

(論文)

# 地方公共財のスピルオーバーと最適補助率の関係の再検討

楊 通\* 大澤 俊一†

## 【要約】

地方公共財から生じるスピルオーバーの大きさと、国から地方への最適補助率の関係を示す従来のモデルでは、公共財は消費的外部性しか持たなかった。そこで本稿では、地方公共財が大気の改善のための政策などのように、その地域の住民の効用だけでなく地域の生産性も上げるものとする。さらに他地域への消費・生産両面の外部性を持つ場合にモデルを拡張し、公共財のスピルオーバーの大きさ、地域の限界生産性と最適補助率の関係を検討する。そして、従来より一般化した結論を導き、興味深い最適補助率についての新たな命題を導き出している。

【キーワード】 地方公共財、スピルオーバー、最適補助率

## 1. はじめに

本論文では、地方公共財が地域の住民の効用を直接引き上げ、スピルオーバー効果として他の地域の住民の効用を引き上げる従来型の公共財の性質に加えて、当該地域の生産性を引き上げるという性質を持つ。そしてさらにそれだけでなく、スピルオーバー効果として他地域の生産性も高める性質も併せ持つ、より一般的なケースを仮定して、中央政府から地方への最適補助率を導き出す。出てくる結論はBoadway et al. (1989) やOgawa (2006)、小川 (2006) の結論を特殊なケースとして含み、また地域生産性への外部効果と消費への外部効果の大小関係によって、地域の限界生産性の最適補助率との関係が反対になるなど、様々な興味深い結論が導き出されている。

このように、公共財の供給水準が供給する地域の住民の効用関数と生産関数の両方に入る変数となり、スピルオーバー効果が他の地域の住民の効用と生産にも影響を与える地方公共財は、例えば環境政策、治安のための政策、教育、道路などがあげられる。ある地域の空気がきれいになると、他の地域の空気も多少きれいになるので、効用も上がるし生産性も高まる。治安についても同様である。教育も生産を高める効果と教育を受けることによる満足の上昇も考えられ、スピルオーバー

効果も期待できる。道路は生産にもレジャーのためにも必要である。

効率的な公共財供給と最適補助率の関係を扱った重要な論文としては、まずBoadway et al. (1989) があげられるが、ここで示されるモデルでは、公共財を自発的に供給する個人とそれに補助金を与える国しか存在せず、公共財を供給する地方政府は存在しない。Roberts (1992) も同様のモデルで、補助金の効率性などを分析している。Akai and Ihori (2002) は、個人を地方政府に置き換え、国と地方がそれぞれ公共財を供給するモデルとして、国の供給する公共財が過剰である場合についての考察を行っている。そして個人の供給する公共財から地方の供給する地方公共財に置き換えることにより、公共財の外部性は地域間の地方公共財のスピルオーバー効果になるので、公共財を供給する地域の住民が受ける便益と他地域の住民が受ける便益では必ずしも同じにならないという、「スピルオーバー効果の不完全性」を考慮している。これにより、Boadway et al. (1989) によって示された最適補助率は、より一般化されたといえる。Ogawa (2006) と小川 (2006) では、この最適補助率と地域数、スピルオーバー効果の度合いの関係が示されており、資本が移動できない場合、スピルオーバーの度合いが大きいほど、

\* 広島大学大学院社会科学研究科博士課程前期

† 広島大学大学院社会科学研究科教授

地域の数が多いほど、最適補助率は上がることを示している。また、Ogawa (2006) と小川 (2006) は、資本が自由に移動できる場合、スピルオーバー効果が財政上の外部効果に伴う資源配分上の歪みを是正する要因となるので、スピルオーバーの度合いが大きいほど、中央政府が設定すべき最適補助率が大きくなるか小さくなるかは明らかではないということを検討した。

ただし以上の論文では、すべて地方政府あるいは個人の供給する公共財は、一般的な公共財と仮定されている。そこで本稿では、Zodrow and Mieszkowski (1986) によって仮定された生産関数を応用することにより、消費的外部効果だけではなく生産的外部効果を含み、地方政府の供給する公共財・公共サービスが公共要素の特性も持つ地方公共財の場合にモデルを直し、公共要素の特性も持つ地方公共財についてのスピルオーバーの度合い、地域の限界生産性と最適補助率の関係を検討する。

