^1 F_0 \phi_{1,r}(x_1) \delta(x_1 - d) dx_1 = F_0 \phi_{1,r}(d) \quad \text{(b)}
\end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

式 (3.23) の強制振動解は、次式となる。

$$\begin{aligned}
q_r(t) &= A_r \cos(\omega t + \alpha_r), & (a) \\
A_r &= \frac{\bar{F}_r}{\sqrt{(\bar{k}_r - \bar{\mu}_r \omega^2)^2 + (\bar{c}_r \omega)^2}}, & (b) \\
\alpha_r &= -\tan^{-1} \left(\frac{\bar{c}_r \omega}{\bar{k}_r - \bar{\mu}_r \omega^2} \right) & (c)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

式 (3.25) を式 (3.21) に代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned}
w_i(x_i, t) &= \sum_{r=1}^{\infty} A_r \phi_{i,r}(x_i) \cos(\omega t + \alpha_r) = B_i(x_i) \cos\{\omega t + \theta_i(x_i)\}, & (a) \\
B_i(x_i) &= \sqrt{\left\{ \sum_{r=1}^{\infty} A_r \phi_{i,r}(x_i) \cos \alpha_r \right\}^2 + \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} A_r \phi_{i,r}(x_i) \sin \alpha_r \right\}^2}, & (b) \\
\theta_i(x_i) &= -\tan^{-1} \left\{ \frac{\sum_{r=1}^{\infty} A_r \phi_{i,r}(x_i) \sin \alpha_r}{\sum_{r=1}^{\infty} A_r \phi_{i,r}(x_i) \cos \alpha_r} \right\} & (c)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

以上の理論解析により、2本のはりが複数のばねで離散的に連結された系についてモード関数の直交性が成立する条件を求め、モード方程式を誘導し、強制振動解を求めることができた。

3.3 数値計算結果

本節では、連結要素が1組の場合をケースA、2組の場合をケースBと呼び、各場合について強制振動の数値計算結果を示す。

3.3.1 連結要素が1組の場合（ケースA）

2本のはりの断面形状と材質が同じ場合について、系の固有角振動数を小さい順に対応させた1次から6次までの振動モードを図3.2に示す [図2.4参照]。モード形状は、はり1とはり2の最大振幅で正規化されている。パラメータの値は、 $\mu_i=100$, $k_2=1$, $K_1=300$, $a_1=0.4$ である。図3.2において、1次、3次、および5次の振動モードでは、はり1とはり2は同振幅、かつ同位相で振動する。すなわち、はりの振動中に連結ばねは伸縮しないため、これらの固有角振動数は連結ばねのばね定数 K_1 に依存しない。一方、2次、4次、および6次の振動モードでは、は

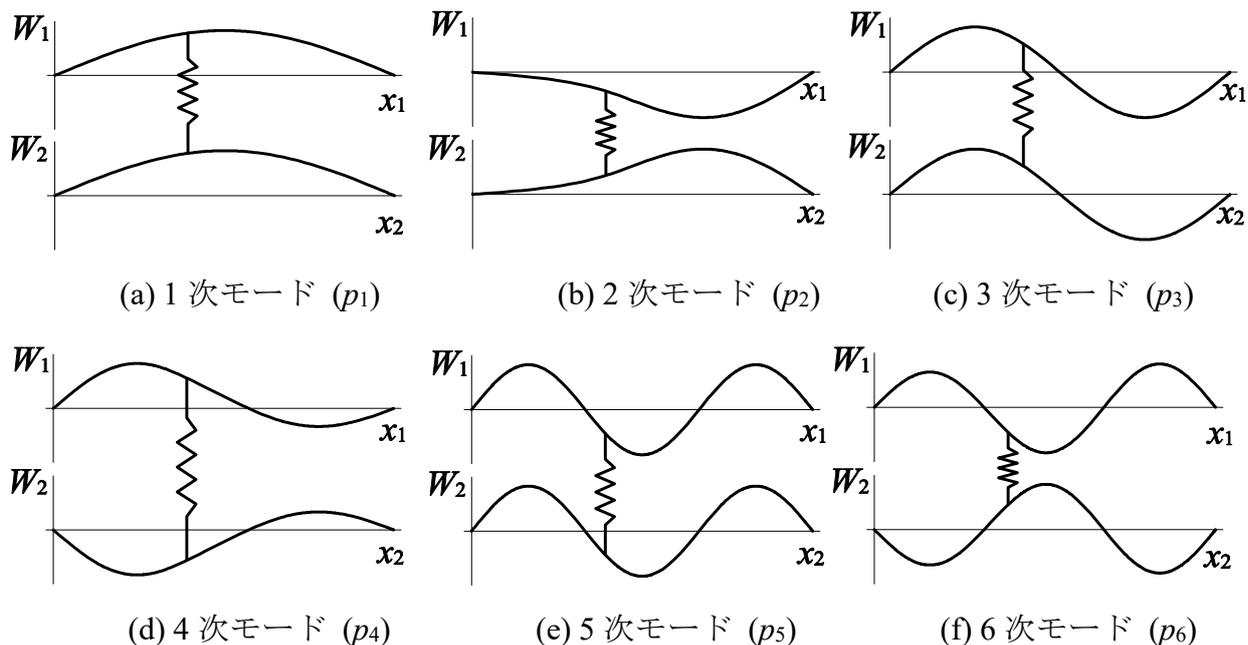


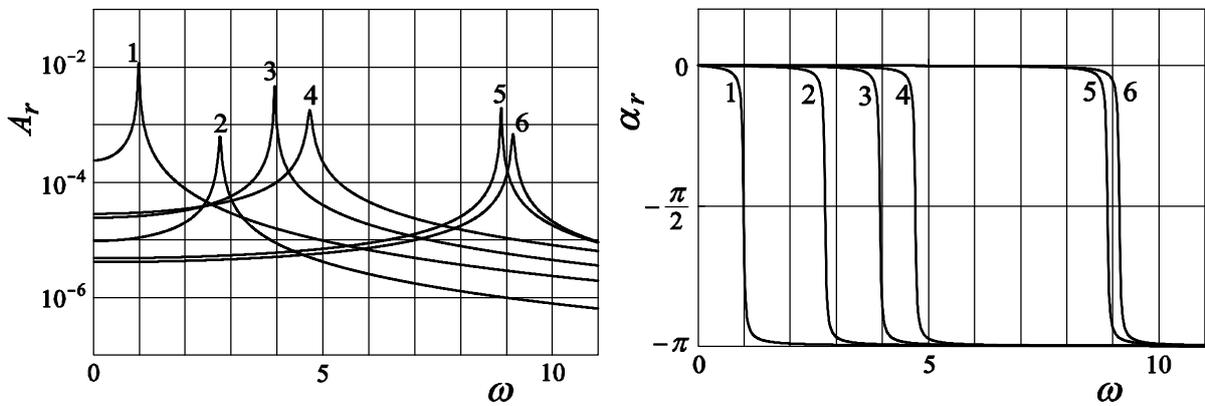
図 3.2 $K_1=300$ の場合の 1 次から 6 次までの振動モード ($\mu_i=100, k_2=1, a_1=0.4$)

り 1 とはり 2 は逆位相で振動するため、はりの振動中に連結ばねは伸縮し、その結果、 K_1 の値が大きくなるにつれ、これらの固有角振動数は増加する [図 2.3 参照].

図 3.3 (a), (b) は、式 (3.25) により求めた 1 から 6 次までの振動モードの強制振動の、励振振動数 ω に対する、それぞれ振幅 A_r と位相遅れ α_r を示す。ただし、パラメータの値は、図 3.2 の場合に加え、 $c=2, C_1=2, F_0=0.04, d=0.2$ である。図中に、系の 1 次から 6 次までの固有角振動数に対する共振ピークを 1 から 6 の番号で示している。この場合の固有角振動数は、 $p_1=0.987, p_2=2.76, p_3=3.95, p_4=4.71, p_5=8.88, p_6=9.14$ である。このとき式 (3.20), (3.24) より求めたモーダルパラメータを表 3.1 に示す。なお、式 (3.20b) および $\bar{k}_r = \bar{\mu}_r p_r^2$ から計算されるそれぞれの \bar{k}_r の値も同表に示すが、一致することを確認している。式 (3.25b) から分かるように、固有角振動数が高い振動モードほどその共振ピークは小さくなる。このため、図 3.3 に示すように、1 次、3 次、5 次モードの順に共振ピークは小さくなる。また、これらの奇数次モードでは、はり 1 とはり 2 が同位相で振動するため、ダッシュポットの減衰の影響を受けない。一方、2 次、4 次および 6 次モードでは、はり 1 とはり 2 が逆位相で振動するため、ダッシュポットの影響を受ける。このため、2 次モードの共振ピークは 1 次、3 次モードの共振ピークより小さい。また、2 次モードの共振ピークが 6 次モードの共振ピークと同程度に小さい振幅であるのは、式 (3.24b) で求められる 2 次、および 6 次のモード外力の振幅 \bar{F}_r が、それぞれ $-0.00520, 0.0292$ であり、 \bar{F}_2 の絶対値が小さいためである。図 3.3 (b) の位

表 3.1 モーダルパラメータ (連結要素が 1 組の場合)

r	p_r	$\bar{\mu}_r$	$\bar{\mu}_r p_r^2$	\bar{k}_r	\bar{c}_r	\bar{F}_r
1	0.99	100.0	97.4	97.4	2.00	0.024
2	2.76	71.2	541.3	541.3	2.94	-0.005
3	3.95	100.0	1558.6	1558.6	2.00	0.038
4	4.71	60.4	1340.9	1340.9	4.57	0.038
5	8.88	100.0	7890.1	7890.1	2.00	0.038
6	9.14	84.6	7067.7	7067.7	4.61	0.029



(a) 振幅応答曲線

(b) 位相応答曲線

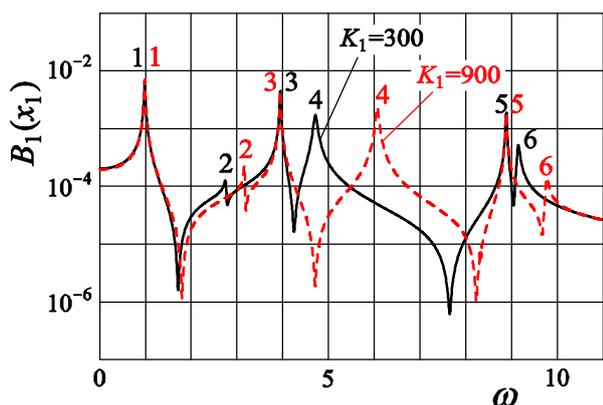
図 3.3 1 次から 6 次までの振動モードに対する応答曲線 (振幅 A_r と位相遅れ α_r)

($\mu_i=100, k_2=1, c_i=2, K_1=300, C_1=2, a_1=0.4, F_0=0.04, d=0.2$)

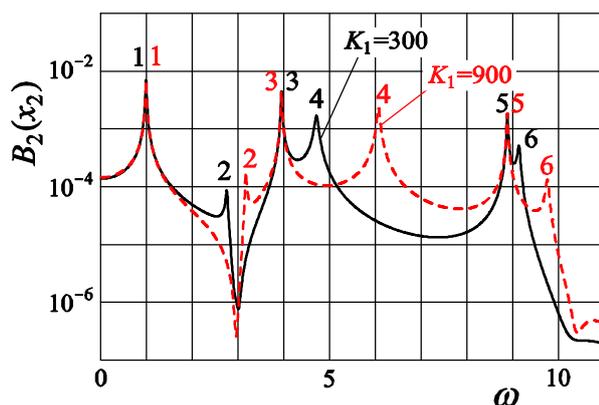
相応答曲線では、励振振動数が大きくなるにつれて、各モードの共振点付近で位相遅れは $-\pi/2$ となり、その後、位相遅れは $-\pi$ に漸近していくことが分かる。

図 3.4 (a), (b) は、 $K_1=300$ および 900 の 2 通りの場合、それぞれ式 (3.26) により求めたはり 1 とはり 2 の測定点 $x_i=0.2$ における振幅応答曲線を示し、図 3.4 (c), (d) は対応する位相応答曲線を示す。それぞれの縦軸は、1 次から 6 次モードを合成した振幅 $B_i(x_i)$ と位相遅れ $\theta_i(x_i)$ を表す。他のパラメータの値は、図 3.3 の場合と同じである。振幅応答曲線には、1 次から 6 次モードに対応する共振ピークが現れ、その振幅は、はり 1 とはり 2 でほぼ等しいことが分かる。ただし、はり 1 の振幅応答曲線では、共振ピーク間に反共振点が現れている。また、 $K_1=900$ の場合の振幅応答曲線の 2 次、4 次および 6 次の偶数次モードの共振ピークは、 $K_1=300$ の場合に比べ、固有角振動数が大きいいため、右側に移動している。それに

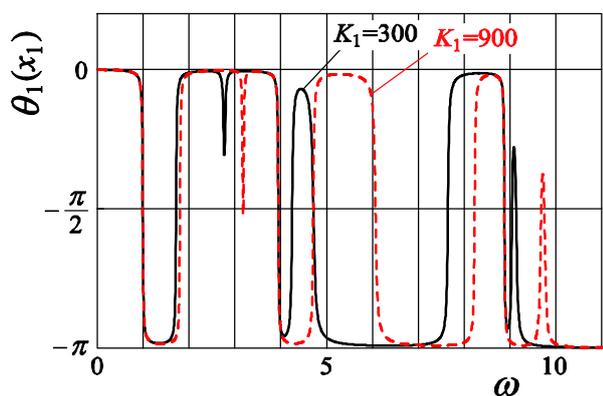
対して、1次、3次および5次の奇数次モードの固有角振動数は K_1 の値に関わらず変化しないため、それらの共振ピークは移動せず、その大きさはほぼ同じである。図3.4(c)に示すはり1の位相応答曲線では、図3.3(b)と同様に、共振点の前後で位相遅れは、0から $-\pi$ に変化する。1次から6次まで合成された位相遅れは、隣り合う共振ピーク間に反共振点をもち、その前後で、位相遅れは $-\pi$ から0に戻る。図3.4(d)に示すはり2の位相応答曲線では、はり1とはり2が同位相の1次、3次、および5次モードの共振点付近において、はり1の位相遅れと同じように0から $-\pi$ に変化し、はり1とはり2が逆位相となる2次、4次、および6次モードの共振点付近では、はり1と逆向きに位相遅れは $-\pi$ から0に変化する。さらに、2次モードと3次モードの間に現れる反共振点付近においては、はり1とは異なり位相遅れは複雑に変化するが、 ω が3次モードの固有角振動数に近づくにつれ3次モードが優勢に現れるため、位相遅れははり1と同じように変化する。



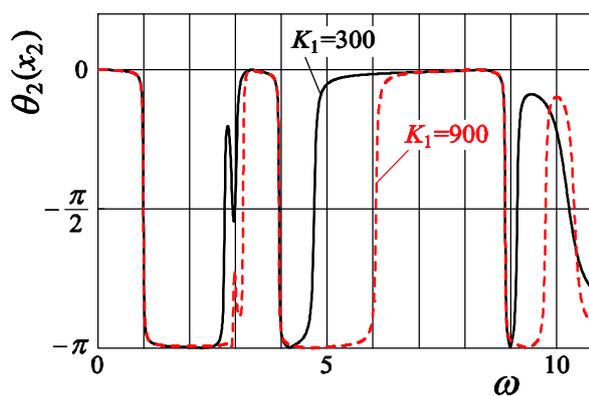
(a) はり1の振幅応答曲線 ($x_1=0.2$)



(b) はり2の振幅応答曲線 ($x_2=0.2$)



(c) はり1の位相応答曲線 ($x_1=0.2$)



(d) はり2の位相応答曲線 ($x_2=0.2$)

図3.4 $K_1=300$ と $K_1=900$ の場合のはり1, はり2のたわみに対する応答曲線 ($\mu_i=100, k_2=1, c_i=2, C_1=2, a_1=0.4, F_0=0.04, d=0.2$)

図 3.5 は、はり 1 とはり 2 を結ぶダッシュポットの減衰係数 C_1 が $C_1=0$ および 5 の場合の応答曲線を示す。他のパラメータの値は、図 3.4 の $K_1=300$ の場合と同じである。図 3.5 (a), (b) に示す振幅応答曲線より、各はりが逆位相で振動する偶数次モードでは減衰の影響が大きく、特に $C_1=5$ の場合の 4 次モードの振動が大きく抑制されていることが分かる。一方、各はりが同位相で振動する奇数次モードはダッシュポットの減衰の影響を受けないため、共振ピークの大きさは $C_1=0$ と $C_1=5$ の場合で同じである。図 3.5 (c), (d) に示す位相応答曲線では、 $C_1=5$ の場合は減衰の影響を受けるため、偶数次モードの共振点の前後で、位相遅れの変化が緩やかになっている。

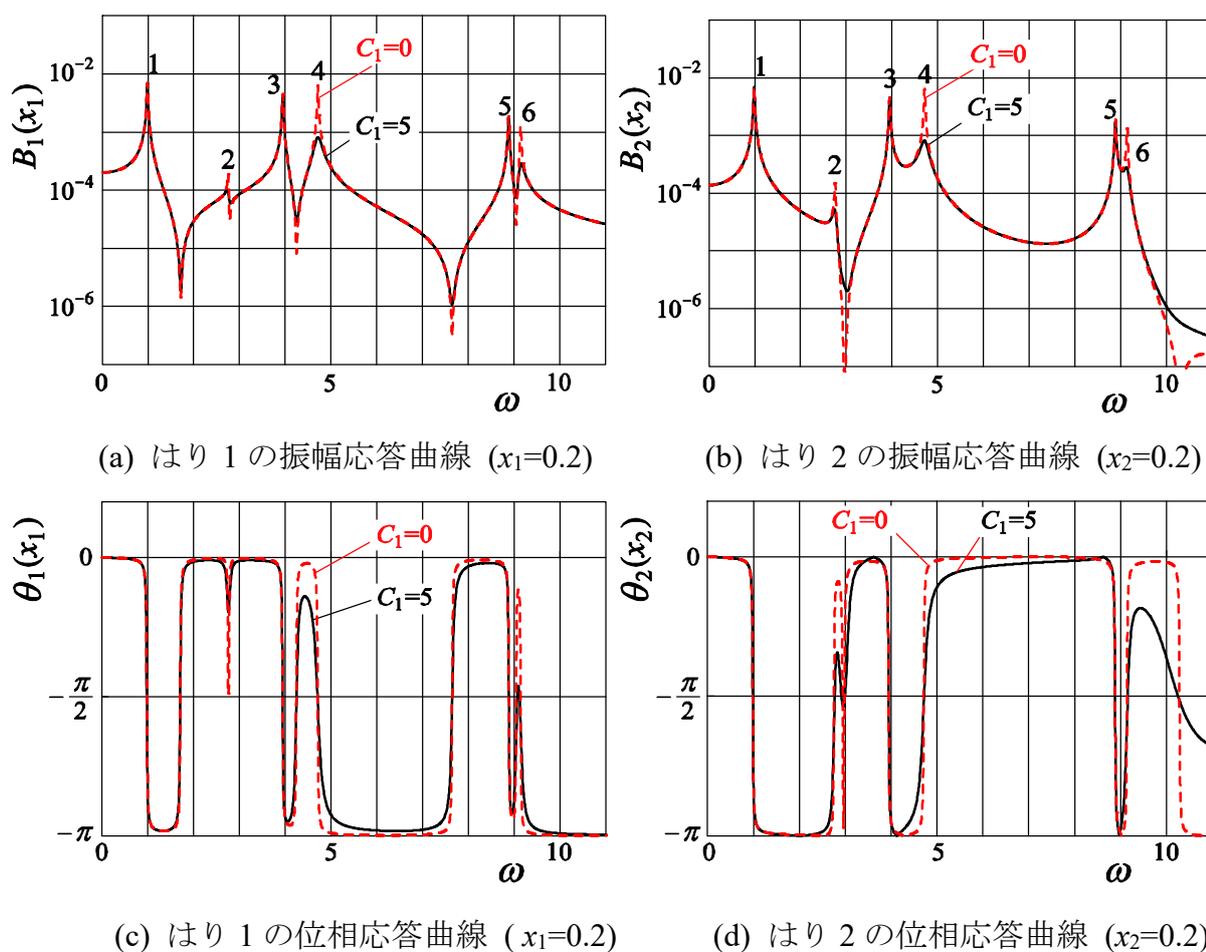


図 3.5 $C_1=0$ と $C_1=5$ の場合のはり 1, はり 2 のたわみに対する応答曲線
 $(\mu=100, k_2=1, c_i=2, K=300, a_1=0.4, F_0=0.04, d=0.2)$

図 3.6 は、はり 1 とはり 2 の断面形状が異なる場合の 1 次から 6 次までの振動モードを示す。図 3.4 の $K_1=300$ の場合から、はり 1 の厚さを、はり 2 の 0.2 倍とした。このとき、パラメータの値は、 $\mu_1=20$, $\mu_2=100$, $k_2=125$, $K_1=300$, $a_1=0.4$ である。はり 1 の剛性が小さくなり、はり 1 単体の固有角振動数が小さくなるため、はり 1 単体の高次モードと、はり 2 単体の低次モードが組み合わされた振動モード形状となっている。図 3.2 と比較すると、はり 1 とはり 2 が同材質で同形状の場合の振動モードと大きく異なっていることが分かる。

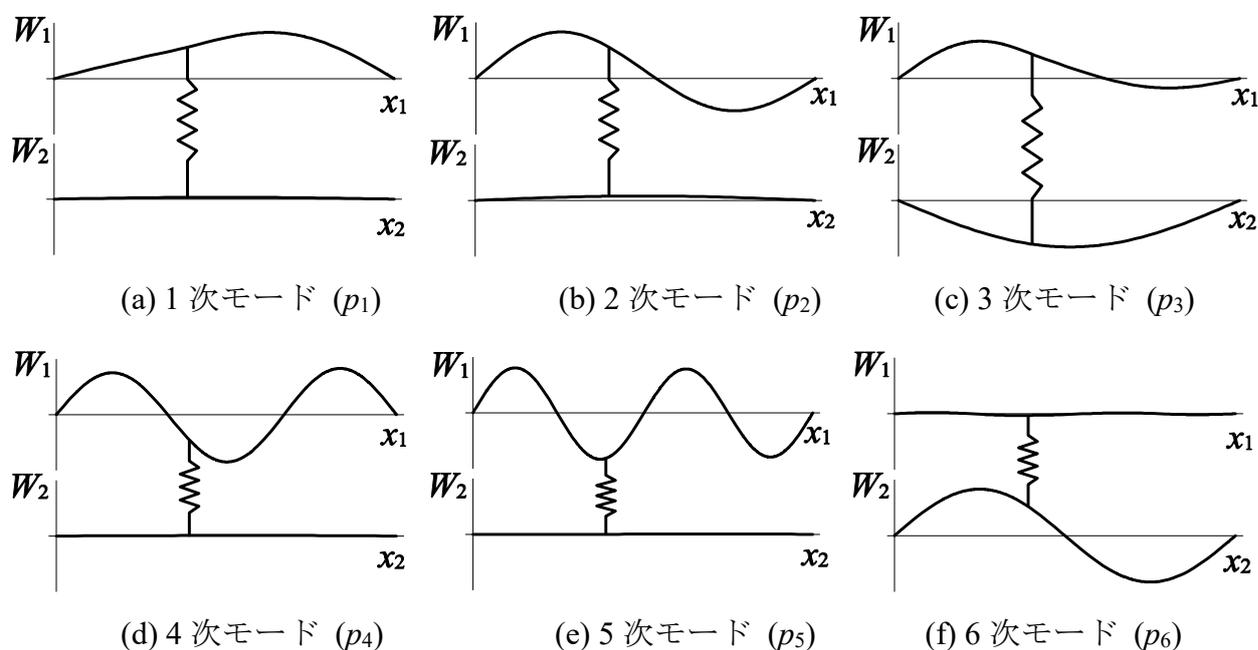
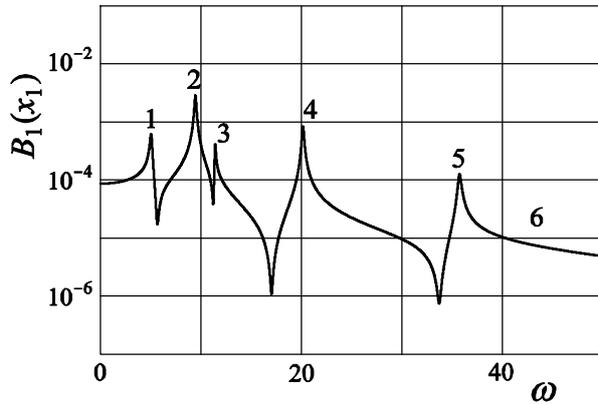
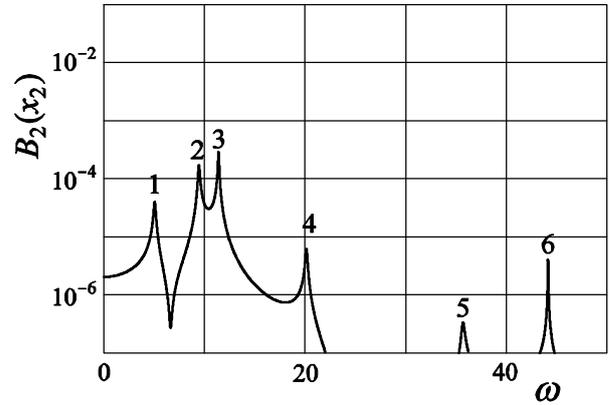


図 3.6 はり 1 とはり 2 の断面形状が異なる場合の 1 次から 6 次までの振動モード ($\mu_1=20$, $\mu_2=100$, $k_2=125$, $K_1=300$, $a_1=0.4$)

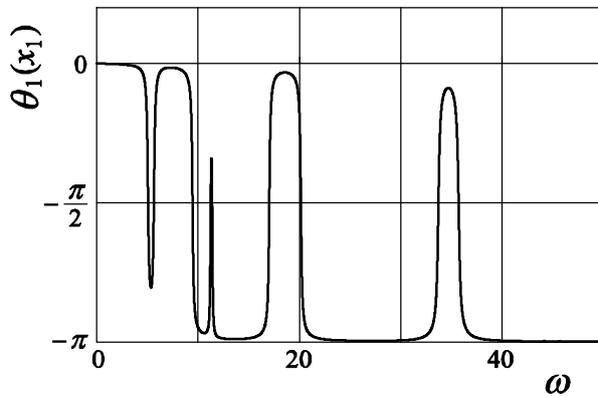
図 3.7 は、はり 1 とはり 2 の断面形状が異なる場合の測定点 $x_i=0.2$ における強制振動の応答曲線を示す。ただし、パラメータの値は、図 3.6 の場合に加え、 $c_i=2$ 、 $C_1=2$ 、 $F_0=0.04$ 、 $d=0.2$ である。図 3.7 (a) の振幅応答曲線に、1 次から 5 次モードに対応する共振ピークが見られる。図 3.7 (a)、(b) より、3 次と 6 次モードを除くと、はり 2 の振幅は、はり 1 に比べ、非常に小さいことが分かる。この理由は、図 3.6 に示した振動モード形状より、1 次、2 次、4 次、および 5 次モードでは、はり 1 が大きく振動するのに対し、はり 2 はほとんど振動しないためである。はり 1 とはり 2 が同材質で同形状の場合に比べ、はり 1 の 2 次モードの共振ピークが大きくなっている（共振ピーク値は 0.00283）。この理由は、モード形状の変化により、1 次のモード外力の振幅 $\bar{F}_1=0.01546$ に比べ、2 次のモード外力の振幅 $\bar{F}_2=0.0380$ が大きいためである。従って、はり 1 とはり 2 の断面を異なる形状にすることにより、強制外力を受けるはりに比べ、他方のはりの振動を小さくできる可能性がある。図 3.7 (c) に示すはり 1 の位相応答曲線は、図 3.4 (c) と同様に、隣り合う共振ピークの間には反共振点をもち、その点の前後で、位相遅れは、 $-\pi$ から 0 に変化する。一方、図 3.7 (d) に示すはり 2 の位相応答曲線は、図 3.4 (d) と同様に複雑に変化する。



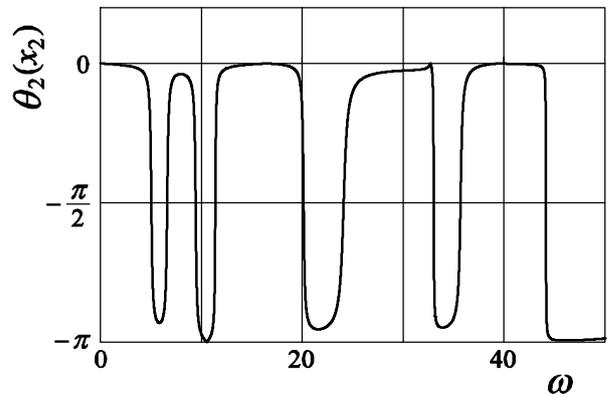
(a) はり 1 の振幅応答曲線 ($x_1=0.2$)



(b) はり 2 の振幅応答曲線 ($x_2=0.2$)



(c) はり 1 の位相応答曲線 ($x_1=0.2$)



(d) はり 2 の位相応答曲線 ($x_2=0.2$)

図 3.7 はり 1, はり 2 の断面形状が異なる場合のはり 1, はり 2 のたわみに対する応答曲線 ($\mu_1=20, \mu_2=100, k_2=125, c_i=2, K_1=300, C_1=2, a_1=0.4, F_0=0.04, d=0.2$)

3.3.2 連結要素が 2 組の場合 (ケース B)

図 3.8 は、ばねの取付本数を図 3.2 の場合から 2 本に増やした場合の振動モードを示す。はり 1 とはり 2 は同材質で同形状であり、パラメータの値は、 $\mu_i=100$, $k_2=1$ であり、ばねの取付位置は、一方は図 3.2 と同じく $a_1=0.4$ とし、2 本目の取付位置を 1 本目のばねと左右対称な位置 $a_2=0.6$ とした。また、連結ばねのばね定数 K_j を図 3.2 の $K_1=300$ の場合に対し、それぞれのばね定数を K_1 の半分の値 $K_j=150$ とした。図 3.8 のモード形状は図 3.2 の場合と異なるものの、ばねが 1 本の場合と同様な振動モードを示し、1 次、3 次、および 5 次の奇数次モードでは、はり 1 とはり 2 は同振幅かつ同位相であるため、連結ばねは伸縮しない。一方、2 次、4

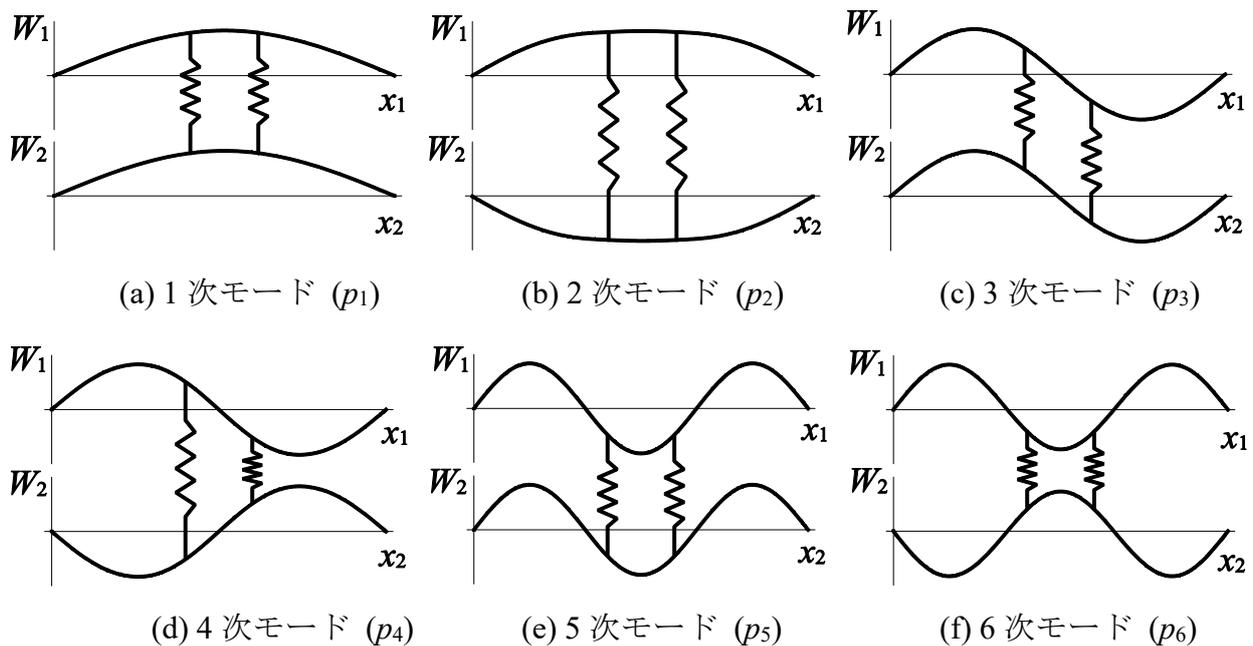


図 3.8 連結ばねが 2 本の場合 ($K_j=150$) の 1 次から 6 次までの振動モード
 ($\mu_i=100, k_2=125, K_1=300, a_1=0.4$)

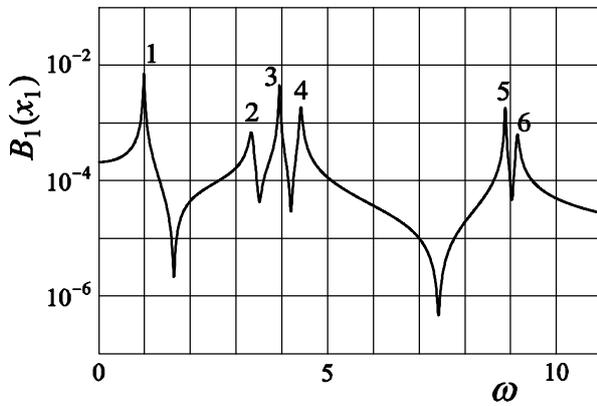
次および 6 次の偶数次モードでは、はり 1 とはり 2 は逆位相で振動するため、連結ばねは伸縮する。

図 3.9 は、連結要素が 2 組の場合の応答曲線を示す。パラメータの値は、図 3.8 の場合に加え、はりの減衰係数、ダッシュポットの減衰係数、加振力、加振点および振動の測定点は図 3.4 の場合と同じ $c_i=2, C_j=1, F_0=0.04, d=0.2$ である。ただし、連結要素が 2 組であるため、連結ばねのばね定数と同様にダッシュポットの減衰係数は図 3.3 の連結要素が一組の場合の半分の値とした。このときの固有角振動数 p_r とモーダルパラメータを表 3.2 に示す。表 3.1 と同様に式 (3.20b) および $\bar{k}_r = \bar{\mu} p_r^2$ から計算されるそれぞれの \bar{k}_r が、一致することを確認している。図 3.9

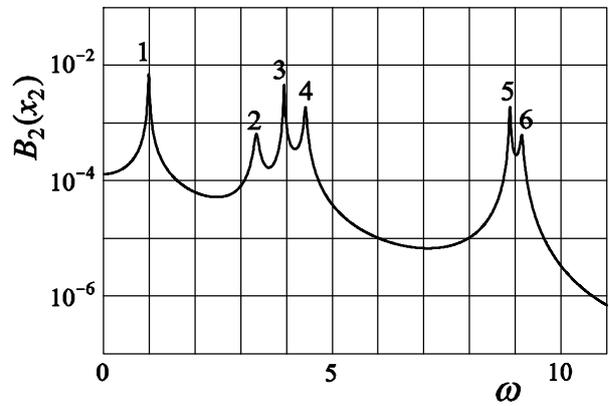
(a), (b) に示す振幅応答曲線では、図 3.4 と比較して、2 次の共振ピークが大きくなっている。この理由は、はり 1 とはり 2 を結ぶ連結要素が 2 組に増えたことによりモード形状が変化し、2 次のモード外力の振幅が $\bar{F}_2 = -0.00520$ から 0.0297 に大きくなったためである。図 3.9 (c), (d) に、それぞれはり 1 とはり 2 の位相応答曲線を示す。図 3.9 (a) における 2 次の共振ピークが図 3.4 (a) の場合よりも大きくなったため、図 3.9 (c) のはり 1 の位相応答曲線では、図 3.4 (c) に示した連結要素が 1 組の場合に比べて、2 次の共振ピーク付近における位相遅れの変化が明確に現れている。

表 3.2 モーダルパラメータ (連結要素が 2 組の場合)

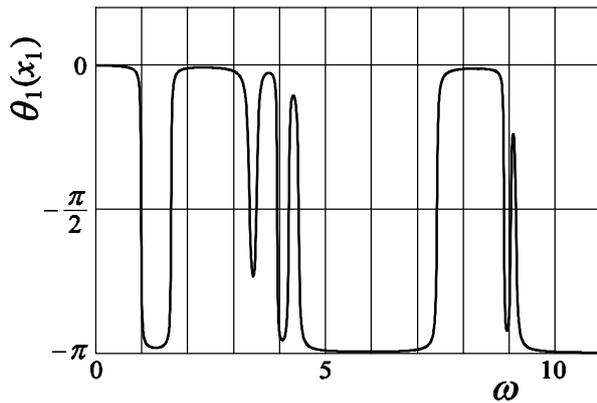
r	p_r	$\bar{\mu}_r$	$\bar{\mu}_r p_r^2$	\bar{k}_r	\bar{c}_r	\bar{F}_r
1	0.99	100.0	97.4	97.4	2.00	0.024
2	3.34	121.2	1352.6	1352.6	10.08	0.030
3	3.95	100.0	1558.4	1558.4	2.00	0.038
4	4.42	98.8	1927.9	1927.9	4.42	0.039
5	8.88	100.0	7887.6	7887.7	2.00	0.038
6	9.15	83.8	7012.6	7012.6	4.69	0.033



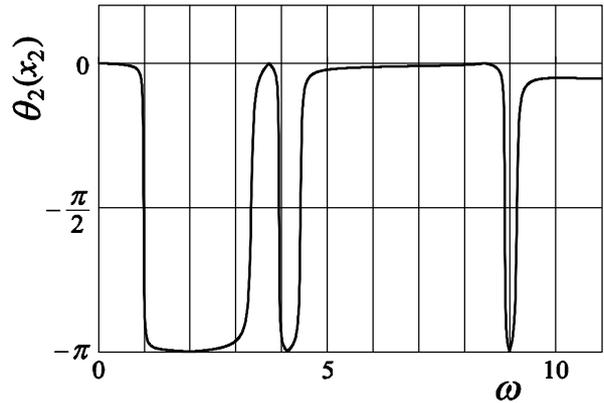
(a) はり 1 の振幅応答曲線 ($x_1=0.2$)



(b) はり 2 の振幅応答曲線 ($x_2=0.2$)



(c) はり 1 の位相応答曲線 ($x_1=0.2$)



(d) はり 2 の位相応答曲線 ($x_2=0.2$)

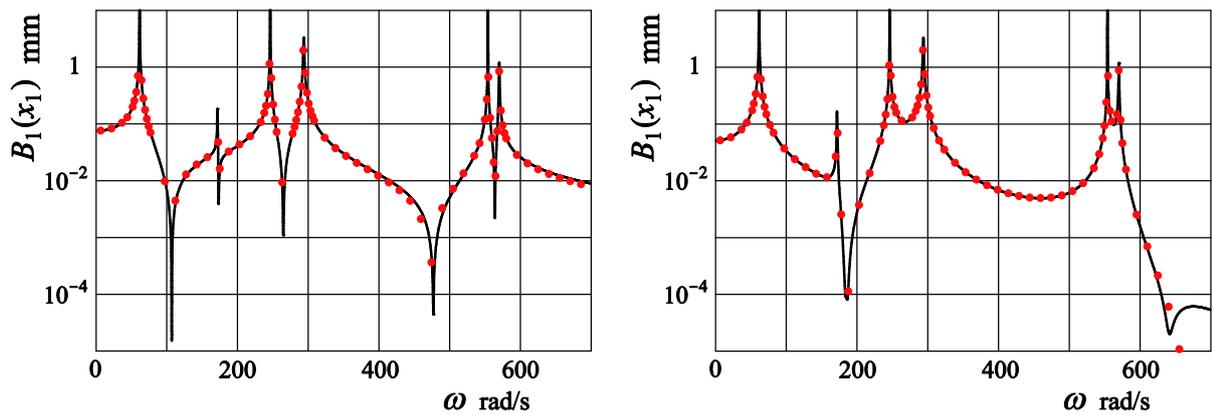
図 3.9 連結要素が 2 組の場合のはり 1, はり 2 のたわみに対する応答曲線

($\mu_i=100, k_2=1, c_i=2, K_j=150, C_j=1, a_1=0.4, a_2=0.6, F_0=0.04, d=0.2$)

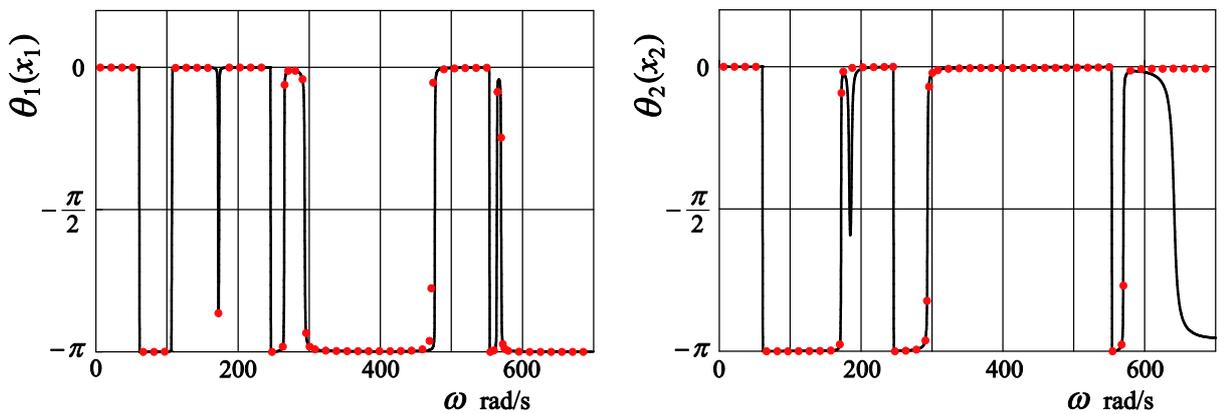
3.4 有限要素法解析による検証

3.2.3 節で述べたように、本理論解析では減衰が十分小さいとし、式 (3.21) のように、はり 1 とはり 2 の位相差は無視できると仮定した。本節では、その仮定の妥当性を検証するため、ケース A とケース B についての強制振動を有限要素法 (FEM) により数値計算する。

図 3.10 は、連結要素が 1 組の場合 (ケース A) における理論解析と FEM 解析による応答曲線の比較を示す。図中の実線は理論解析による結果、●印は FEM 解析結果を表す。パラメータの値は、はりの長さ $l=4$ m, 幅 $b_i=0.3$ m, 厚さ $h_i=0.07$ m, 密度 $\rho_i=410$ kg/m³, ヤング率 $E_i=10^{10}$ N/m², 連結要素のばね定数 $K_1=4\times 10^5$ N/m, 減衰係数 $C_1=10$ N·s/m, ばねの取付位置 $a_1=1.6$ m, 励振振幅 $F_0=20$ N, 加振位置 $d=0.8$ m, 振動測定点 $x_i=0.8$ m である。これらの有次元量に対応する無次元量の値は、 $\mu_i=97.4$, $k_2=1$, $K_1=299$, $C_1=0.460$, $a_1=0.4$, $F_0=0.00373$, $d=0.2$, $x_i=0.2$ であ



(a) はり 1 の振幅応答曲線 ($x_1=0.8$ m) (b) はり 2 の振幅応答曲線 ($x_2=0.8$ m)



(c) はり 1 の位相応答曲線 ($x_1=0.8$ m) (d) はり 2 の位相応答曲線 ($x_2=0.8$ m)