## 2. モデル

ここで考える経済は  $n$  個の同質地域からなるとする。地域  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) には、地域に固定的な住民が居住しており、地域の人口を 1 とする。住民は私的財  $x_i$ 、環境などの公共要素の特性も持つ地方公共財  $G_i$  から効用を得るものとし、一般的な性質を持つ効用関数は  $u_i(G_i, x_i)$  で表される。ここで  $G_i$  は次の様に表されるとする。

$$G_i = g_i + \beta \sum_{j \neq i} g_j \quad (1)$$

ここで  $g_i$  は地域  $i$  で供給される公共要素の特性も持つ地方公共財の供給水準である。また、 $\beta$  ( $0 \leq \beta \leq 1$ ) は公共要素の特性も持つ地方公共財についての消費的外部効果 (スピルオーバーの度合い) を表すパラメーターである。後に見るように、 $g_i$  は一般的な公共財と同様に効用関数の中に入り、効用を直接引き上げる効果を持つが、同時にその地域の

生産水準も引き上げる、公共投資の性質も持つ。例えば、環境や安全性の改善のための政策などがこの性質を持つ財と言える。

地域  $i$  の所得は  $f_i(K_i)$  で与えられているとし、 $\frac{df_i(K_i)}{dK_i}$  を  $f_i'(K_i)$  で示す。 $K_i$  は  $K_i = g_i + \gamma \sum_{j \neq i} g_j$  で示され、地域  $i$  における生産力に影響を与えられる公共要素の特性も持つ地方公共財の総量を表す。 $\gamma$  ( $0 \leq \gamma \leq 1$ ) は公共要素の特性も持つ地方公共財についての生産的外部効果を表すパラメーターである<sup>1</sup>。このもとで地方政府は地方公共財を供給する財源のために一括税である地方税  $z_i$  を徴収する。さらに、中央政府は補助金支出の財源として一括税である国税  $h_i$  を徴収する。この時、地域  $i$  の住民の予算制約式は次のようになる。

$$x_i = f_i(K_i) - z_i - h_i \quad (2)$$

地方政府  $i$  の予算制約式は次式のようになる。

$$z_i + s_i = g_i \quad (3)$$

ここで  $s_i$  は地方政府が受け取る補助金である。

次に、中央政府は定率補助金制度のもとで補助金を支給するものとする。補助金  $s_i$  は次式で表される。

$$s_i = m_i g_i \quad (4)$$

ここで、 $m_i$  は公共要素の特性も持つ地方公共財についての地域  $i$  の定率補助率である。国税  $h_i$  は、次の中央政府の予算制約式を満たすように決定される。

$$\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n h_i = \sum_{i=1}^n m_i g_i \quad (5)$$

また、ここでは、 $0 < f_i'(K_i) < 1 - m_i$  かつ  $f_i''(K_i) < 0$  とする<sup>2</sup>。

1 これはZodrow and Mieszkowski (1986) の生産関数を応用したものである。ただし、Zodrow and Mieszkowski (1986) の仮定では生産的外部効果はなく、本論文では単純化のため民間資本は存在しない。また彼らは、生産的外部効果については分析していない。

2 後出の(6)式から見ると、もし  $f_i'(K_i) > 1 - m_i$  だと、最適な配分の下では公共財と私的財の限界代替率  $\frac{\partial u_i}{\partial G_i} / \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$  は負になる。これは、パラメーターと効用関数・生産関数の一階微分が非負であるような仮定と矛盾する。

地方政府の目的は地域住民の効用を最大化することであると仮定すれば、地方政府にとっての最適化問題は、(1)式から(4)式までを制約条件として $u_i = u_i(G_i, x_i)$ を最大化する問題として次の様に定式化することができる。

$$\begin{aligned} \max_{z_i, g_i} & u_i = u_i(G_i, x_i) \\ \text{s.t.} & G_i = g_i + \beta \sum_{j \neq i} g_j \\ & x_i = f_i(K_i) - z_i - h_i \\ & K_i = g_i + \gamma \sum_{j \neq i} g_j \\ & z_i + s_i = g_i \\ & s_i = m_i g_i \end{aligned}$$

地域*i*は、他地域*j*の税率 $z_j$ 、他地域*j*の公共要素の特性も持つ地方公共財の水準 $g_j$ を所与として、自分の税率 $z_i$ 、公共要素の特性も持つ地方公共財の水準 $g_i$ についての最大化を行う。代入法を使って $u_i$ を $g_i$ で微分して整理すると、一階の条件は

$$\frac{\partial u_i}{\partial g_i} = \frac{\partial u_i}{\partial G_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} [f_i'(K_i) - (1 - m_i)] = 0 \quad (6)$$

となる<sup>3</sup>。

一方、パレート最適条件は以下のような最適化条件から導出される。

$$\begin{aligned} \max_{x_i, g_i} & \sum_{i=1}^n u_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n g_i = \sum_{i=1}^n f_i(K_i) \end{aligned}$$

ラグランジュ関数は

$$L(g_i, x_i) = \sum_{i=1}^n u_i + \lambda [\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n g_i - \sum_{i=1}^n f_i(K_i)]$$

となり、微分すると、

$$\frac{\partial L}{\partial g_i} = \frac{\partial u_i}{\partial G_i} + \beta \sum_{j \neq i} \frac{\partial u_j}{\partial G_j} + \lambda [1 - f_i'(K_i) - \gamma \sum_{j \neq i} f_j'(K_j)] = 0$$

3 効用関数に通常の仮定（無差別曲線が原点に対して強い意味で凸である仮定）を置けば二階の条件は必ず成り立つ。 $f_i(K_i)$ については、先に示し

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \lambda = 0$$

となり、整理すると、

$$\frac{\frac{\partial u_i}{\partial G_i} + \beta \sum_{j \neq i} \frac{\partial u_j}{\partial G_j}}{1 - f_i'(K_i) - \gamma \sum_{j \neq i} f_j'(K_j)} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (7)$$

となる<sup>4</sup>。対称均衡の性質を用いることによって、

$$\frac{1 + \beta(n-1)}{1 - [1 + \gamma(n-1)] f_i'(K_i)} \frac{\partial u_i}{\partial G_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (8)$$

となるので、(8)式を(6)式に代入すると、最適補助率とスピルオーバーの度合いの関係を(9)式のように得る。

$$m_i = \frac{\beta(n-1)}{1 + \beta(n-1)} + \frac{(\gamma - \beta)(n-1)}{1 + \beta(n-1)} f_i'(K_i) \quad (9)$$

ここで、 $f_i'(K_i)$ は公共要素の特性も持つ地方公共財の限界生産性である。また、(9)式を書き直すと、

$$m_i = \frac{\beta(n-1)}{1 + \beta(n-1)} [1 - f_i'(K_i)] + \frac{\gamma(n-1)}{1 + \beta(n-1)} f_i'(K_i) \quad (9')$$

となる。

この時、中央政府の予算制約式

$$\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n h_i = \sum_{i=1}^n m_i g_i$$

は満たされている。

また、中央政府の目標 $\max_{h_i, m_i} \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n u_i(G_i, x_i)$ が実現されている。

(9)式を変形することによって、以下のようになる。

たように $0 < f_i'(K_i) < 1 - m_i$ 、 $f_i''(K_i) < 0$ を仮定している。

4 二階の条件が成り立つかは、様々な条件による。

$$m_i = (1 - a) \left[ \frac{\beta(n-1)}{1 + \beta(n-1)} \right] + a \left[ \frac{\gamma(n-1)}{1 + \gamma(n-1)} \right] \quad (10)$$

ここで、 $a = [1 + \gamma(n-1)] f_i'(K_i) / (0 \leq a \leq 1)$  とする<sup>5</sup>。生産の外部性が大きい ( $n, \gamma$  が大きい) か限界生産性  $f_i'(K_i)$  が大きいと、ウェイト  $a$  が大きくなり、(10) 式の第2項鍵括弧  $\frac{\gamma(n-1)}{1 + \gamma(n-1)}$  に近づき、逆の場合、(10) 式の第1項鍵括弧  $\left[ \frac{\beta(n-1)}{1 + \beta(n-1)} \right]$  に近づくことが分かる。なお、 $a = 0$  の場合は、最適補助率は以下ようになる。