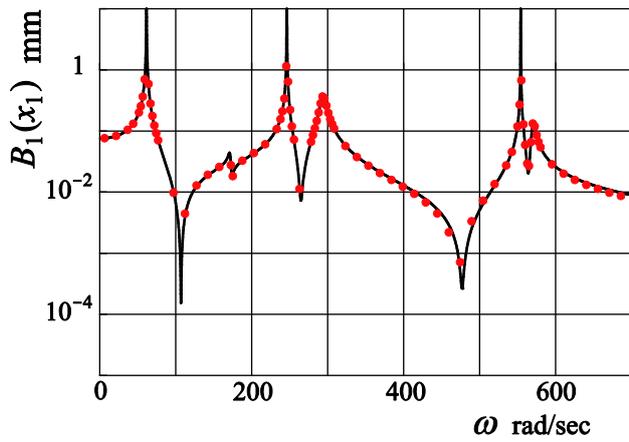
図 3.10 連結要素が 1 組の場合の理論解析 (実線) と FEM 解析 (シンボル) により求めた応答曲線の比較(ケース A: $C_1=10$ N·s/m)

る。FEM 解析では汎用構造解析ソフトウェア MSC.Marc を用い、1 本のはりをそれぞれ 30 要素に分割したモデルを使用した。FEM 解析については理論解析と同じ構造減衰を設定できなかつたため、はりの減衰係数を $c_i=0$ とした。要素には 2 次元はり要素を用い、はり両端の単純支持条件ははりの軸方向とたわみ方向の変位を拘束することにより実現した (FEM 解析モデルの詳細は付録 B 参照)。図 3.10 (a), (b) は、それぞれはり 1 とはり 2 の強制振動の応答振幅 $B_1(x_1)$, $B_2(x_2)$ を示す。理論解析によって計算された系の固有角振動数は、 $p_1=61.6$ rad/s, $p_2=172$ rad/s, $p_3=246$ rad/s, $p_4=294$ rad/s, $p_5=554$ rad/s, $p_6=570$ rad/s である。実線は●印とよく一致しており、減衰係数 C_1 の値が比較的小さい場合には、本理論解析結果は妥当であることが分かる。図 3.10 (d) の位相応答曲線について、励振振動数が 180 rad/s 付近および 600 rad/s 以上において理論解析と FEM 解析結果に差が見られるが、その差が生じている励振振動数付近のはり 2 の振幅は、図 3.10 (b) で非常に小さい。このことから、位相遅れを求める式 (3.26c) の分子と分母がいずれも小さいため、丸め誤差が生じている可能性がある。また、本理論解析では、はり 1 とはり 2 の位相差は無視できると仮定しているが、実際には位相差が生じるため、理論解析により得られたモード関数からのずれが影響している可能性もある。

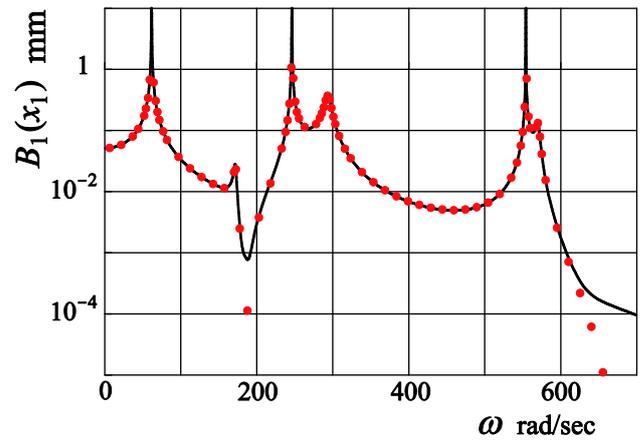
図 3.11 に、図 3.10 の場合の減衰係数を 10 倍とした $C_1=100$ N·s/m のときの理論解析と FEM 解析による応答曲線の比較を示す。応答振幅と位相応答曲線ともに、図 3.10 に比べ、理論解析結果と FEM 解析結果との差が大きくなり、減衰の影響が無視できなくなってきたことが分かる。

図 3.12 は、連結要素が 2 組の場合 (ケース B) における理論解析と FEM 解析による応答曲線の比較を示す。パラメータの値は、ばね定数 $K_j=2 \times 10^5$ N/m, 減衰係数 $C_j=5$ N·s/m, ばねの取付位置 $a_1=1.6$ m, および $a_2=2.4$ m, 励振振幅 $F_0=20$ N, 励振位置 $d=0.8$ m, 振動測定点 $x_i=0.8$ m であり、これらの有次元量に対応する無次元量の値は、 $\mu_i=97.4$, $k_2=1$, $K_j=149$, $C_j=0.230$, $a_1=0.4$, $a_2=0.6$, $F_0=0.00373$, $d=0.2$, $x_i=0.2$ である。実線は●印とよく一致しており、本理論解析結果は妥当であることが分かる。

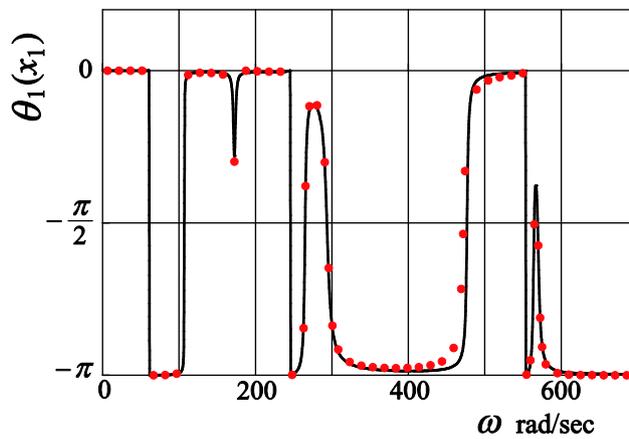
ケース A の連結要素が 1 組の場合と同様に、図 3.13 に、図 3.12 の場合の減衰係数を 10 倍とした $C_j=50$ N·s/m のときの理論解析と FEM 解析による応答曲線の比較を示す。連結要素が 1 組の場合に比べ、理論解析結果と FEM 解析結果との差が小さいが、減衰の影響が大きくなる傾向にある。



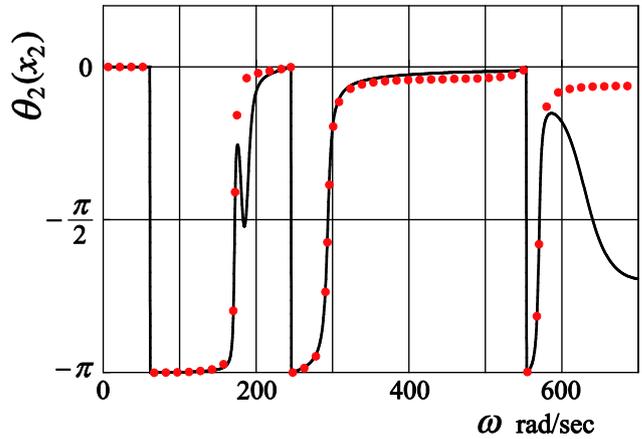
(a) はり 1 の振幅応答曲線 ($x_1=0.8\text{m}$)



(b) はり 2 の振幅応答曲線 ($x_2=0.8\text{m}$)

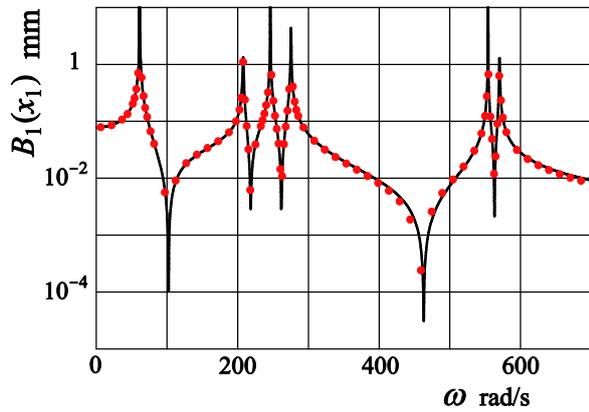


(c) はり 1 の位相応答曲線 ($x_1=0.8\text{m}$)

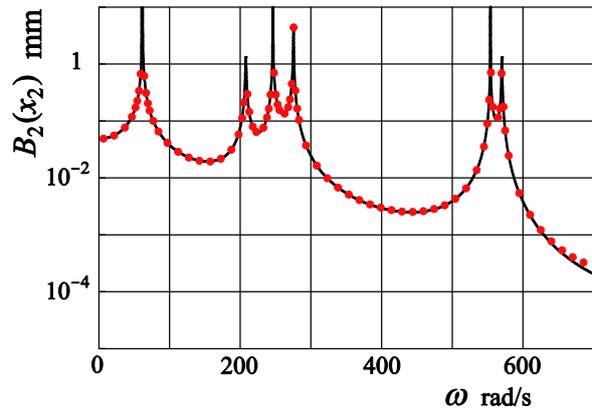


(d) はり 2 の位相応答曲線 ($x_2=0.8\text{m}$)

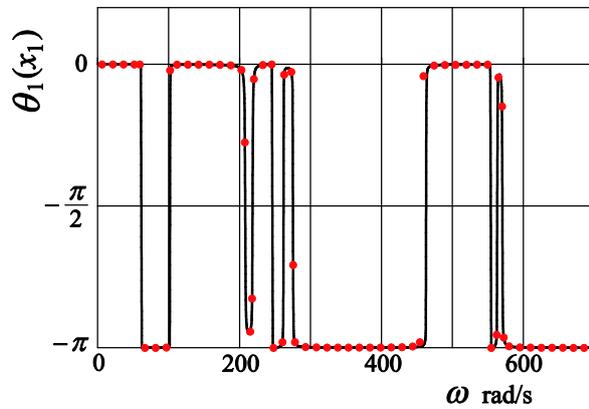
図 3.11 連結要素が 1 組の場合の理論解析 (実線) と FEM 解析 (シンボル) により求めた応答曲線の比較(ケース A: $C_1=100\text{N}\cdot\text{s/m}$)



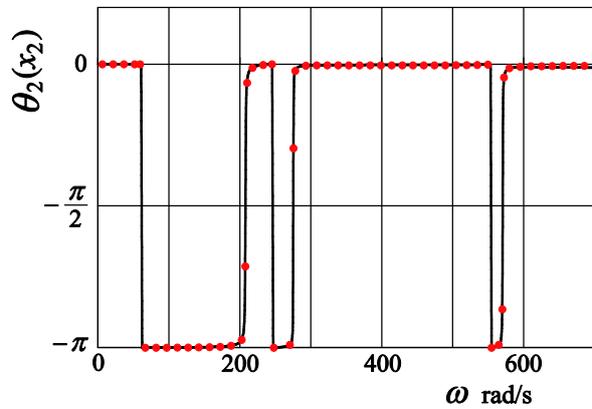
(a) はり 1 の振幅応答曲線 ($x_1=0.8\text{m}$)



(b) はり 2 の振幅応答曲線 ($x_2=0.8\text{m}$)



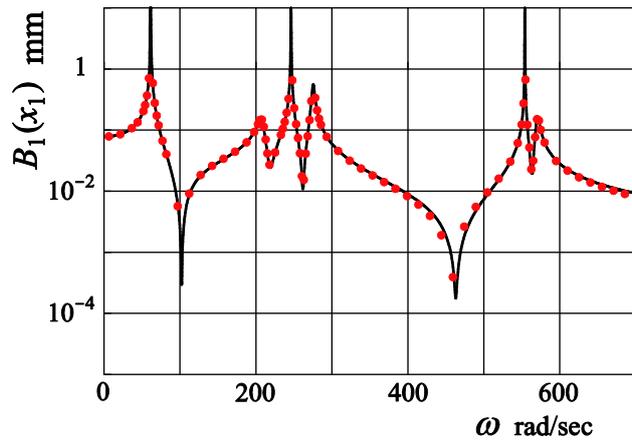
(c) はり 1 の位相応答曲線 ($x_1=0.8\text{m}$)



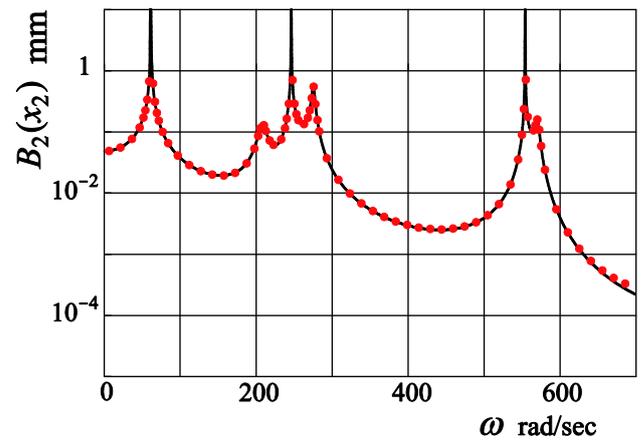
(d) はり 2 の位相応答曲線 ($x_2=0.8\text{m}$)

図 3.12 連結要素が 2 組の場合の理論解析 (実線) と FEM 解析 (シンボル)

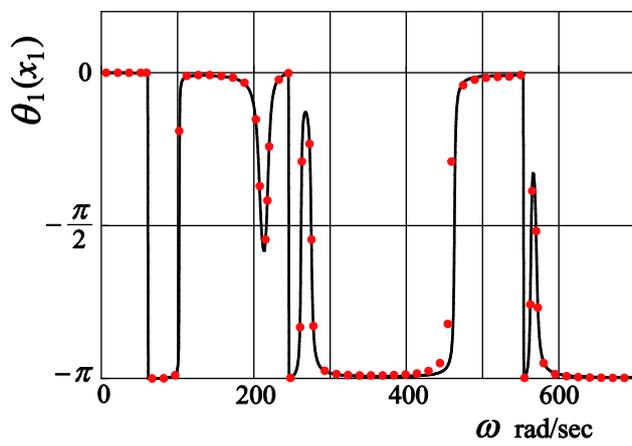
により求めた応答曲線の比較(ケース B: $C_j=5\text{ N}\cdot\text{s/m}$)



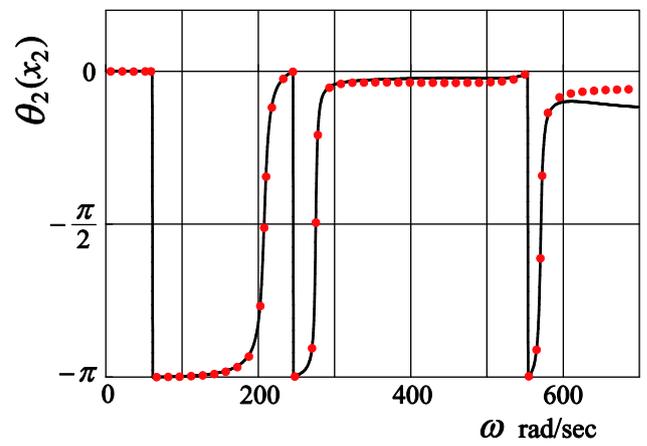
(a) はり 1 の振幅応答曲線 ($x_1=0.8\text{m}$)



(b) はり 2 の振幅応答曲線 ($x_2=0.8\text{m}$)



(c) はり 1 の位相応答曲線 ($x_1=0.8\text{m}$)



(d) はり 2 の位相応答曲線 ($x_2=0.8\text{m}$)

図 3.13 連結要素が 2 組の場合の理論解析 (実線) と FEM 解析 (シンボル) により求めた応答曲線の比較(ケース B: $C_j=50\text{N}\cdot\text{s/m}$)

3.5 結言

本章では、2本の両端単純支持はりが離散的に配置された N 組のばねとダッシュポットから成る連結要素により繋がれた系を対象として、一方のはりに正弦外力が作用する場合、モード解析によるモード関数の直交性を用いてモード方程式を導出し、ダッシュポットの減衰の影響が小さいと仮定して、強制振動解を解析的に求めた。これらの式を用いて、連結要素が1組と2組の場合の応答曲線を示した。その数値計算結果をFEM解析結果と比較した結果、減衰が比較的小さい場合はよい一致を示し、本理論解析が妥当であることを確認した。本解析を用いて、連結要素のばね定数と減衰係数が系に及ぼす影響、およびはり1とはり2の断面形状の差の影響について、振動モード形状と比較しながら調べた結果、以下の結論を得た。

- (1) 減衰が比較的小さい場合、2本のはりが N 組のばねとダッシュポットで離散的に連結された系において、モード関数の直交性を用いることにより、モード方程式を誘導することができる。
- (2) はり1とはり2が同材質で同形状の場合、はり1とはり2が同振幅、かつ同位相で振動する奇数次モードでは、ばねとダッシュポットで構成される連結要素が伸縮しないため、ばね定数と減衰係数の値に関わらず、共振ピークの大きさは変化しない。一方、はり1とはり2が同振幅、逆位相で振動する偶数次モードに対応する共振ピークの大きさと対応する振動数は、ばね定数と減衰係数に依存して変化する。
- (3) はり1とはり2の断面形状が異なる場合、それぞれのはり単体の振動モードが組み合わされた複雑な振動モード形状となる場合がある。このような振動モード形状の変化を利用して、強制外力を受けるはりに比べ、他方のはりの振動を十分小さくすることができる。
- (4) はり1とはり2が同材質で同形状であり、はり1に強制外力が作用する場合、連結要素の組が増えると、振動モード形状およびモード外力が変化し、はり2の特定の振動モードの振幅が大きくなる場合がある。

第 4 章 複数のばね・ダッシュポットで離散的に 連結された二重はりの衝撃応答

4.1 緒言

建築構造物，産業機械，航空機，船舶などの構造物は，はり要素で構成されている場合やその構造がはりとみなせる場合が多い．そのため，構造物の基本要素である単一のはりが衝撃荷重を受ける場合に発生する振動を調べることは重要である．単一のはりが，衝撃荷重を受けた場合の過渡応答に関する研究は古くから行われ，インパルス荷重を受けた場合やパルス状の荷重を受けた場合に発生する振動が調べられている [13, 14, 15]．一方，複数のはりでモデル化することができる二重はり構造の例として，床一天井吊り構造がある．床一天井吊り構造をもつ住宅について，上階の床が居住者の飛び跳ねなどにより衝撃力を受けて下階に発生する固体伝播音は重量床衝撃音と呼ばれて，騒音問題となっている．居住者の飛び跳ねなどで発生する衝撃力は半波正弦波としモデル化され，タイヤを自由落下させるバングマシン（加振機）を用いて発生させることができ，騒音評価に利用されている．

連結された 2 本の弾性はりを対象とした衝撃振動に関する研究は，ゴムのような粘弾性材料で連続的に接合されたサンドイッチ構造をもつ二重はりについての研究 [21, 23] がなされている．一方，2 本のはりが離散的に配置されたばねで連結された系の衝撃振動に関する研究は，強制振動に関する研究と同様に，非常に少ないと思われる．

本章では，2 本の両端単純支持はりが離散的に配置された N 組のばねとダッシュポットから成る連結要素により繋がれた系を対象とし，上部のはりに住宅の騒音評価に用いられている半波正弦励振の衝撃力が作用する場合の過渡応答を求めた．過渡応答解は第 3 章のモード関数の直交性を用いて得られたモード方程式を利用して求めた．数値計算では，連結要素が 1 組の場合（ケース A）と 2 組の場合（ケース B）について，各モードと各はりのたわみに対する過渡応答，および励振振動数に対する過渡応答の残留振動の最大変位量を求めた．また，過渡応答の数値計算結果を有限要素法による計算結果と比較することにより，本理論解析の妥当性を検証した．

4.2 理論解析

4.2.1 運動方程式と自由振動解

図 4.1 のように、両端が単純支持され、一様で長さの等しい 2 本のはりが、 N 組のばね定数 K_j ($j=1, 2, \dots, N$) のばねと減衰係数 C_j のダッシュポットで繋がれている系を考える。はりの左端から j 番目の連結要素は、左端から距離 a_j の位置に取り付けられている。上部のはりを“はり 1”，下部のはりを“はり 2”と呼び、パラメータの添字は、各はりを表すものとする。はり i ($i=1, 2$) の長さを l 、幅を b_i 、厚さを h_i 、密度を ρ_i 、ヤング率を E_i 、断面積を S_i ($=b_i \times h_i$)、断面 2 次モーメントを I_i 、はりの減衰係数を c_i とする。はり 1 の左端から距離 d の位置に、次式で表される半波正弦励振力 $f(t)$ が作用する場合を考える。はり i の長手方向の座標軸を x_i とし、時間 t におけるはり i のたわみを $w_i(x_i, t)$ とする。半波正弦励振力 $f(t)$ は次式のように定義する。

$$f(t) = \begin{cases} F_0 \sin \frac{2\pi}{T} t = F_0 \sin \omega t & (0 \leq t \leq T/2) \\ 0 & (T/2 < t) \end{cases} \quad (4.1)$$

ここに、 $T/2$ は励振力が作用する時間幅を表し、 $\omega \equiv 2\pi/T$ を定義する。

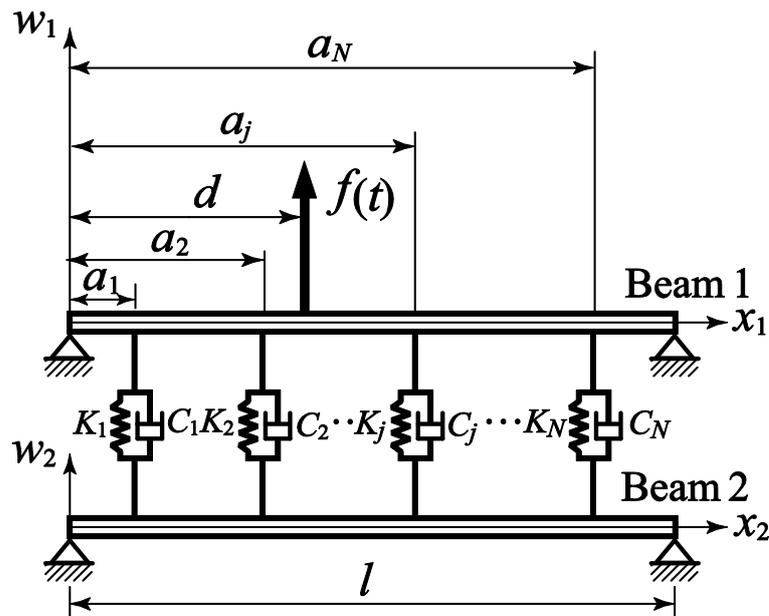


図 4.1 理論解析モデル

解析結果に一般性をもたせるため、第 3 章の式 (3.1) で表される無次元量を導入する。式 (3.1) を用いると、各はりの無次元化された運動方程式は次式となる。ただし、式 (4.2) 以降では、無次元量を表す記号「 \cdot 」はすべて省略されている。

$$\left. \begin{aligned} & \mu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + c_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} + k_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x_1^4} \\ & + \sum_{j=1}^N \left\{ K_j (w_1 - w_2) + C_j \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial w_2}{\partial t} \right) \right\} \delta(x_1 - a_j) = f(t) \delta(x_1 - d) \quad (\text{a}) \\ & \mu_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + c_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} + k_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x_2^4} \\ & + \sum_{j=1}^N \left\{ K_j (w_2 - w_1) + C_j \left(\frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial w_1}{\partial t} \right) \right\} \delta(x_2 - a_j) = 0 \quad (\text{b}) \end{aligned} \right\} (4.2)$$