$$m_i = \frac{\beta(n-1)}{1 + \beta(n-1)} \quad (11)$$

このとき、最適補助率は一般的な地方公共財についての最適補助率であり、Ogawa (2006) と小川 (2006) が既に示している最適補助率と同じものである。さらに  $\beta = 1$  とすると、Boadway et al. (1989) の導出した最適補助率の式と同じになる。 $a = 1$  の場合は、最適補助率は以下ようになる。

$$m_i = \frac{\gamma(n-1)}{1 + \gamma(n-1)} \quad (12)$$

このとき、最適補助率は地方公共財の消費的外部効果  $\beta$  には全く依存せず、生産的外部効果  $\gamma$  と地域数  $n$  にのみ依存する。

また、(10) 式は (11) 式と (12) 式の線形結合として表現できることが分かる。

### 3. 比較静学の結果

以上の分析により、以下の結果が得られる。

- 5 (8) 式から見ると、もし  $a > 1$  だと、最適な配分の下では公共財と私的財の限界代替率  $\frac{\partial u_i}{\partial G_i} / \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$  は負になる。これは、パラメーターと効用関数・生産関数の一階微分が非負であるような仮定と矛盾する。
- 6 これは (9) 式を用いると以下のようにも説明できる。まず、 $\frac{\partial m_i}{\partial \beta} > 0$  であるためには (9) 式より、

- (i)  $a = 0$  の場合、すなわち  $f_i'(K_i) = 0$  の場合は、(11) 式から見ると、Ogawa (2006) と小川 (2006) が既に示しているように、一般的な地方公共財についての消費的外部効果  $\beta$  が大きいほど、または地域の数  $n$  が大きいほど、一般的な地方公共財の最適補助率  $m_i$  は上がるということがわかる。それと同様に、 $a = 1$  の場合は、(12) 式から見ると、公共要素についての生産的外部効果  $\gamma$  が大きいほど、または地域の数  $n$  が大きいほど、公共要素の最適補助率  $m_i$  は上がるということがわかる。

- (ii)  $0 < a < 1$  の場合は、 $\frac{\partial m_i}{\partial \gamma} > 0$  なので、公共要素の特性も持つ地方公共財についての生産的外部効果  $\gamma$  が大きいほど、公共要素の特性も持つ地方公共財の最適補助率  $m_i$  は上がるということがわかる。

なお、 $0 < a < 1$  の場合は、(10) 式より  $\frac{\partial m_i}{\partial \beta} > 0$  となる<sup>6</sup>。したがって、公共要素の特性も持つ地方公共財についての消費的外部効果  $\beta$  が大きいほど、たとえ公共要素の特性も持っていない、地方公共財の最適補助率  $m_i$  は必ず上がるということがわかる。

また、 $0 < a < 1$  の場合は、 $\frac{\partial m_i}{\partial n} > 0$  なので、地域の数  $n$  が大きいほど、公共要素の特性も持つ地方公共財の最適補助率  $m_i$  は上がるということが分かる。つまり、地域の数  $n$  と公共要素の特性も持つ地方公共財の最適補助率  $m_i$  には正の関係があるということである。

以上より、以下の命題が成り立つ。

**命題1**：たとえ地方公共財が生産要素の性質

$0 < f_i'(K_i) < \frac{1}{1 + \gamma(n-1)}$  という条件を満たさなければならぬ。(8) 式から見ると、公共財と私的財の限界代替率  $\frac{\partial u_i}{\partial G_i} / \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$  が正であると仮定しているので、 $0 < f_i'(K_i) < \frac{1}{1 + \gamma(n-1)}$  となければならぬ。つまり、 $\frac{\partial m_i}{\partial \beta} > 0$  という条件は満たされている。

も持つとしても、消費的外部効果が大きいほど、生産的外部効果が大きいほど、そして地域の数が多いほど、中央政府から地方政府への、この公共財への最適補助率は大きくなる。

(iii) (9) 式より、地方公共財が生産要素としての性質も持つ時、最適補助率は、その性質がない時に比べて、生産的外部性が消費的外部性より大きい時大きくなり、小さい時小さくなる。同じときは同じであることが分かる。