ここに、 $\delta(\bullet)$ はデルタ関数を表す。

式 (4.2) の運動方程式について、はり i のたわみ $w_i(x_i, t)$ の自由振動の一般解は、第 3 章の式 (3.8) より次式で表される。

$$w_i(x_i, t) = \sum_{r=1}^{\infty} b_r \phi_{i,r}(x_i) \cos(p_r t + \beta_r) \quad (4.3)$$

ここに、 p_r は r 次の固有角振動数であり、第 2 章の式 (2.19) により得られる振動数方程式を解くことにより求められる。また、 b_r と β_r は任意定数である。

4.2.2 過渡応答

強制振動解は、第 3 章 式 (3.21) よりを次式で表される。

$$w_i(x_i, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \phi_{i,s}(x_i) q_s(t) \quad (i=1,2) \quad (4.4)$$

式 (4.4) を式 (4.2) に代入して、第 3 章 3.3.2 節で求めたモード関数の直交条件を用いると、次のモード方程式を得る。

$$\bar{\mu}_r \ddot{q}_r(t) + \bar{c}_r \dot{q}_r + \bar{k}_r q_r(t) = \begin{cases} \bar{f}_r \sin \omega t & (0 \leq t \leq T/2) \\ 0 & (t \geq T/2) \end{cases} \quad (4.5)$$

ここに、 q_r はモード座標、 $\bar{\mu}_r$ はモード質量、 \bar{c}_r はモード減衰係数、 \bar{k}_r はモード剛性、 \bar{f}_r はモード外力の振幅を表す。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mu}_r &= \int_0^1 \mu_1 \phi_{1,r}^2(x_1) dx_1 + \int_0^1 \mu_2 \phi_{2,r}^2(x_2) dx_2 & (a) \\ \bar{k}_r &= \int_0^1 k_1 \phi_{1,r}(x_1) \frac{d^4 \phi_{1,r}(x_1)}{dx^4} dx_1 + \int_0^1 k_2 \phi_{2,r}(x_2) \frac{d^4 \phi_{2,r}(x_2)}{dx^4} dx_2 & (b) \\ \bar{c}_r &= \int_0^1 c_1 \phi_{1,r}^2(x_1) dx_1 + \int_0^1 c_2 \phi_{2,r}^2(x_2) dx_2 + \sum_{j=1}^N C_j \{\phi_{1,r}(a_j) - \phi_{2,r}(a_j)\}^2 & (c) \\ \bar{f}_r &= \int_0^1 F_0 \phi_{1,r}(x_1) \delta(x_1 - d) dx_1 = F_0 \phi_{1,r}(d) & (d) \end{aligned} \right\} (4.6)$$

$0 \leq t \leq T/2$ において、モード方程式 (4.5) を解くと、一般解は次式となる。

$$q_r(t) = e^{-\zeta_r \omega_{nr} t} (A_r \cos \omega_{dr} t + B_r \sin \omega_{dr} t) + X_{0r} \sin(\omega t + \varphi_r) \quad (4.7)$$

A_r, B_r は初期条件を与えたときに決まる定数である（一般解の求め方については付録 D を参照）。また、式 (4.7) に含まれるパラメータをモーダルパラメータ $\bar{\mu}_r, \bar{k}_r, \bar{c}_r, \bar{f}_r$ で表すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \omega_{nr} &= \sqrt{\frac{\bar{k}_r}{\bar{\mu}_r}}, \quad \zeta_r = \frac{\bar{c}_r}{2\sqrt{\bar{\mu}_r \bar{k}_r}}, \quad \omega_{dr} = \omega_{nr} \sqrt{1 - \zeta_r^2}, \\ X_{0r} &= \frac{\bar{f}_r}{\sqrt{(\bar{k}_r - \bar{\mu}_r \omega^2)^2 + (\bar{c}_r \omega)^2}}, \quad \varphi_r = -\tan^{-1} \frac{\bar{c}_r \omega}{\bar{k}_r - \bar{\mu}_r \omega^2} \end{aligned} \right\} (4.8)$$

である。ここで、初期条件を $q_r(0) = 0, \dot{q}_r(0) = 0$ として、式 (4.7) の A_r, B_r を求めると次式となる。

$$A_r = -X_{0r} \sin \varphi_r, \quad B_r = -\frac{X_{0r}}{\omega_{dr}} (\zeta_r \omega_{nr} \sin \varphi_r + \omega \cos \varphi_r) \quad (4.9)$$

次に、 $t \geq T/2$ の場合を考える。 $t \geq T/2$ では外力は作用していないので、次の運動方程式を考えればよい。

$$\bar{\mu}_r \ddot{q}_r + \bar{c}_r \dot{q}_r + \bar{k}_r q_r = 0 \quad (4.10)$$

式 (4.10) の一般解は、次式となる。

$$q_r(t) = e^{-\zeta_r \omega_{nr}(t-T/2)} [A'_r \cos \omega_{dr}(t-T/2) + B'_r \sin \omega_{dr}(t-T/2)] \quad (4.11)$$

ここで、式 (4.7) と式 (4.11) とそれらの微分は $t = T/2$ において連続であるので、 $q_{r[0 \leq t < T/2]}(T/2) = q_{r[t \geq T/2]}(T/2)$, $\dot{q}_{r[0 \leq t < T/2]}(T/2) = \dot{q}_{r[t \geq T/2]}(T/2)$ として、 A'_r, B'_r を求めると、次式となる。

$$\begin{aligned} A'_r &= -X_{0r} \sin \varphi - X_{0r} e^{-\zeta_r \omega_{nr} T/2} \\ &\quad \times \frac{[-\omega_{dr} \cos(\omega_{dr} T/2) \sin(\omega T/2 + \varphi_r) + \sin(\omega_{dr} T/2) \{\omega \cos(\omega T/2 + \varphi_r) + \zeta_r \omega_{nr} \sin(\omega T/2 + \varphi_r)\}]}{\omega_{dr}} \\ B'_r &= -\frac{X_{0r}}{\omega_{dr}} (\zeta_r \omega_{nr} \sin \varphi_r + \omega \cos \varphi_r) + X_{0r} e^{-\zeta_r \omega_{nr} T/2} \\ &\quad \times \frac{[\omega_{dr} \sin(\omega_{dr} T/2) \sin(\omega T/2 + \varphi_r) + \cos(\omega_{dr} T/2) \{\omega \cos(\omega T/2 + \varphi_r) + \zeta_r \omega_{nr} \sin(\omega T/2 + \varphi_r)\}]}{\omega_{dr}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

式 (4.7) を式 (4.4) に代入すると、 $0 \leq t \leq T/2$ におけるはり i の過渡応答解として次式を得る。

$0 \leq t \leq T/2$ の場合

$$\left. \begin{aligned} w_1(x_1, t) &= \sum_{r=1}^{\infty} \phi_{1r}(x_1) e^{-\zeta_r \omega_{nr} t} (A_r \cos \omega_{dr} t + B_r \sin \omega_{dr} t) + X_{0r} \sin(\omega t + \varphi_r) & \text{(a)} \\ w_2(x_2, t) &= \sum_{r=1}^{\infty} \phi_{2r}(x_2) e^{-\zeta_r \omega_{nr} t} (A_r \cos \omega_{dr} t + B_r \sin \omega_{dr} t) + X_{0r} \sin(\omega t + \varphi_r) & \text{(b)} \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

また、式 (4.11) を式 (4.4) に代入すると、 $t \geq T/2$ におけるはり i の過渡応答解として次式を得る。

$t \geq T/2$ の場合

$$\left. \begin{aligned} w_1(x_1, t) &= \sum_{r=1}^{\infty} \phi_{1r}(x_1) e^{-\zeta_r \omega_{nr} (t-T/2)} [A'_r \cos \omega_{dr} (t-T/2) + B'_r \sin \omega_{dr} (t-T/2)] & \text{(a)} \\ w_2(x_2, t) &= \sum_{r=1}^{\infty} \phi_{2r}(x_2) e^{-\zeta_r \omega_{nr} (t-T/2)} [A'_r \cos \omega_{dr} (t-T/2) + B'_r \sin \omega_{dr} (t-T/2)] & \text{(b)} \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

第 3 章で導いたモード方程式を利用して半波正弦励振が作用する場合の過渡応答解を求めることができた。

4.3 数値計算結果

本節では、連結要素が1組の場合をケースA、2組の場合をケースBと呼び、各場合について衝撃振動の数値計算結果を示す。図4.2に、はり1に作用する半波正弦励振力 $f(t)$ と衝撃応答の評価に使用した残留振動の関係を示す。残留振動は、励振力 $f(t)$ が作用する時間幅 $T/2$ 以降の振動である。また、以降の計算結果で使用する残留振動の最大変位量（記号 Max で表示）は符号が正の振動振幅の最大値で示し、最小変位量（記号 Min で表示）は符号が負の振動振幅の最小値で示す。

4.3.1 連結要素が1組の場合（ケースA）

図4.3は、式(4.7)、(4.11)から求めた1次から6次までの各モードの応答 $q_r(t)$ 、および式(4.13)、(4.14)から求めたはり1とはり2の $x_i=0.2$ におけるたわみ $w_1(t)$ と $w_2(t)$ の時間歴応答を示す。図4.3(a)、(b)は、それぞれ励振振動数 $\omega=0.6$ と $\omega=0.333$ の場合の時刻歴応答である。ただし、パラメータの値は $\mu_i=100$, $k_2=1$, $c_i=4.0$, $K_1=300$, $C_1=2.0$, $a_1=0.4$, $F_0=1.0$, $d=0.3$, $x_i=0.2$ である。この場合の固有角振動数は、 $p_1=0.987$, $p_2=2.76$, $p_3=3.95$, $p_4=4.71$, $p_5=8.88$, $p_6=9.14$ である。図4.3(a)の $\omega=0.6$ の場合の1次から6次までの系の振動モードの応答は、第1モードは大きく振動するものの、2次以降のモードの応答は非常に小さいことが分かる。また、はり1とはり2のたわみ応答 $w_1(t)$, $w_2(t)$ について、励振力が作用する時間幅 $T/2$ 以降の時間の残留振動振幅は、いずれのはりも大きいことが分かる。一方、図

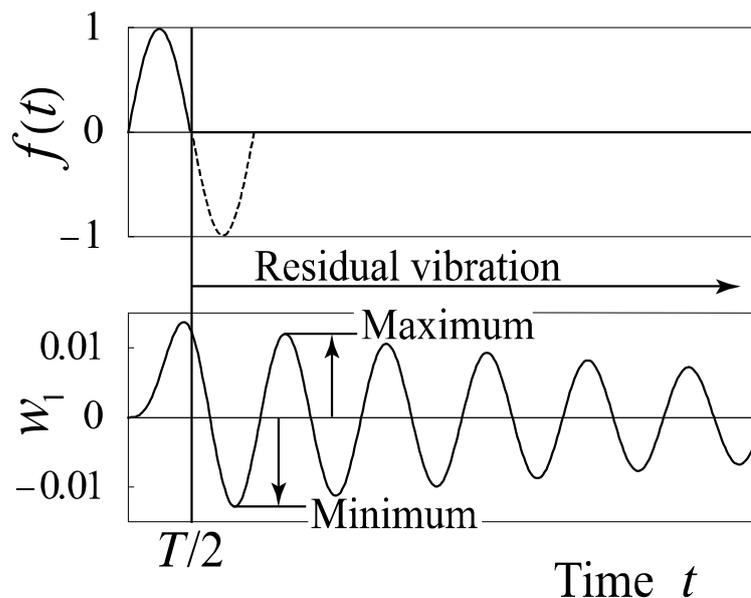
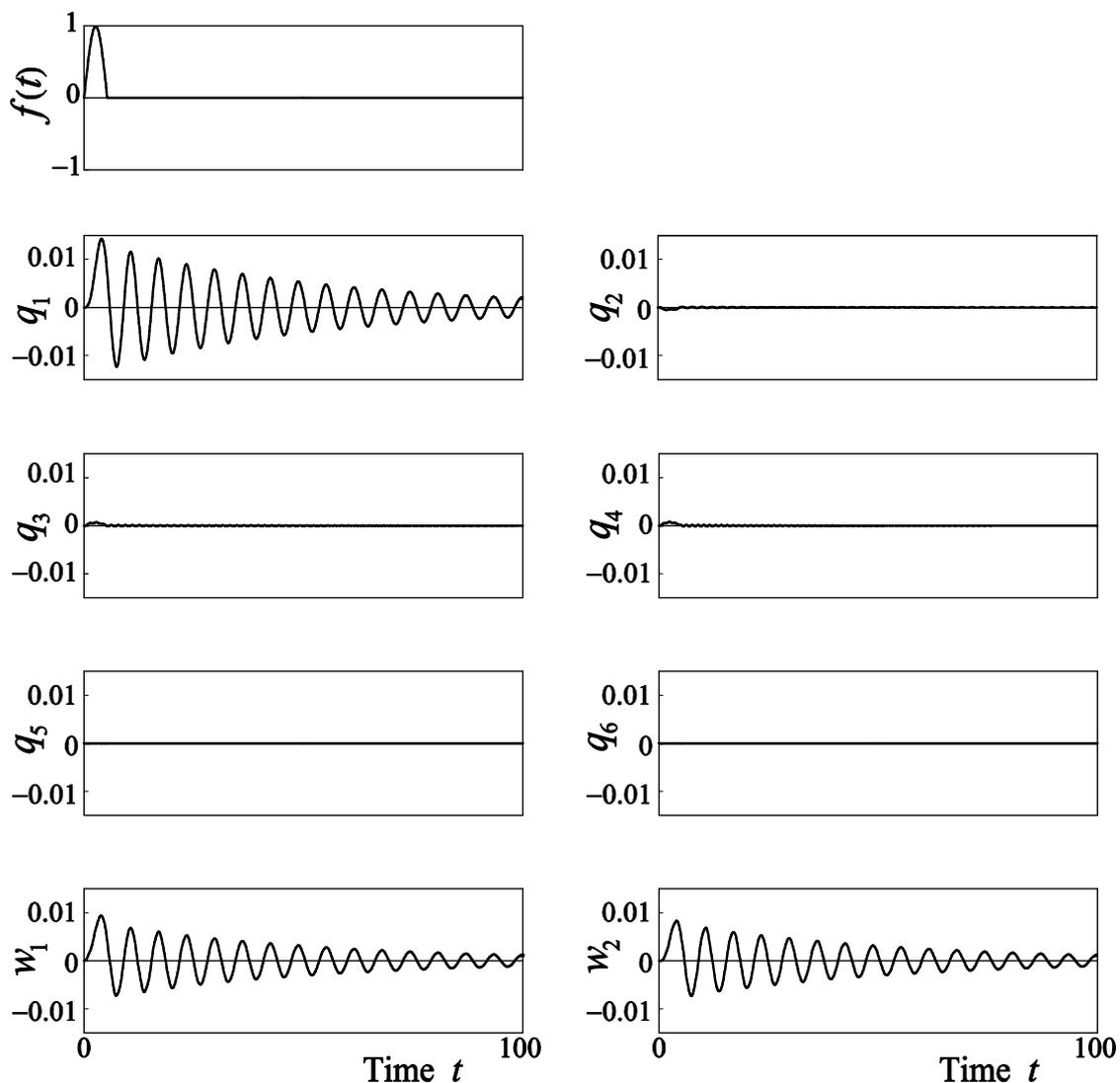


図4.2 衝撃力 $f(t)$ (半波正弦波) と残留振動

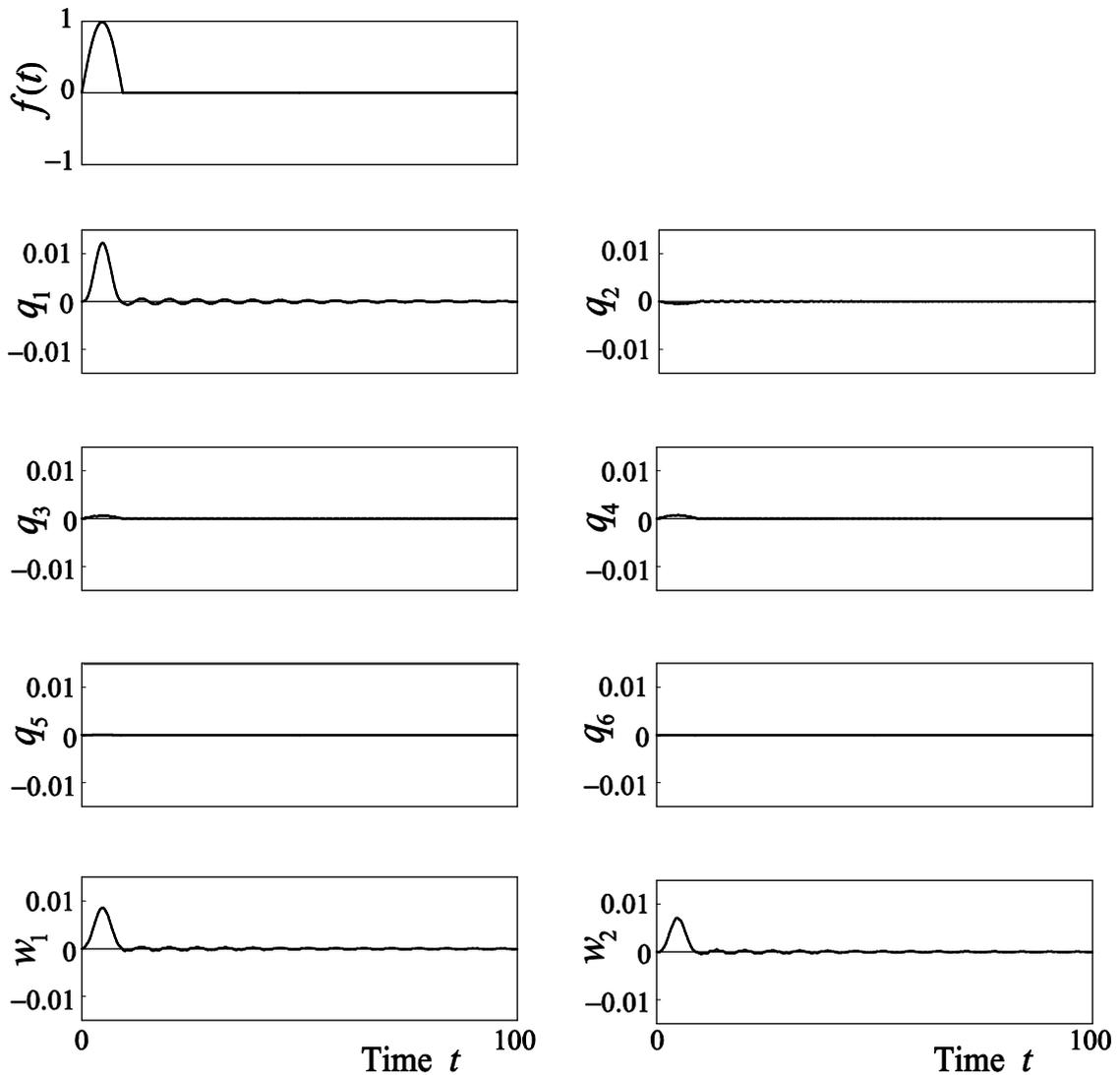
4.3(b)の $\omega=0.333$ の場合の各次モードの応答について、残留振動は、非常に小さくなっていることが分かる。それに伴い、はり 1 とはり 2 の残留振動も小さくなっている。



(a) $\omega=0.6$

図 4.3 1 次から 6 次までのモードとはり 1 とはり 2 の時刻歴応答
(ケース A : 連結要素が 1 組の場合)

($\mu_i=100, k_2=1, c_i=4.0, K_1=300, C_1=2.0, a_1=0.4, F_0=1.0, d=0.3, x_i=0.2$)



(b) $\omega=0.333$

図 4.3 1 次から 6 次までのモードとはり 1 とはり 2 の時刻歴応答

(ケース A : 連結要素が 1 組の場合)

($\mu_i=100, k_2=1, c_i=4.0, K_1=300, C_1=2.0, a_1=0.4, F_0=1.0, d=0.3, x_i=0.2$)

図 4.4 は、1 次から 6 次までの振動モード応答 $q_r(t)$ およびはり 1 とはり 2 の $x_i=0.2$ におけるたわみ $w_1(t)$ と $w_2(t)$ の残留振動の最大変位量と励振振動数 ω の関係を示す。1 次モード q_1 は励振振動数 ω の変化に伴い、極大値と極小値をもつことが分かる。1 次モード q_1 がはり 1 とはり 2 のたわみ振動に大きな影響を与えていることが分かる。この特徴はモード減衰係数 \bar{c}_r の値に影響を受けない。特に、

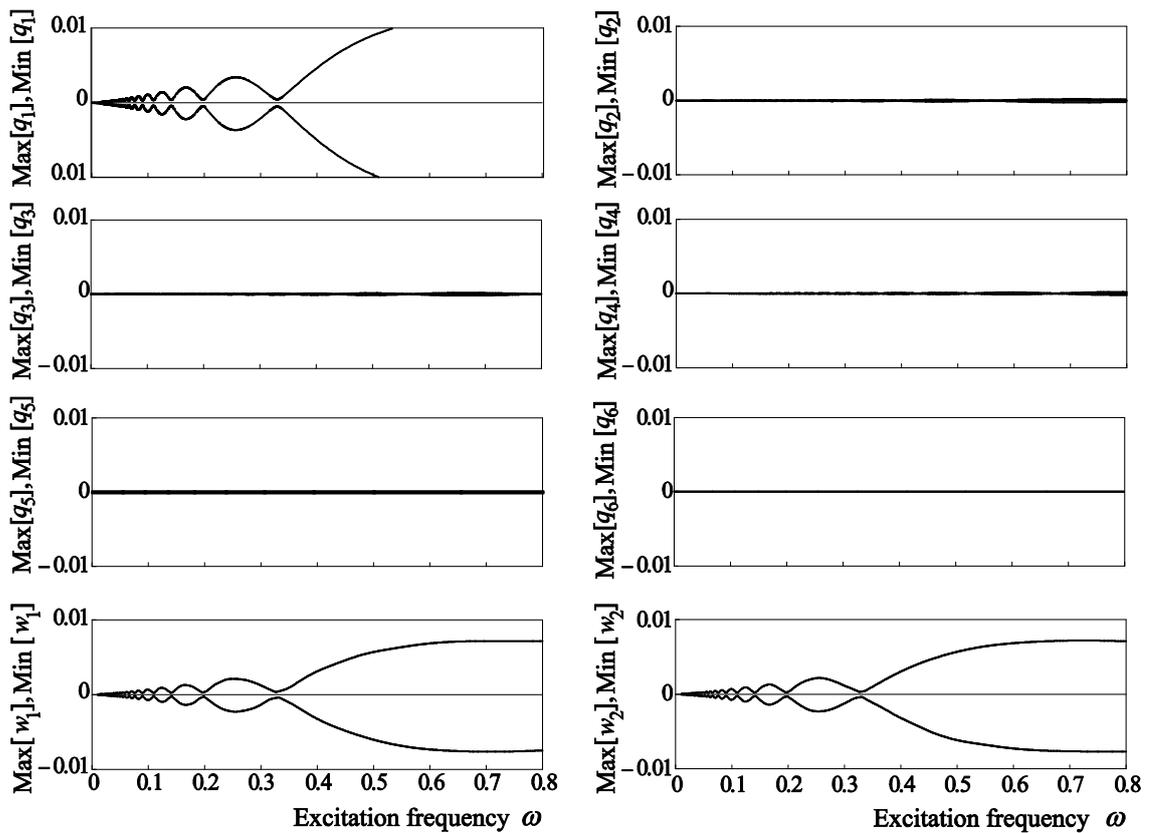


図 4.4 半波正弦励振振動数 ω に対する残留振動の最大値と最小値(ケース A)
 $(\mu_1=100, k_2=1, c_i=4.0, K_1=300, C_1=2.0, a_1=0.4, F_0=1.0, d=0.3, x_r=0.2)$

$\bar{c}_r = 0$ の場合，励振振動数 ω と系の固有角振動数 p_r が次式を満足するとき， r 次モードの残留振動の振幅は最小となる（導出は付録 E 参照）。

$$\frac{p_r}{\omega} = 2n + 1 \quad (n: \text{整数} \geq 1) \quad (4.15)$$

式 (4.15) は 1 自由度系の衝撃応答の結果[55]に一致する。

図 4.5 は， $\omega=0.333$ と 0.6 の場合の半波正弦励振力 $f(t)$ のフーリエ変換による振幅スペクトル $|F(\Omega)|$ を示す。励振振動数 $\omega=0.6$ の半波正弦励振力は $\Omega = 1$ の近傍に比較的大きなスペクトルを含み，系の 1 次の固有角振動数 $p_1=0.987$ が $\Omega = 1$ に近いいため，1 次モード q_1 が励起される。一方， $\omega=0.333$ の半波正弦励振力は $\Omega = 1$ の近傍にほとんどスペクトルを含まないため，1 次モード q_1 は励起されない。

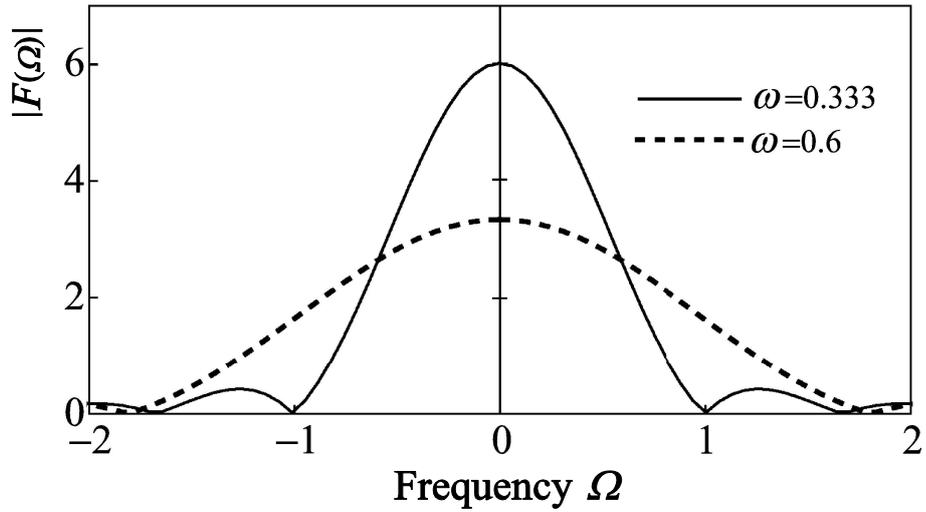


図 4.5 衝撃力 $f(t)$ をフーリエ変換したときのスペクトル

図 4.6 は、半波正弦励振力 $f(t)$ が作用する位置 d を図 4.4 の $d=0.3$ の場合から $d=0.1$ に変化させた場合の各次モードとはり 1 とはり 2 のたわみの残留振動の最大

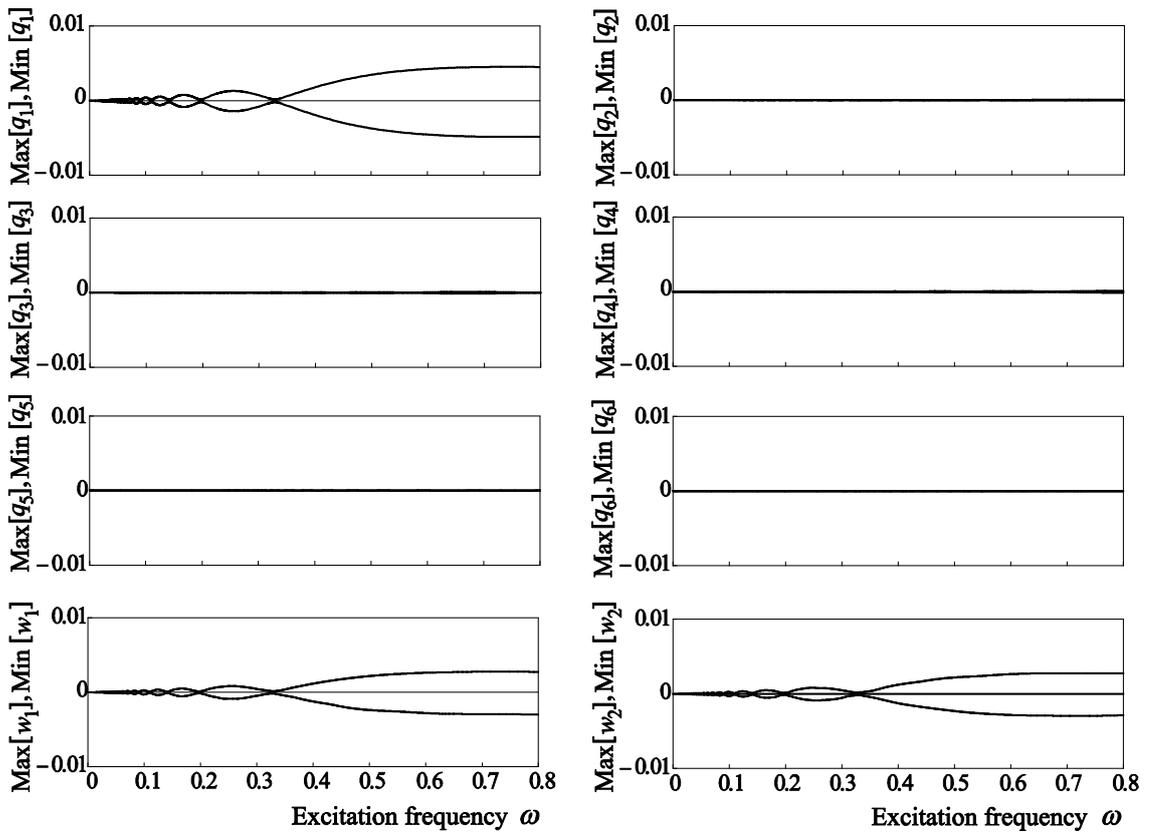


図 4.6 残留振動に及ぼす加振位置 d の影響
(図 4.4 の $d=0.3$ の場合から $d=0.1$ とした場合)

変位量と励振振動数 ω の関係を示す。1次モードの応答は、図4.4と同様に他のモードに比べ大きいことが分かる。しかしながら、励振力の作用する位置が1次モードの振動の腹から離れており、1次の振動モードが励起されにくいいため、図4.4の $d=0.3$ の場合よりも、1次モードの応答は小さい。衝撃力が作用する位置を変化させると、モード外力の振幅が変化するため、加振位置は残留振動に影響を及ぼすと考えられる。

図4.7は、ばねとダンパの取付位置を図4.4の $a_1=0.4$ の場合から $a_1=0.1$ に変化させた場合の各次モードとはり1とはり2のたわみの残留振動の最大変位量と励振振動数 ω の関係を示す。2次モードの残留振動の最大変位量は、図4.4の場合に比べ、非常に大きくなっていることが分かる。ばねの位置をはりの端部に移動させることにより、2次の固有角振動数が図4.4の場合の $p_2=2.76$ から $p_2=1.32$ に変化する。それに伴い、図4.7の場合は、モード剛性 \bar{k}_2 が図4.4の場合に比べ小さくなる。このことにより、2次モードの残留振動の最大変位量が増加したものと考えられる。各はりを連結するばねの位置はモード剛性の増減に関わるため、残留振動の最大変位量に影響を与える。

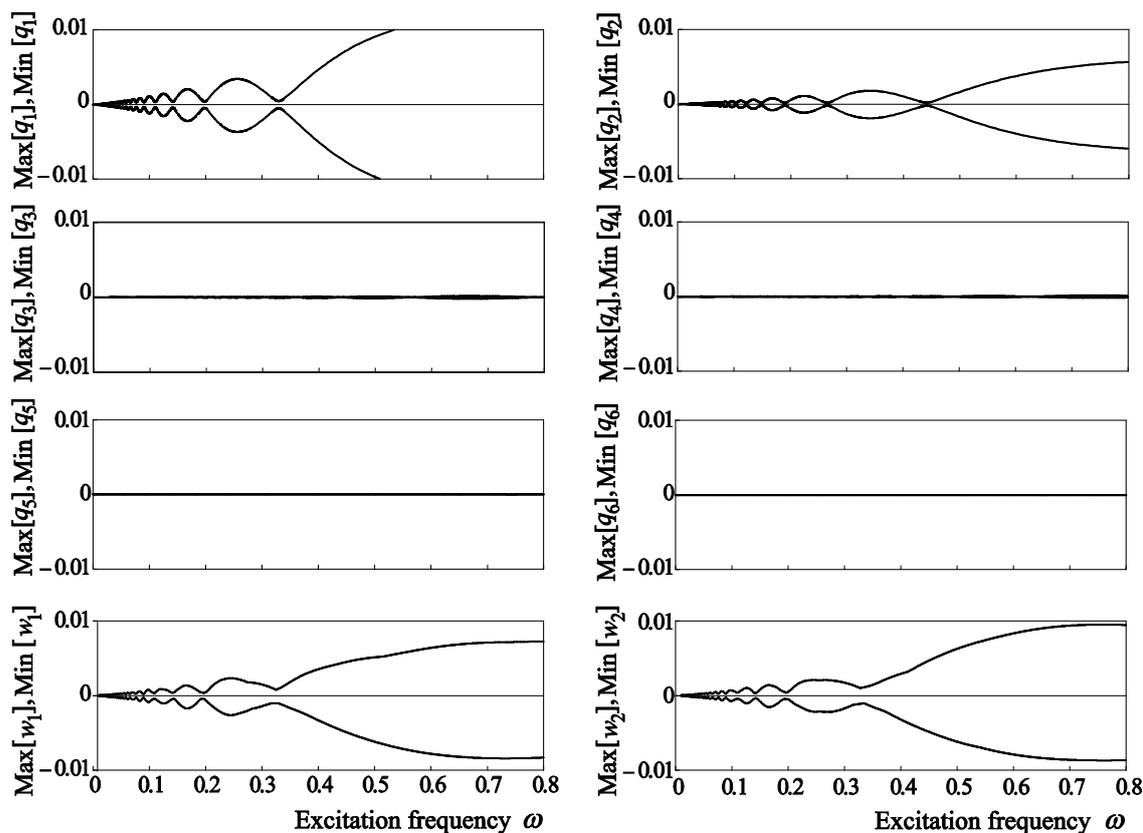


図4.7 残留振動に及ぼす連結ばね位置 a_1 の影響
(図4.4の $a_1=0.4$ の場合から $a_1=0.1$ とした場合)

図 4.8 は、はり 1 とはり 2 の断面形状が異なる場合の各次モードとはり 1 とはり 2 のたわみの残留振動の最大変位量と励振振動数 ω の関係を示す。パラメータの値は、 $\mu_1=100, \mu_2=50, k_2=0.125, c_i=4.0, K_1=300, C_1=2.0, a_1=0.4, F_0=1.0, d=0.3, x_i=0.2$ である。このときの固有角振動数は、 $p_1=0.84, p_2=1.74, p_3=3.27, p_4=4.12, p_5=5.27, p_6=8.53$ である。図 4.4 の場合に比べ、1 次と 2 次モードの最大変位量は増加している。それにともないはり 2 のたわみの最大変位量が増加している。これは、はり 1 に比べはり 2 の断面形状が小さくなったため、系の 1 次の固有角振動数が 0.987 から 0.84 に変化し、2 次の固有角振動数が 2.76 から 1.74 になっている。そのため、モード質量とモード剛性が小さくなり、残留振動の最大変位量が増加したと考えられる。

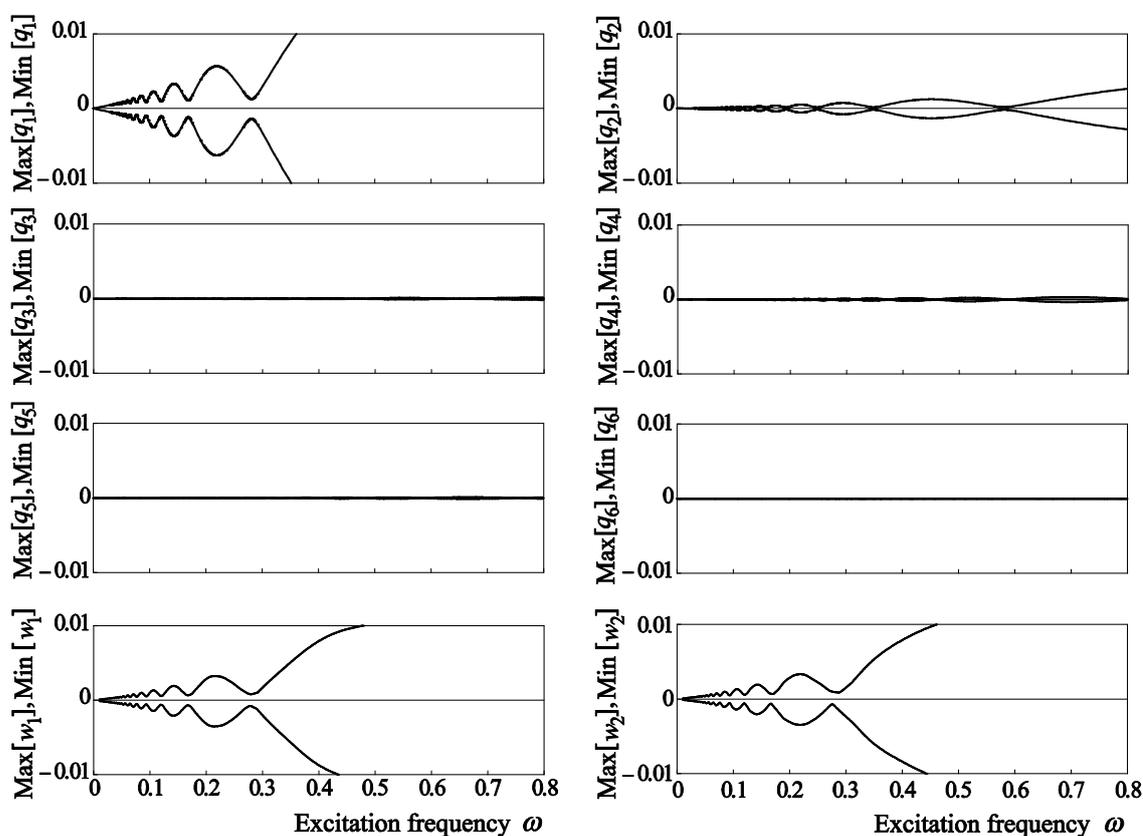
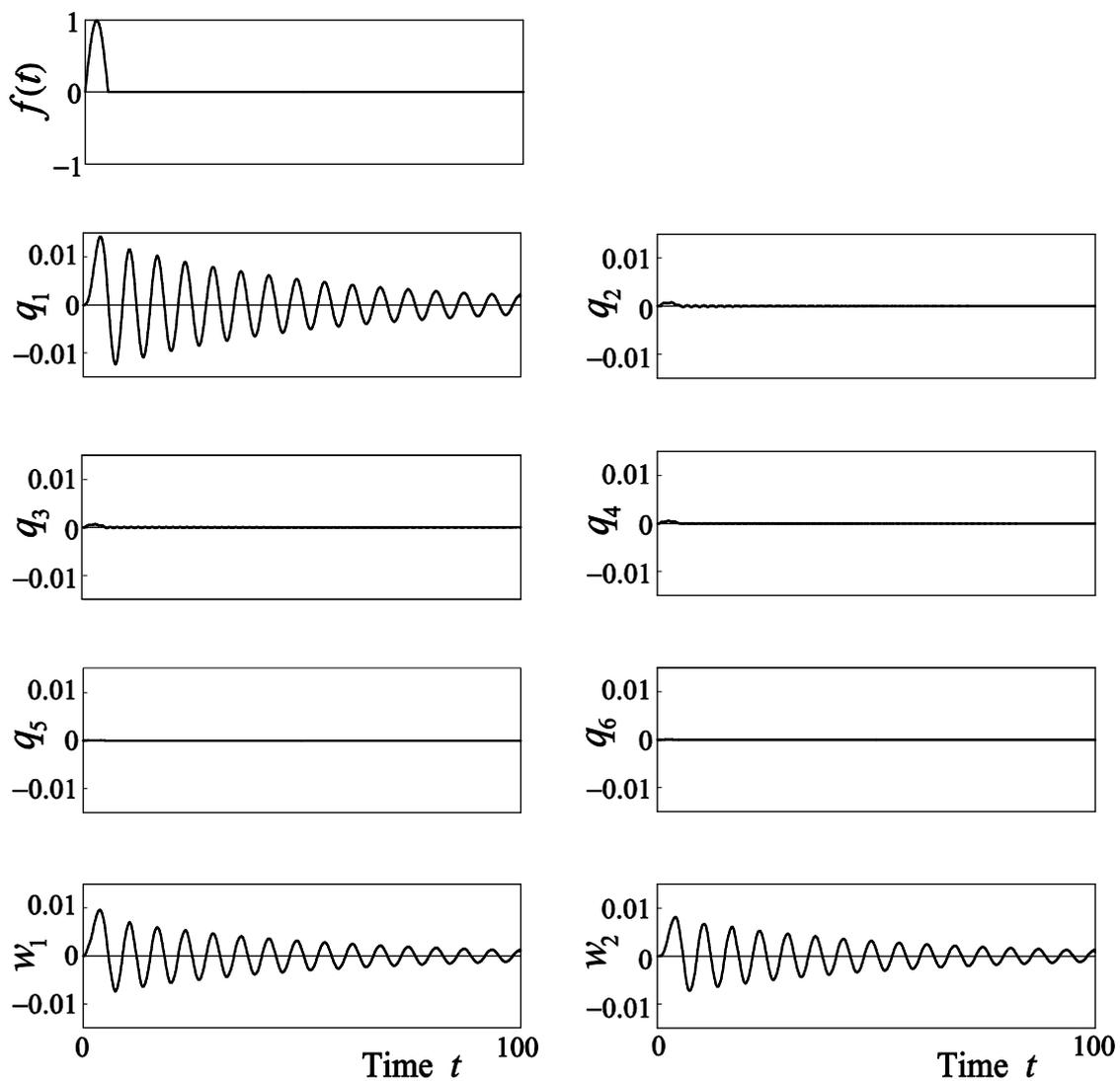


図 4.8 はりの形状が異なる場合の残留振動

($\mu_1=100, \mu_2=50, k_2=0.125, c_i=4.0, K_1=300, C_1=2.0, a_1=0.4, F_0=1.0, d=0.3, x_i=0.2$)

4.3.2 連結要素が2組の場合（ケースB）

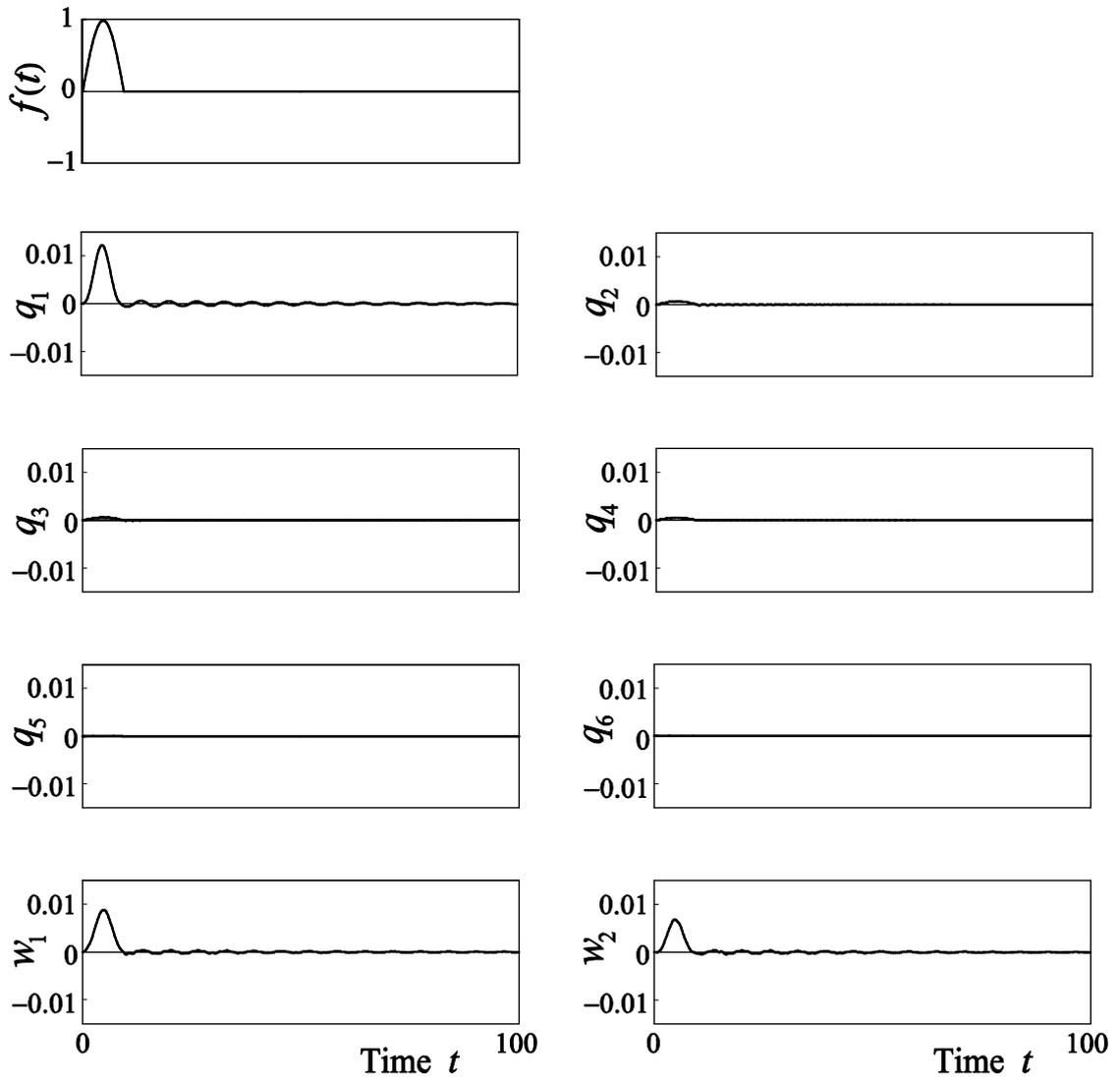
図4.9は、連結要素を図4.3の場合から2組に増やした場合の1次から6次までの各モードの応答 $q_r(t)$ とはり1 とはり2 の $x_i=0.2$ におけるたわみ $w_1(t)$ と $w_2(t)$ の時間歴応答を示す。はり1 とはり2 は同材質で同形状であり、パラメータの値は、 $\mu_i=100$, $c_i=4.0$, $F_0=1.0$, $d=0.3$ であり、連結要素の取付位置の一方は図4.3と同じく $a_1=0.4$ とし、2本目の取付位置を1本目の連結要素と左右対称な位置 $a_2=0.6$ とした。また、連結ばねのばね定数 K_j とダッシュポットの減衰係数 C_j の値は、図4.3の $K_1=300$, $C_1=2.0$ の場合の、それぞれ半分の値 $K_j=150$, $C_j=1.0$ とした。図4.9(a), (b) はそれぞれ励振振動数 $\omega=0.6$ と $\omega=0.333$ の場合の時刻歴応答を示すが、図4.3に示す応答とほとんどかわらない。連結ばねが1本から2本に増えることにより、系の偶数次のそれぞれの固有角振動数は図4.3の場合に比べ大きくなり、 $p_2=3.34$, $p_4=4.42$, $p_6=9.15$ に変化したが、1次モードの応答が優性であるため、その変化が現れなかったためである。



(a) $\omega=0.6$

図 4.9 1 次から 6 次までのモードとはり 1 とはり 2 の時刻歴応答
(ケース B : 連結要素が 2 組の場合)

($\mu_i=100, k_2=1, c_i=4.0, K_j=150, C_j=1.0, a_1=0.4, F_0=1.0, d=0.3, x_i=0.2$)



(b) $\omega=0.333$

図 4.9 1 次から 6 次までのモードとはり 1 とはり 2 の時刻歴応答

(ケース B : 連結要素が 2 組の場合)

($\mu_i=100, k_2=1, c_i=4.0, K_j=150, C_j=1.0, a_1=0.4, F_0=1.0, d=0.3, x_i=0.2$)

図 4.10 に、図 4.9 と同じ計算パラメータの場合の 1 次から 6 次までの振動モード応答 $q_i(t)$ と、はり 1 とはり 2 の $x_i=0.2$ におけるたわみ $w_1(t)$ と $w_2(t)$ の残留振動の最大変位量と励振振動数 ω の関係を示す。図 4.9 で述べたように、1 次モードの応答が優性に現れるため、図 4.4 の場合の結果とほぼ変わらない。

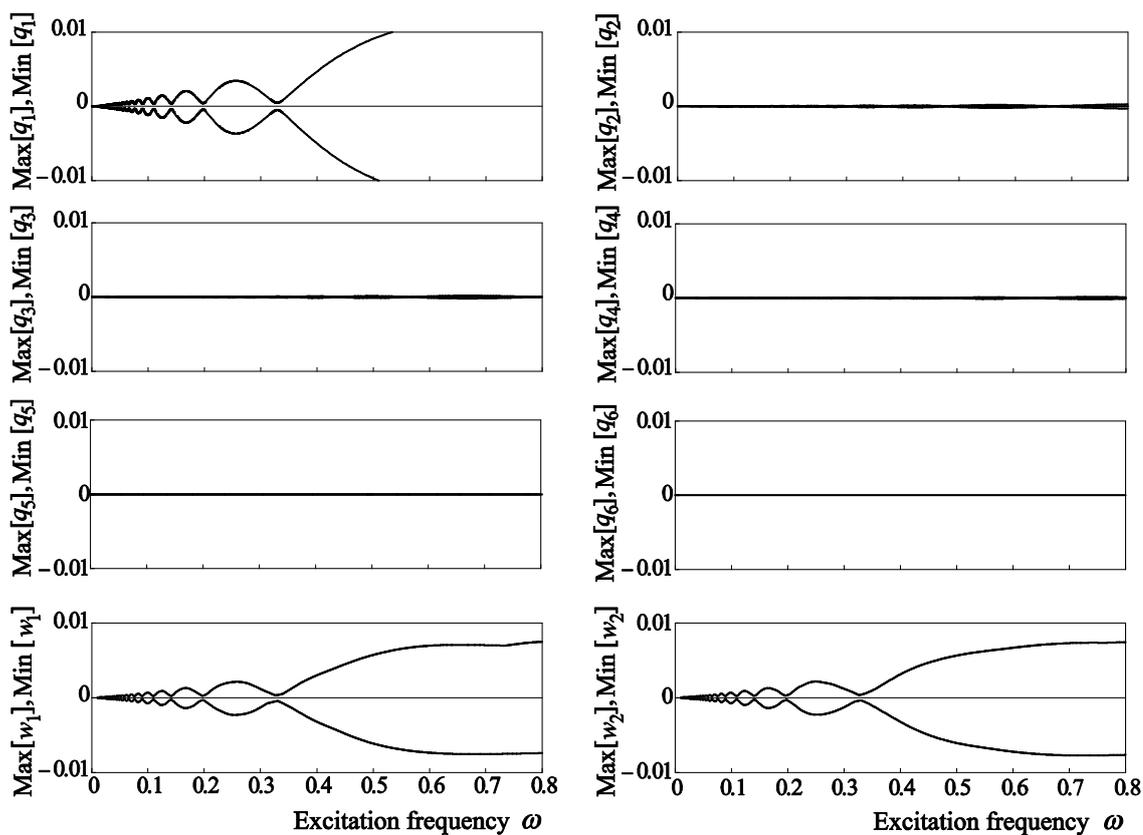


図 4.10 半波正弦励振振動数 ω に対する残留振動の最大値と最小値(ケース B)
 $(\mu_i=100, k_2=1, c_i=4.0, K_j=150, C_j=1.0, a_1=0.4, F_0=1.0, d=0.3, x_i=0.2)$

4.4 有限要素法解析による検証

第3章3.2.3節で述べたように、本理論解析では減衰が十分小さいとし、はり1とはり2の位相差は無視できると仮定した。本節では、第3章と同様に、その仮定の妥当性を検証するため、ケースAとケースBについての衝撃振動を有限要素法(FEM)により数値計算する。

図4.11は、連結要素が1組の場合(ケースA)における理論解析とFEM解析による衝撃応答曲線の比較を示す。図中の実線は理論解析による結果、●印はFEM解析結果を表す。パラメータの値は、はりの長さ $l=4\text{ m}$ 、幅 $b_i=0.3\text{ m}$ 、厚さ $h_i=0.07\text{ m}$ 、密度 $\rho_i=410\text{ kg/m}^3$ 、ヤング率 $E_i=10^{10}\text{ N/m}^2$ 、連結要素のばね定数 $K_1=4\times 10^5\text{ N/m}$ 、減衰係数 $C_1=10\text{ N}\cdot\text{s/m}$ 、ばねの取付位置 $a_1=1.6\text{ m}$ 、励振振幅 $F_0=1\text{ N}$ 、加振位置 $d=1.2\text{ m}$ 、振動測定点 $x_i=0.8\text{ m}$ である。これらの有次元量に対応する無次元量の値は、 $\mu_i=97.4$ 、 $k_2=1$ 、 $K_1=299$ 、 $C_1=0.460$ 、 $a_1=0.4$ 、 $F_0=1.87\times 10^{-4}$ 、 $d=0.3$ 、 $x_i=0.2$ である。FEM解析では汎用構造解析ソフトウェアMSC.Marcを用い、1本のはりをそれぞれ30要素に分割したモデルを使用した。FEM解析については理論解析と同じ構造減衰を設定できなかったため、はりの減衰係数を $c_i=0$ とした。要素には2次元はり要素を用い、はり両端の単純支持条件ははりの軸方向とたわみ方向の変位を拘束することにより実現した(FEM解析モデルの詳細は付録B参照)。図4.11(a)、(b)は、それぞれ励振振動数 $\omega=15.7\text{ rad/s}$ と $\omega=31.4\text{ rad/s}$ の場合のはり1とはり2のたわみ応答を示す。なお、無次元化された励振振動数は、それぞれ $\omega=0.255$ 、 0.510 であり、理論解析によって計算された系の固有角振動数は、 $p_1=61.6\text{ rad/s}$ 、 $p_2=172\text{ rad/s}$ 、 $p_3=246\text{ rad/s}$ 、 $p_4=294\text{ rad/s}$ 、 $p_5=554\text{ rad/s}$ 、 $p_6=570\text{ rad/s}$ である。実線は●印とよく一致しており、減衰係数 C_1 の値が比較的小さい場合には、本理論解析結果は妥当であることが分かる。

図4.12に、図4.11の場合の減衰係数を10倍とした $C_1=100\text{ N}\cdot\text{s/m}$ の場合の理論解析とFEM解析による応答曲線の比較を示す。図4.11の結果と同様に、理論解析結果とFEM解析結果の差が小さいことが分かる。減衰係数第3章3.4節の強制振動の有限要素法解析による検証では、減衰係数が大きくなると理論解析結果とFEM解析結果に差が表れた。しかしながら、図4.12では、図4.3と計算条件がほぼ等しいため、第1モードの振動振幅に比べ、2次以降のモードの応答が非常に小さく、はり1とはり2が同位相で振動する第1モードの寄与が大きいため、減衰の影響が表れにくいものと考えられる。

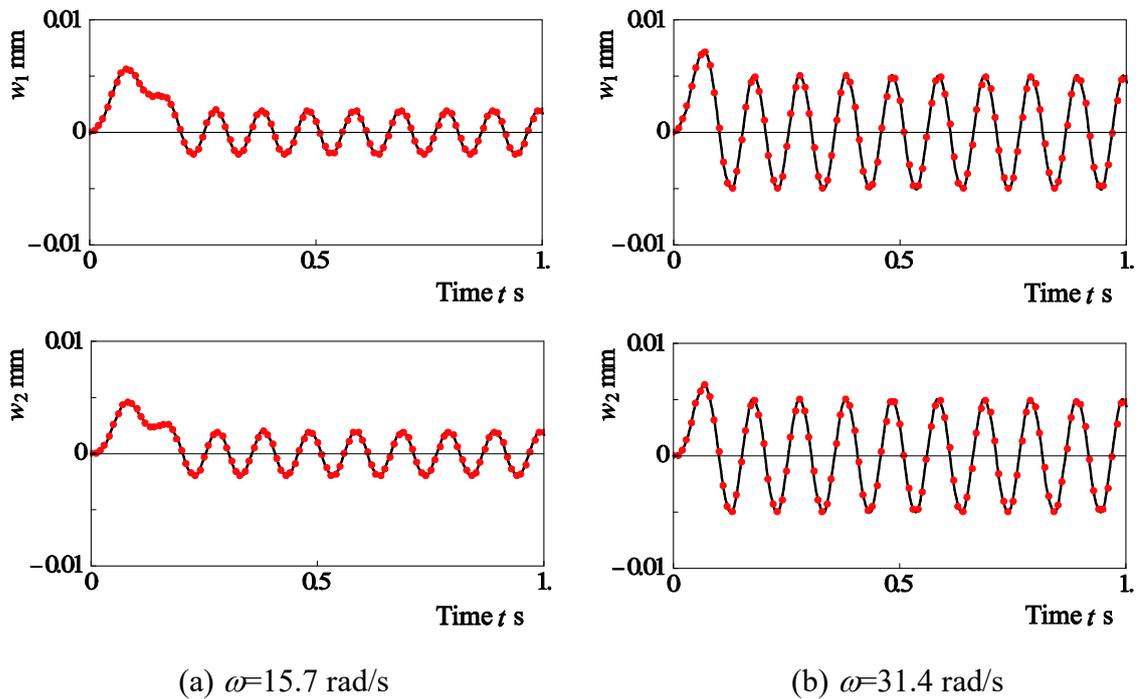


図 4.11 理論解析（実線）と FEM 解析（シンボル）の時刻歴応答の比較
(ケース A: $C_1=10$ N·s/m)

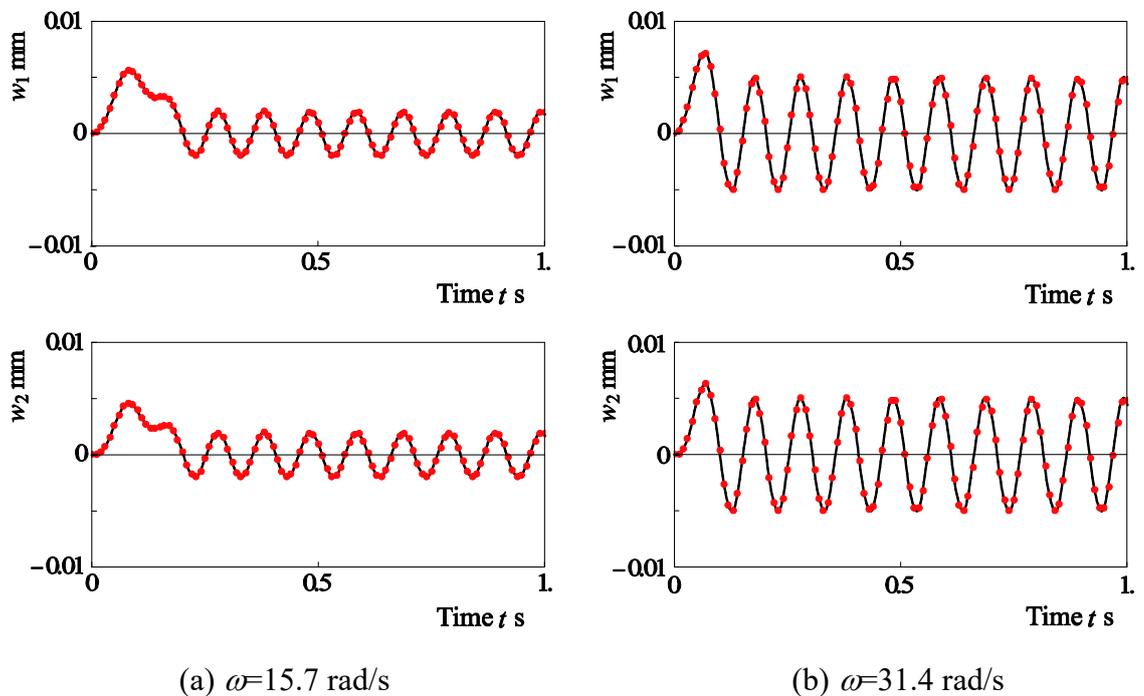


図 4.12 理論解析（実線）と FEM 解析（シンボル）の時刻歴応答の比較
(ケース A: $C_1=100$ N·s/m)

図 4.13 は、連結要素が 2 組の場合（ケース B）における理論解析と FEM 解析の応答曲線の比較を示す。パラメータの値は、ばね定数 $K_j=2 \times 10^5$ N/m, 減衰係数 $C_j=5$ N·s/m, ばねの取付位置 $a_1=1.6$ m, および $a_2=2.4$ m, 励振振幅 $F_0=1$ N, 励振位置 $d=1.2$ m, 振動測定点 $x_i=0.8$ m であり, これらの有次元量に対応する無次元量の値は, $\mu_i=97.4$, $k_2=1$, $K_j=149$, $C_j=0.230$, $a_1=0.4$, $a_2=0.6$, $F_0=1.87 \times 10^{-4}$, $d=0.3$, $x_i=0.2$ である。実線は●印とよく一致しており, 本理論解析結果は妥当であることが分かる。

図 4.14 に, ケース A の連結要素が 1 組の場合と同様に, 図 4.13 の場合の減衰係数を 10 倍とした $C_j=50$ N·s/m のときの理論解析と FEM 解析による応答曲線の比較を示す。図 4.13 の結果と同様に, 理論解析結果と FEM 解析結果の差が小さいことが分かる。これは, 図 4.12 の結果と同様に, 図 4.13 の計算条件では, 第 1 モードの寄与が 2 次以降のモードに比べて非常に大きいため, 減衰の影響が表れにくいからであると思われる。

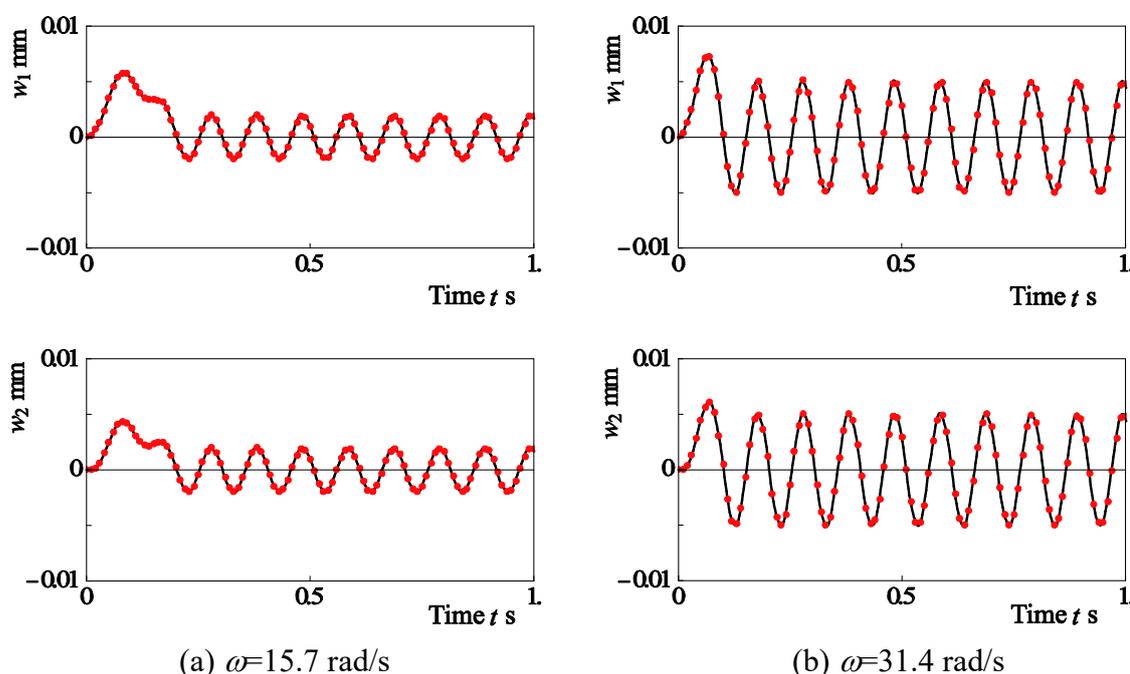
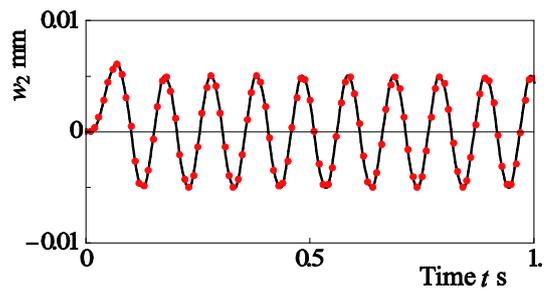
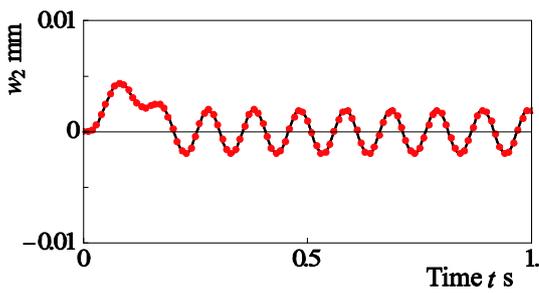
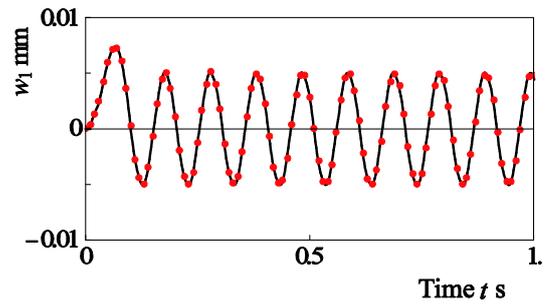
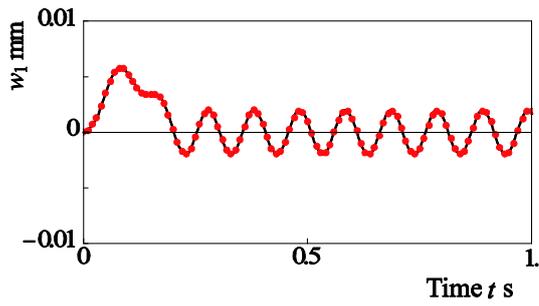


図 4.13 理論解析（実線）と FEM 解析（シンボル）の時刻歴応答の比較
(ケース B: $C_j=5$ N·s/m)



(a) $\omega=15.7$ rad/s

(b) $\omega=31.4$ rad/s

図 4.14 理論解析（実線）と FEM 解析（シンボル）の時刻歴応答の比較
 (ケース B: $C_j=50$ N·s/m)

4.5 結言

本章では、2本の両端単純支持はりが離散的に配置された N 組のばねとダッシュポットから成る連結要素により繋がれた系を対象として、一方のはりに半波正弦励振力が作用する場合、モード関数の直交性を用いて求めたモード方程式を使用して過渡振動解を求めた。これらの式を用いて、連結要素が1組と2組の場合の衝撃応答を示した。その数値計算結果を FEM 解析結果と比較した結果、減衰が比較的小さい場合はよい一致を示し、本理論解析が妥当であることを確認した。本解析を用いて、加振位置、連結ばねの取付位置およびはり 1 とはり 2 の断面形状の影響について調べた結果、以下の結論を得た。

- (1) 各はりの残留振動は1次モードの影響が最も大きく、3次以上の高次モードの影響はほとんど受けない。
- (2) 半波正弦励振力が系の各次モードの固有角振動数と同じ成分を含まない場合、それらのモードはほとんど励起されない。
- (3) 残留振動の最大変位量は加振位置、連結ばねの取付位置および励振振動数の影響を大きく受ける。
- (4) 半波正弦励振力の作用時間を $T/2$ とし、その角振動数 ω を $\omega=2\pi/T$ で定義すると、 r 次の固有角振動数 p_r と ω の間に $p_r = (2n+1)\omega$ (n : 整数 ≥ 1) の関係が満たされる角振動数 ω の付近で、はりの残留振動が極小となる。

第5章 今後の研究課題

第2章から第4章において、2本の両端単純支持はりが離散的に配置された N 組のばねとダッシュポットから成る連結要素により繋がれた系を対象として、自由振動、強制振動、および衝撃振動について、モード解析により理論解析を行い、数値計算を実施した。本論文では、はりの両端部について単純支持条件を設定して解析を進めたが、本解析手法はその境界条件に限定せず、他の境界条件に対しても適用可能である。また、本論中の理論解析や数値計算結果でも示したように、2本のはりの断面形状や材質（曲げ剛性、質量）が異なる場合にも対応している。そのため、いろいろなタイプの二重はり構造に本解析手法が適用できる。本章では、本手法が適用可能な分野の構造物を紹介しながら、今後の研究課題について述べる。なお、筆者は住宅用防振ゴムの設計・開発にも携わっているため、二重はりの振動解析を適用する具体的な対象として住宅を取り上げ、その課題について述べたい。

第1章では、離散的にばねで連結された二重はりに関する従来の研究について述べたが、2本のはりの一方とそれを連結するばねとダッシュポットで動吸振器を構成し、他方のはりを制振する研究がなされている[49]。具体的な研究例として、高速旅客鉄道用の橋に発生する振動をはりタイプの動吸振器で制振する試みがMartínez-Rodrigoら[56]によってなされている。この研究例の場合、外力の作用する主系（橋）の振動を動吸振器で抑制しようとするもので、一般的な制振方法に相当する。

住宅構造を取り上げると、上階の居住者の飛び跳ねなどにより発生する床振動が床と天井を結ぶ吊り要素を介して、天井を振動させることで発生する騒音が課題となる。この場合、天井の振動を低減するために、動吸振器を利用することが考えられ、住宅のはり状の構造部材を付加質量として利用できれば、より合理的となる。しかしながら、住宅構造については、外力の作用する床が制振対象ではなく、天井が振動を低減したい制振対象にあたる。通常動吸振器は外力の作用する側の構造の振動を低減するため使用されており、外力の作用する床と吊り要素を動吸振器として利用することは困難であると思われる。

そこで、床自体に動吸振器を設置して振動源を対策するか[57]、音の放射面である天井自体に動吸振器を設置することになる[58]。床と天井を二重はり構造に置き換えると、上部はりや下部はりに動吸振器を設置する場合の検討が必要となる。例えば、上部はりと下部はりのいずれに設置するのが効果的であるか、また動吸振器の設置個数や配置の最適化が課題となる。住宅については、部屋のサイ

ズが同一である場合は少なく、天井のサイズによって天井の振動モードも異なるため、部屋のサイズによる影響を受けにくい動吸振器の数量と配置を考える必要がある。

本論文では、床に相当する上部はりの振動が吊り要素を介して、天井に相当する下部はりに振動が励起される場合を想定しているが、天井が床と天井との間の空気層がそれぞれのはりに影響を与える場合が考えられる。これは、床と天井間の空気層がある程度密閉された状態である場合、上階の床が加振により変形した際、空気層を押し、それに追従する形で天井が変形する。この場合、空気層が連続的なばね、吊り要素が離散的なばねとしてモデル化できると考える。2本のはりを結ぶばねが柔らかいほど、振動を伝えにくくなるが、空気層の存在により、連結ばねが柔らかすぎると逆に下部はりがより振動する可能性がある。二重はりの間に空気層を考慮したモデルについて、ばねとダッシュポットの最適なばね定数と減衰係数が存在するのか調べたい。また、住宅構造の界壁（部屋と部屋を仕切る壁）についても同様に二重はりとして扱うことができる。壁の加振源は隣の部屋で発生する物音や声であり、音響加振となる。この場合、はり全体やはりのある部分に分布荷重が作用する系として調べることができる。外力を分布荷重として扱うことも今後の研究課題の一つである。

住宅構造については、上階の居住者の飛び跳ねなどにより階下に発生する室内音（重量床衝撃音）を評価する際にバングマシンと呼ばれる加振機が用いられる。この加振機による評価は、床中央を加振する場合とそれ以外の場所を加振する場合があり、場所により床のたわみ量が変化することが考えられ、床材の非線形な挙動により床衝撃音に影響を与えたとの報告 [59] もある。このことから、両端単純支持の二重はりについて、一方のはりが外力を受けた場合、たわみが大きくなり、はりに張力変化が生じることが考えられ、張力を考慮した非線形解析も必要となると思われる。また、床と天井の吊り要素に防振ゴムを利用することが多いが、防振ゴムはコイルばねのように荷重とたわみが線形関係となる材料とは異なり、変形が大きくなると非線形性が現れやすい。さらに、2本のはりを連結するばね要素に非線形性を考慮した場合の解析も今後の研究課題である。

数値計算上の課題として、2本のはりを連結するばねの取付本数が増えた場合の固有角振動数を求める計算方法の改善が挙げられる。自由振動の理論解析について、振動数方程式を解き、固有角振動数を求めるが、振動数方程式は三角関数と双曲線関数を含む超越方程式であり、解析的に解けない。そのため、振動数方程式 $f(\omega)=0$ の左辺を $y=f(\omega)$ とおき、振動数 ω に数値を代入しながら、 $y=0$ となる ω を探索することになる。本論文では、その探索方法として二分法を用いた。高次の固有角振動数解付近では、関数 $f(\omega)$ が双曲線関数を含んでいるためにその値が

急激に大きくなると同時に, $f(\omega)$ は三角関数を含むため $f(\omega)$ の値は振動的になる. 関数 $f(\omega)$ にこのような性質があるため, 連結ばねの本数が増えるにつれ, $f(\omega)$ に含まれる項数が飛躍的に増大するために, 数値の丸め誤差が $f(\omega)$ の値に大きな影響を与え, その数値がより振動的になる. このとき, 解の探索には $f(\omega)$ の値の正負の符号を利用しているため, $f(\omega)$ の値が振動的になれば, 解の判定が困難となってしまう. 解の探索方法に別の方法を採用することや, 丸め誤差の累積を回避する方法を考えることも課題の一つである.

第6章 結論

第1章で示した目的に従い、等しい長さの2本のはりが離散的に配置された複数のばね・ダッシュポットで連結された系を対象に、モード解析により、第2章では自由振動、第3章では強制振動、第4章では衝撃振動について調べた。以下に得られた結果をまとめる。

第2章の自由振動では、2本のはりが複数の (N 本) ばねで離散的に連結された系の固有角振動数と固有振動モードを求めるための一般式を解析的に誘導した。第3章の強制振動では、2本のはりが N 組のばねとダッシュポットで離散的に連結された系について、上部のはりに正弦外力が作用する場合の強制振動を求めるため、モード関数の直交性を用いて、モード方程式を理論的に誘導した。第4章の衝撃振動では、第3章で得られたモード方程式により、半波正弦励振の衝撃荷重が作用する場合の過渡応答解を求めた。これらの解析結果の妥当性を検証するため、数値計算を実施し、FEM解析結果と比較した。比較した結果、非減衰の自由振動、減衰が比較的小さい場合の強制振動および衝撃振動について理論解析結果は妥当であることが分かった。自由振動、強制振動および衝撃振動の数値計算結果を要約する。

(1) 自由振動

はり1とはり2が同材質・同形状で連結ばねが1本または2本の場合、いずれについても連結ばねのばね定数が増すにつれ、奇数次、偶数次モードの固有角振動数はそれぞれ一定、および増大することがわかった。連結ばねが1本 ($N=1$) の場合、はり単体の節の位置、すなわちはりの中央に連結ばねを設置すると、そのばね定数が特定の値になると3つの固有角振動数が等しくなり、その値を境にして固有角振動数の大小関係が入れ替わることを明らかにした。連結ばねが2本 ($N=2$) の場合、はりの中央に連結ばねを設置しない場合でも、連結ばねが1本の場合と同様の特徴が現れることを明らかにした。

(2) 強制振動

連結要素が1組または2組の場合、モード方程式により得られた各振動モードの強制振動を合成することにより、はりの振動振幅と位相遅れを求めた。はり1とはり2が同材質・同形状の場合、奇数次モードの共振ピークの大きさと振動数はばね定数と減衰定数に関わらず、変化しない。一方、偶数次モードの共振ピークの振動数と大きさはばね定数と減衰定数に依存して、変化する。連結要素が1組で2本のはりが異なる形状の場合、2本のはりが同材

質で同形状の場合に比べ、振動モード形状が大きく変化し、外力が直接作用しないはりの振動を小さくできることを明らかにした。2本のはりが同材質で同形状の場合、それらを繋ぐばねとダッシュポットが2組に増えると、振動モード形状とモード外力が変化し、外力が直接作用しないはりの振動が大きくなることを示した。

(3) 衝撃振動

連結要素が1組または2組の場合、強制振動で得られたモード方程式を用いて、半波正弦励振の衝撃荷重が作用する場合の各はりの残留振動を求めた。はり1とはり2の残留振動は1次モードの寄与が大きく、3次以上の高次モードの影響をほとんど受けない。半波正弦励振力に含まれる振動数成分と、系の各次モードの固有角振動数の関係により、残留振動の最大変位量が変化する。また残留振動の最大変位量は加振位置、連結ばねの取付位置および励振振動数の影響を大きく受ける。半波正弦励振の振動数 ω と系の r 次の固有角振動数 p_r の間で $p_r = (2n+1)\omega$ (n : 整数 ≥ 1)の関係が満たされると、励振振動数 ω の付近で、はりの残留振動が極小となる。

参考文献

- [1]. Weaver, JR., W., Timoshenko, S. P. and Young, D. H., Vibration problems in engineering 5th edition, (1990), John Wiley & Sons, Inc.
- [2]. 安田仁彦, 改定 振動工学 [基礎編], コロナ社 (2012).
- [3]. Meirovitch, L., Fundamentals of vibrations (2010), Waveland Press, Inc.
- [4]. Karnovsky, I. A., Lebed, O. I., Free vibrations of beams and frames (2004), The McGraw-Hill Companies, Inc.
- [5]. Rao, C. K., Frequency analysis of clamped-clamped uniform beams with intermediate elastic support, Journal of Sound and Vibration, Vol.133, No.3 (1989), pp.502–509.
- [6]. Özkaya, E., Linear transverse vibrations of a simply supported beam carrying concentrated masses, Mathematical & Computational Applications, Vol.2 (2001), pp.147-151.
- [7]. Wang, D., Friswell, M. I. and Lei, Y., Maximizing the natural frequency of a beam with intermediate elastic support, Journal of Sound and Vibration, Vol.291 (2006), pp.1229-1238.
- [8]. Hassanpour, P. A., Esmailzadeh, E. and Cleghorn, W. L., Generalized orthogonality condition for beams with intermediate lumped masses subjected to axial force, Journal of Vibration and Control, First Published March 18 (2010), pp.1-19.
- [9]. Piccardo, G. and Tubino, F., Dynamic response of Euler-Bernoulli beams to resonant harmonic moving load, Structural Engineering and Mechanics, Vol.44, No.5 (2012), pp.681-704
- [10]. Bapat, C. N. and Bapat, C., Natural frequencies of a beam with non-classical boundary conditions and concentrated masses, Journal of Sound and Vibration, Vol.112, No.1 (1987), pp.177-182.
- [11]. Wu, J. S. and Lin, T. L., Free vibration analysis of a uniform cantilever beam with point mass by an analytical-and-numerical- combined method, Journal of Sound and Vibration, Vol.136, No.2 (1990), pp.201–213.
- [12]. Lin, H.P. and Chang, S.C., Free vibration analysis of multi-span beams with intermediate flexible constraints, Journal of Sound and Vibration, Vol.281 (2005) pp.155–169.
- [13]. Roy, P. K. and Ganesan, N., Transient response of a cantilever beam subjected to an impulse load, Journal of Sound and Vibration, Vol.183, No.5 (1995), pp.873-890.
- [14]. Mikata, Y., Orthogonality condition for a multi-span beam, and its application to transient vibration of a two-span beam, Journal of Sound and Vibration, Vol.314 (2008), pp.851-866.

- [15]. Xu, W. and Ervin, E. K., Parameters affecting the transient response of an impacting beam, *Shock and Vibration*, Vol. 20, No. 5 (2013), pp. 907-919.
- [16]. Srinivasan, A. V., Non-linear vibrations of beams and plates, *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol.1, No.3 (1966), pp.179-191.
- [17]. 佐藤喜一, 両端固定はりおよび一端固定, 他端単純支持はりの非線形自由振動, *日本機械学会論文集*, Vol.34, No.259 (1968), pp. 418-426.
- [18]. 佐藤喜一, 鹿内元治, 南野嘉也, ばね・質量をとりつけたはりの非線形振動, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.51, No.471 (1985), pp. 2807-2814.
- [19]. 松岡明彦, 渡辺秀夫, 宮尾健一, 防振天井の振動加速度レベル低減効果に関する実験的検討, *日本建築学会大会学術講演梗概集 D-1 環境工学 1* (1998), pp.249-250.
- [20]. Seeling, J. M. and W. H. Hoppmann II, Normal mode vibration of systems of elastically connected parallel bars, *Journal of the Acoustical Society of America*, 36(1964), pp.93-99.
- [21]. Seeling, J. M. and W. H. Hoppmann II, Impact on an elastically connected double-beam system, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 31(1964): 621-626.
- [22]. 斎藤秀雄, 長南征二, ばねで結合された二つのはりの振動, *日本機械学会論文集* Vol.34, No.267(1968), pp.1898-1907.
- [23]. 長南征二, 弾性的に結合された二つのはりの衝撃応答, *日本機械学会論文集* Vol.41, No.350(1975), pp.2815-2823.
- [24]. Seiji Chonan, Dynamical Behaviours of Elastically Connected Double-Beam Systems Subjected to an Impulsive Load, *Bulletin of the JSME* Vol.19, No.132(1976), pp.595-603.
- [25]. 浜田忠孝, 中山秀太郎, 林邦夫, 弾性的に結合された二重はり系の自由, 強制振動, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.49, No.439 (1983), pp.289-297.
- [26]. 曾我部雄次, 横山隆, 都築正之, 呉志強, 弾性的に結合されたチモシェンコ二重はり系の非定常振動, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.62, No.594 (1996), pp.429-437.
- [27]. Vu, H. V., Ordóñez, A. M. and Karnopp, B. H., Vibration of a double-beam system, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.229, No.4 (2000), pp.807-822.
- [28]. Oniszczuk, Z., Free transverse vibrations of elastically connected simply supported double-beam complex system, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.232, No.2 (2000), pp.387-403.
- [29]. Oniszczuk, Z., Forced transverse vibrations of an elastically connected complex simply supported double-beam system, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.264, No.2 (2003), pp.273-286.

- [30]. Gbadeyan, J. A. and Agboola, O. O., Dynamic behaviour of a double Rayleigh beam-system due to uniform partially distributed moving load, *Journal of Applied Sciences Research*, 8(1) (2012), pp.571-581.
- [31]. Abu-Hilal, M., Dynamic response of a double Euler-Bernoulli beam due to a moving constant load, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.297, No.3–5 (2006), pp.477–491.
- [32]. Zhang, Y. Q., Lu, Y. and Ma, G. W. , Effect of compressive axial load on forced transverse vibration of a double-beam system, *International Journal of Mechanical Science*, Vol.50, No.2 (2008), pp.299–305.
- [33]. Stojanović, V. and Kozić, P., Forced transverse vibration of Rayleigh and Timoshenko double-beam system with effect of compressive axial load, *International Journal of Mechanical Sciences*, 60(2012), pp.59-71.
- [34]. Lin, H. P., Yang, D., Dynamic responses of two beams connected by a spring-mass device, *Journal of Mechanics*, Vol.29, No.1 (2013), pp.142-155.
- [35]. Inceoğlu, S. and Gürgöze, M., Bending vibrations of beams coupled by several double spring-mass systems, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.243 No.2 (2001), pp.370-379.
- [36]. Kukla, S., Free vibration of the system of two beams connected by many translational springs, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.172, No.1 (1994), pp.130–135.
- [37]. Kukla, S., Przybylski, J. and Tomski, L., Longitudinal vibration of rods coupled by translational springs, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.185, No.4 (1995), pp.867-890.
- [38]. Joshi, A. and Upadhya, A. R., Modal coupling effects in the free vibration of elastically interconnected beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.117, No.1 (1987), pp.115–130.
- [39]. Gürgöze, M., Erdoğan, G. and Inceoğlu, S., Bending vibrations of beams coupled by a double spring-mass systems, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.243 No.2 (2001), pp.361-369.
- [40]. Dublin, M. and Friedrich, H. R., Forced response of two elastic beams interconnected by spring-damper systems, *Journal of the Aeronautical Science*, Vol.23, No.9 (1956), pp.824–829.
- [41]. Yamaguchi, H., Vibrations of a beam with an absorber consisting of a viscoelastic beam and a spring-viscous damper, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.103, No.3 (1985), pp.115–130.
- [42]. 山口秀谷, 粘弾性ばりおよびばね-ダッシュポットより成る動吸振器による片持ちばりの制振, *日本機械学会論文集 C 編*, Vol.52, No.475 (1986), pp.975-981.
- [43]. Zhang, Z., Huang, X., Zhang, Z. and Hua, H. , On the transverse vibration of Timoshenko double-beam systems coupled with various discontinuities, *International Journal of Mechanical Science*, Vol.89, December (2014), pp.222–241.

- [44]. Shankar, K. and Keane, A. J., A study of the vibration energies of two coupled beams by finite element and green function (receptance) methods, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.181, No.5 (1995), pp.801-838.
- [45]. Shankar, K. and Keane, A. J., Energy flow predictions in a structure of rigidly joined beams using receptance theory, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.185, No.5 (1995), pp.712-722.
- [46]. Ibrahim, S., Taher, A. and Marwan, A., A computational method for solving optimal control of a system of parallel beams using Legendre wavelets, *Mathematical and Computer Modelling*, 45 (2007), pp.1253-1264.
- [47]. Mermertaş, V. and Gürgöze, M., Longitudinal vibration of rods coupled by a double spring-mass system, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.202 No.5 (1997), pp.748-755.
- [48]. Gürgöze, M. and Erol, H., On laterally vibrating beams carrying tip masses, coupled by several double spring-mass systems, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.269 (2004), pp.431-438.
- [49]. Kawazoe, K., Kono, I., Aida, T., Aso, T. and Ebisuda, K., Beam-type dynamic vibration absorber comprised of free-free beam, *Journal of engineering mechanics* (1998), pp. 476-479.
- [50]. Erol, H. and Gürgöze, M., Longitudinal vibration of a double-rod system coupled by springs and dampers, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.276 (2004), pp.419-430.
- [51]. Zhang, Z., Hu, F., Li, Z. and Hua, H., Modeling and control of the vibration of two beams coupled with fluid and active links, *Shock and Vibration*, 19 (2012), pp.653-668.
- [52]. 田中信雄, 振動音響制御, コロナ社 (2009).
- [53]. 眞田明, 東山孝治, 田中信雄, 岩本宏之, 閉空間からの透過音のアクティブ制御, 日本機械学会論文集 Vol.80, No.812 (2014), DOI: 10.1299/transjsme.2014trans0066.
- [54]. Albarracin, C. M., Zannier, L. and Grossi, R. O., Some observations in the dynamics of beams with intermediate supports, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.271 (2004), pp.475-480.
- [55]. 中川憲治, 室津義定, 岩壺卓三, 工業振動学, 森北出版(1976)
- [56]. Martínez-Rodrigo, M. D., Lavado, J. and Museros, P., Dynamic performance of existing high-speed railway bridges under resonant conditions retrofitted with fluid viscous dampers, *Engineering Structures*, Vol.32, No.3 (2010), pp. 808-828.
- [57]. 笹田有, 住宅用ダイナミックダンパ, 豊田合成技報, Vol.45, No.2 (2003), pp.87-88.
- [58]. 井上, 岡野, 天井板に設置した動吸振器による重量床衝撃音の低減, 日本建築学会技術報告集, vol.19, No.42 (2013), pp.611-614.
- [59]. 岩本毅, 嶋田泰, 赤尾伸一, 安岡博人, 藤井弘義, 安岡正人, 床衝撃音の衝撃源に関する一考察, 日本建築学会大会学術講演梗概集 D-1 環境工学 1 (2005), pp.9-12.

原著論文

1. 加藤隆一, 池田隆, 原田祐志, 複数のばねで離散的に連結された二重はりの自由振動, 日本機械学会論文集, Vol.83, No.852 (2017), DOI: 10.1299/transjsme.17-00109.
2. 加藤隆一, 原田祐志, 池田隆, 複数のばね・ダッシュポットで離散的に連結された二重はりの強制振動, 日本機械学会論文集, Vol.84, No.859 (2018), DOI: 10.1299/transjsme.17-00482.

発表論文

(国際会議)

1. Kato, R., Harata, Y. and Ikeda, T., Impact Responses of Double Beams Connected by a Spring and Dashpot, The 5th Japan-Korea Joint Symposium on Dynamics & Control 2017, #J4, August 29-30, 2017, Toyohashi, Japan, (2017).

(国内会議)

1. 加藤隆一, 池田隆, 原田祐志, ばねで連結された2層天井はりの振動解析, Dynamics and Design Conference 2016, 139 (2016).
2. 春日井貴英, 池田隆, 原田祐志, 加藤隆一, ばね・ダンパで連結された二層はりの衝撃応答, 日本機械学会中国四国支部 第55期総会・講演会講演論文集, 55巻, K1003 (2017).

謝 辞

本研究を進めるにあたり，終始懇切なるご指導とご鞭撻を賜りました広島大学工学研究科 機械力学研究室 池田 隆 教授（現広島大学名誉教授）ならびに原田祐志 助教（現愛知工業大学准教授）に深く感謝の意を表します．

学位論文について，ご指導ならびに主査を務めてくださった広島大学 工学研究科 機械力学研究室 菊植 亮 教授 に深謝申し上げます．

また，副指導教官を務めてくださった制御工学研究室 佐伯 正美 教授，設計システム研究室 茨木 創一 教授，学位論文に対するご助言とご討論を賜りました広島大学 工学研究科 制御工学研究室 和田 信敬 教授 に厚くお礼を申し上げます．

学位取得について励ましてくれた会社の同僚や支えてくれた家族，亡き父や学位取得の挑戦を応援してくれた亡き母に感謝します．

本研究と同じ研究テーマに取り組み，貴重な情報を提供してくださった 広島大学平成 27 年度卒業生 山下 修五 氏，平成 28 年度卒業生 春日井 貴英 氏 に感謝します．

(付録 A) 運動方程式の無次元化

$$\begin{aligned}
 \rho_1 S_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + c_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} + E_1 I_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x_1^4} &= - \sum_{j=1}^N \left\{ K_j (w_1 - w_2) + C_j \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial w_2}{\partial t} \right) \right\} \delta(x_1 - a) \\
 &\quad + F_0 \delta(x_1 - d) \cos \omega t \\
 \rho_2 S_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + c_2 \frac{\partial w_2}{\partial t} + E_2 I_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x_2^4} &= - \sum_{j=1}^N \left\{ K_j (w_2 - w_1) + C_j \left(\frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial w_1}{\partial t} \right) \right\} \delta(x_2 - a)
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

以下の無次元量を導入する.

$$\begin{aligned}
 a' &= \frac{a}{l}, \quad E_{12} = \frac{E_2}{E_1}, \quad I_{12} = \frac{I_2}{I_1}, \quad t' = p_1 t, \quad x_1' = \frac{x_1}{l}, \quad x_2' = \frac{x_2}{l}, \quad w_1' = \frac{w_1}{l}, \quad w_2' = \frac{w_2}{l}, \quad \omega' = \frac{\omega}{p_1}, \\
 d' &= \frac{d}{l}, \quad S_{12} = \frac{S_2}{S_1}, \quad \rho_{12} = \frac{\rho_2}{\rho_1}
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

ここで p_1 は 1 次の固有振動数である.

式(A.1)に無次元量(A.2)を代入すると次式となる.

$$\begin{aligned}
 \rho_1 S_1 \frac{\partial^2 (lw_1')}{\partial (t'/p_1)^2} + c_1 \frac{\partial (lw_1')}{\partial (t'/p_1)} + E_1 I_1 \frac{\partial^4 (lw_1')}{\partial (lx_1')^4} \\
 = - \sum_{j=1}^N \left\{ K_j (lw_1' - lw_2') + C_j \left(\frac{\partial (lw_1')}{\partial (t'/p_1)} - \frac{\partial (lw_2')}{\partial (t'/p_1)} \right) \right\} \delta(x_1' - a') + F_0 \delta(x_1' - d') \cos \{ p_1 \omega' \cdot (t'/p_1) \} \\
 \rho_{12} \rho_1 S_{12} S_1 \frac{\partial^2 (lw_2')}{\partial (t'/p_1)^2} + c_2 \frac{\partial (lw_2')}{\partial (t'/p_1)} + E_{12} E_1 I_{12} I_1 \frac{\partial^4 (lw_2')}{\partial (lx_2')^4} \\
 = - \sum_{j=1}^N \left\{ K_j (lw_2' - lw_1') + C_j \left(\frac{\partial (lw_2')}{\partial (t'/p_1)} - \frac{\partial (lw_1')}{\partial (t'/p_1)} \right) \right\} \delta(x_2' - a')
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

式(A.3)を整理すると次式となる.

$$\begin{aligned}
 \rho_1 S_1 l p_1^2 \frac{\partial^2 w_1'}{\partial t'^2} + c_1 l p_1 \frac{\partial w_1'}{\partial t'} + \frac{E_1 I_1}{l^3} \frac{\partial^4 w_1'}{\partial x_1'^4} &= - \sum_{j=1}^N \left\{ K_j l (w_1' - w_2') + C_j l p_1 \left(\frac{\partial w_1'}{\partial t'} - \frac{\partial w_2'}{\partial t'} \right) \right\} \delta(x_1' - a') \\
 &\quad + F_0 \delta(x_1' - d') \cos \omega' t' \\
 \rho_{12} S_{12} \rho_1 S_1 l p_1^2 \frac{\partial^2 w_2'}{\partial t'^2} + c_2 l p_1 \frac{\partial w_2'}{\partial t'} + E_{12} I_{12} \frac{E_1 I_1}{l^3} \frac{\partial^4 w_2'}{\partial x_2'^4} \\
 = - \sum_{j=1}^N \left\{ K_j l (w_2' - w_1') + C_j l p_1 \left(\frac{\partial w_2'}{\partial t'} - \frac{\partial w_1'}{\partial t'} \right) \right\} \delta(x_2' - a')
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

式(A.4)の両辺を $\frac{E_1 I_1}{l^3}$ で、割ると次式を得る.

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_1 S_1 l^4 p_1^2}{E_1 I_1} \frac{\partial^2 w'_1}{\partial t'^2} + \frac{c_1 l^4 p_1}{E_1 I_1} \frac{\partial w'_1}{\partial t'} + \frac{\partial^4 w'_1}{\partial x_1'^4} \\
&= - \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{K_j l^4}{E_1 I_1} (w'_1 - w'_2) + \frac{C_j l^4 p_1}{E_1 I_1} \left(\frac{\partial w'_1}{\partial t'} - \frac{\partial w'_2}{\partial t'} \right) \right\} \delta(x'_1 - a') + \frac{F_0 l^3}{E_1 I_1} \delta(x'_1 - d') \cos \omega t' \\
& \frac{\rho_{12} S_{12} \rho_1 S_1 l^4 p_1^2}{E_1 I_1} \frac{\partial^2 w'_2}{\partial t'^2} + \frac{c_2 l^4 p_1}{E_1 I_1} \frac{\partial w'_2}{\partial t'} + E_{12} I_{12} \frac{\partial^4 w'_2}{\partial x_2'^4} \\
&= - \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{K_j l^4}{E_1 I_1} (w'_2 - w'_1) + \frac{C_j l^4 p_1}{E_1 I_1} \left(\frac{\partial w'_2}{\partial t'} - \frac{\partial w'_1}{\partial t'} \right) \right\} \delta(x'_2 - a')
\end{aligned} \tag{A.5}$$

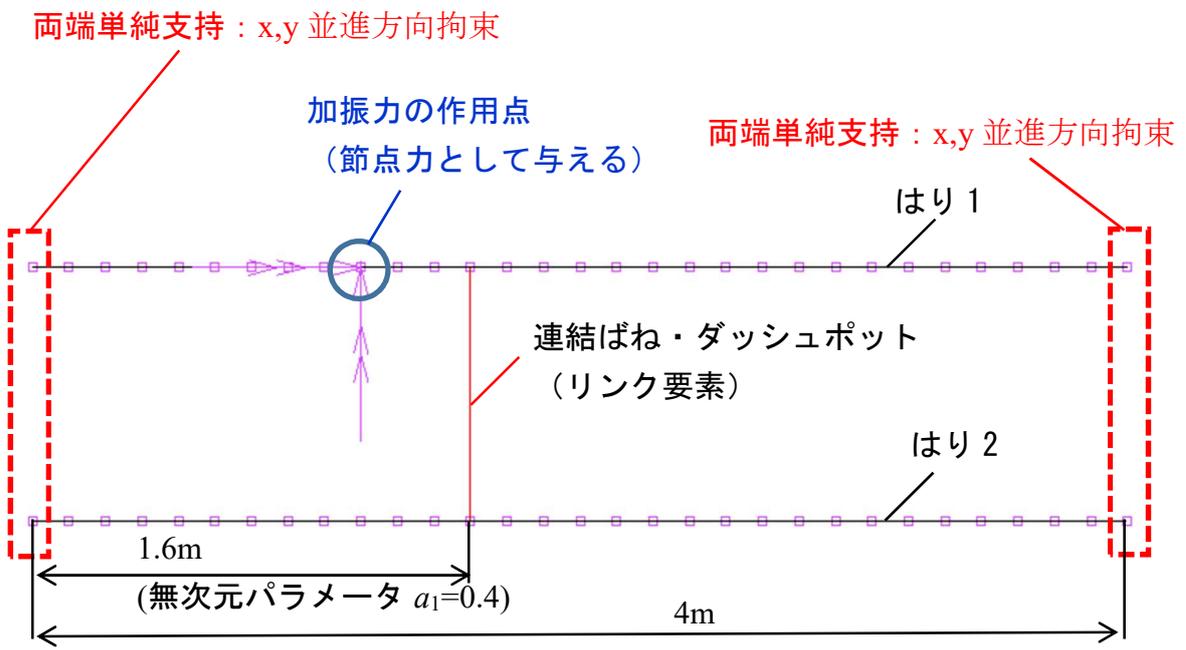
ここで次のパラメータを定義すると

$$\begin{aligned}
\mu'_1 &= \left(\frac{\rho_1 S_1}{E_1 I_1} \right) l^4 p_1^2 = \frac{l^4 p_1^2}{e_1^2}, \quad c'_1 = \frac{c_1 l^4 p_1}{E_1 I_1}, \quad K'_j = \frac{K l^4}{E_1 I_1}, \quad C'_j = \frac{C l^4 p_1}{E_1 I_1}, \quad F'_0 = \frac{F_0 l^3}{E_1 I_1} \\
\mu'_2 &= \frac{\rho_{12} S_{12} \rho_1 S_1 l^4 p_1^2}{E_1 I_1} = \rho_{12} S_{12} m'_1, \quad c'_2 = \frac{c_2 l^4 p_1}{E_1 I_1}, \quad k'_2 = E_{12} I_{12}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

式(A.5)は次式となる.

$$\begin{aligned}
\mu'_1 \frac{\partial^2 w'_1}{\partial t'^2} + c'_1 \frac{\partial w'_1}{\partial t'} + \frac{\partial^4 w'_1}{\partial x_1'^4} &= - \sum_{j=1}^N \left\{ K'_j (w'_1 - w'_2) + C'_j \left(\frac{\partial w'_1}{\partial t'} - \frac{\partial w'_2}{\partial t'} \right) \right\} \delta(x'_1 - a') \\
&\quad + F'_0 \delta(x'_1 - d') \cos \omega t' \\
\mu'_2 \frac{\partial^2 w'_2}{\partial t'^2} + c'_2 \frac{\partial w'_2}{\partial t'} + k'_2 \frac{\partial^4 w'_2}{\partial x_2'^4} &= - \sum_{j=1}^N \left\{ K'_j (w'_2 - w'_1) + C'_j \left(\frac{\partial w'_2}{\partial t'} - \frac{\partial w'_1}{\partial t'} \right) \right\} \delta(x'_2 - a')
\end{aligned} \tag{A.7}$$

(付録 B) FEM 解析モデル
[連結要素 (ばねとダッシュポット) が 1 組の場合]



はり 1 とはり 2 の要素数・節点数

要素数 : 各はりとも 30 要素, 節点数 31 (2 次元はり要素)

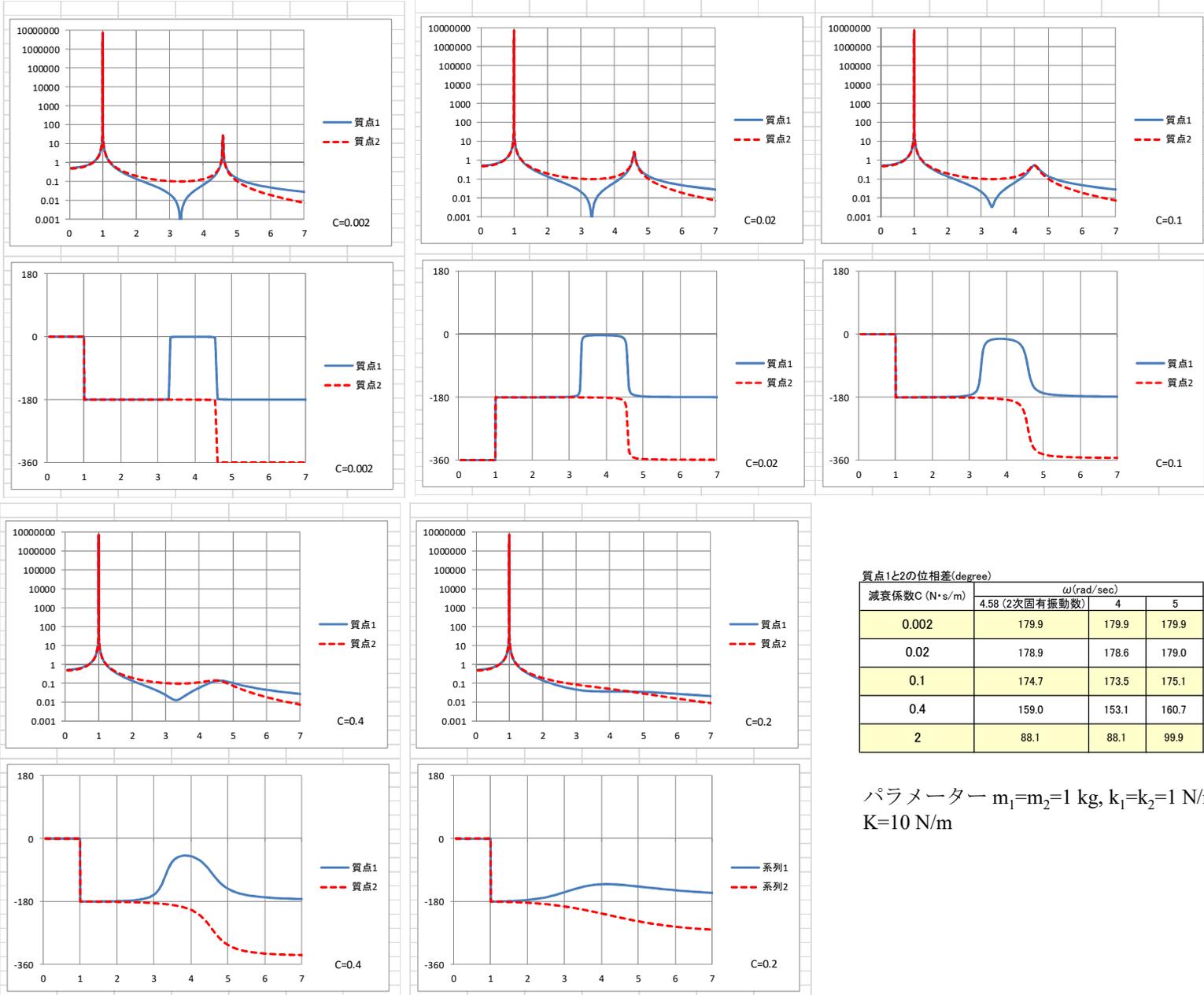
パラメータの定義

はりの密度, 幅, 厚さおよびおよび励振力は, 数値として設定する

連結要素

はりの節点をリンクと呼ばれる要素で連結し, ばね定数と減衰係数は数値として設定する

(付録C) 減衰係数が位相遅れに与える影響 (2質点モデル)



パラメーター $m_1=m_2=1$ kg, $k_1=k_2=1$ N/m,
 $K=10$ N/m

(付録 D) 1 自由度系の過渡応答の一般解

質量 m , ばね定数 k , 減衰係数 c の 1 自由度系に外力 $F \sin \omega t$ が作用する場合の一般解を求める。このとき、運動方程式は次式となる。

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \sin \omega t \quad (\text{C1})$$

まず、式(C1)の右辺が 0 の場合を考える。このとき、解である x を

$$x = X e^{\lambda t} \quad (\text{C2})$$

と仮定する。ここで、 X, λ は未知定数とする。式(C1)に式(C2)を代入すると、次式を得る。

$$X(m\lambda^2 + c\lambda + k) = 0 \quad (\text{C3})$$

式(C3)を λ について解くと次式を得る。

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4mk} \quad (\text{C4})$$

$c < 2\sqrt{mk}$ の場合、式(C4)から λ は共役な複素数であり、次式で表せる。

$$\lambda = -\sigma \pm j\omega_d \quad \left(\sigma = \frac{c}{2m}, \omega_d = \frac{1}{2m} \sqrt{4mk - c^2} \right) \quad (\text{C5})$$

式(C2)に式(C5)を代入し、任意定数 X_1, X_2 を用いると、次式を得る。

$$x = e^{-\sigma t} (X_1 e^{j\omega_d t} + X_2 e^{-j\omega_d t}) \quad (\text{C6})$$

次に、式(C1)の場合を考える。このとき、解である x を

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (\text{C7})$$

と仮定する。ここで、 A, B は未知定数とする。式(C1)に代入し、両辺の係数を比較すると、

$$\left. \begin{aligned} (k - m\omega^2)A + c\omega B &= 0 \\ -c\omega A + (k - m\omega^2)B &= F \end{aligned} \right\} \quad (\text{C8})$$

を得る。式(C8)より未知定数 A, B を求め、式(C7)に代入すると、次式を得る。

$$x = -\frac{c\omega F}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \cos \omega t + \frac{(k - m\omega^2)F}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \sin \omega t \quad (\text{C9})$$

ここで、式(C8)に三角関数の合成を用いると、次式で表せる。

$$\begin{aligned} x &= X_0 \sin(\omega t + \phi) \\ X_0 &= \frac{F}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}, \phi = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \end{aligned} \quad (\text{C10})$$

式(C10)は特解である。よって、一般解は式(C6), (C10)より、次式となる。

$$x = e^{-\sigma t} (X_1 e^{j\omega_d t} + X_2 e^{-j\omega_d t}) + X_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{C11})$$

(付録 E) 残留振動振幅の最小条件

$0 \leq t \leq T/2$ において, 1 自由度系のばね, 質量, ダンパ系に外力 $F_0 \sin \omega t$ を加えた場合の運動方程式は次のようになる.

$$m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = F_0 \sin \frac{2\pi}{T}t = F_0 \sin \omega t, (0 \leq t \leq T/2) \quad (D1)$$

これより一般解は, 次のようになる.

$$x_1(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t) + X_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (D2)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}, \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2},$$

$$X_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}, \quad \varphi = -\tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

ここで A, B は初期条件を与えたときに決まる定数である. 今, 初期条件は $x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0$ なので, 式(D2)に代入すると, それぞれ次のようになる.

$$A = -X_0 \sin \varphi, \quad B = -\frac{X_0}{\omega_d} (\zeta\omega_n \sin \varphi + \omega \cos \varphi) \quad (D3)$$

さらに, $c = 0$ にしたとき, $\zeta = 0, \varphi = 0, \omega_d = \omega_n, X_0 = F_0 / (k - m\omega^2)$ となる. これより, 式(D2) は次のようになる.

$$x_1(t) = X_0 \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \quad (D4)$$

さらに式(D4)を t で微分すると次のようになる.

$$\dot{x}_1(t) = X_0 (\omega \cos \omega t - \omega \cos \omega_n t) \quad (D5)$$

式(D4), (D5)に $x_1(T/2) = \dot{x}_1(T/2) = 0$ を代入し, $\omega = 2\pi/T$ であることを考量すると,

$$\begin{cases} \sin \frac{\omega_n T}{2} = 0 \\ \cos \frac{\omega_n T}{2} = -1 \end{cases} \quad (D6)$$

となる. 式(D6)を ω_n について解くと, 次式を得る.

$$\begin{cases} \frac{\omega_n T}{2} = m\pi \\ \frac{\omega_n T}{2} = (2n+1)\pi \end{cases} \quad (m: \text{整数}, n \geq 1) \quad (D7)$$

式(D7)より,

$$\frac{\omega_n}{\omega} = (2n+1) \quad (n \geq 1) \quad (D8)$$

という条件が得られる.