ここで、このことについての直感的理解を促す説明を行う。ここでの地方公共財は、公共要素としての性質も持ち、その地方の生産性を引き上げる効果も持つ。このことについては、その地方政府自身も知っているの、その分公共財の供給を自発的に増やすので、中央政府から地方政府への補助金の額は、社会全体のことを考えても減らしてよいことになる。この最適補助率を下げる効果は、(9') 式の右辺第1項からわかるように、消費的外部効果  $\beta$  が大きいほど大きい。

一方で、この公共要素としての性質は、生産の外部効果も生じさせ、(9') 式の右辺第2項が示すように、その大きさを表す  $\gamma$  が大きいほど、最適補助率は大きくなる。

したがって、公共要素としての性質も持つ地方公共財の最適補助率は、その性質がない時のそれに比べて、 $\gamma > \beta$  の時大きくなり、 $\gamma < \beta$  の時小さくなる。そして  $\gamma = \beta$  の時は同じになる。ゆえに以下の命題が成り立つ。

**命題2**：地方公共財が生産要素としての性質も持つとき、最適補助率は、その性質がない時に比べて、生産的外部性が消費的外部性より大きい時大きくなり、小さい時小さくなる。同じときは同じである。

(iv)  $\gamma = 0$  の時は、(9') 式より

$$m_i = \frac{\beta(n-1)}{1+\beta(n-1)} [1 - f_i'(K_i)]$$
 となる。地域生産性の高まりにより、消費的外部効果に伴う資源配分の歪みを一部是正するので、公共要素の特性も持つ地方公共財の最適補助率  $m_i$  は一般的な地方公共財についての最適補助率

$m_i$  の形より小さくなる。そして、この公共財の限界生産性が高いほど、 $m_i$  は低くなる。

**命題3**：生産的外部性がない時 ( $\gamma = 0$ )、生産要素の性質も持つ公共財の最適補助率はその性質がない場合より小さくなる。そしてこの公共財の限界生産性が高いほど小さくなる。

(v) (9) 式から見ると、

$$\frac{\partial m_i}{\partial f_i'(K_i)} = \frac{(n-1)(\gamma - \beta)}{1 + \beta(n-1)}$$
 となるので、最適補助率  $m_i$  と公共要素の特性も持つ地方公共財の限界生産性  $f_i'(K_i)$ 、消費的外部効果  $\beta$ 、生産的外部効果  $\gamma$  についての関係は以下の表で示している。

$\gamma$ と $\beta$ の関係	$m_i$ と $f_i'(K_i)$ の関係
$\gamma > \beta$	$\frac{\partial m_i}{\partial f_i'(K_i)} > 0$ (正の関係)
$\gamma < \beta$	$\frac{\partial m_i}{\partial f_i'(K_i)} < 0$ (負の関係)
$\gamma = \beta$	$\frac{\partial m_i}{\partial f_i'(K_i)} = 0$ (無関係)

この表からわかるように、 $\gamma$  と  $\beta$  の大きさによって、 $m_i$  と  $f_i'(K_i)$  の関係は異なる。公共要素の特性も持つ地方公共財についての消費的外部効果が生産的外部効果よりも小さい場合、つまり、 $\gamma > \beta$  の場合、公共要素の特性も持つ地方公共財の限界生産性  $f_i'(K_i)$  が大きいほど、最適補助率  $m_i$  は上がるということを示している。逆に、公共要素の特性も持つ地方公共財についての消費的外部効果が生産的外部効果よりも大きい場合、つまり、 $\gamma < \beta$  の場合、公共要素の特性も持つ地方公共財の限界生産性  $f_i'(K_i)$  が大きいほど、最適補助率  $m_i$  は下がるということを示している。

**命題4**：生産的外部性が消費的外部性より大きいなら、公共財の限界生産力が高いほど、最適補助率は上がり、逆の場合は下がる。同じ場合は変化しない。

#### 4. 結論

これまでの研究によって導出された最適補助率とスピルオーバーの大きさの関係が、本稿では、消費的外部効果だけではなく、生産的外部効果を含み、効用と生産の両方に外部性が発生するため、より一般化された。たとえば、もし公共財が一般的な公共財である ( $a=0$  の場合) なら、最適補助率はOgawa (2006) と小川 (2006) が示した式と同じになり、スピルオーバーの度合いが大きいほど、地域の数  $n$  が大きいほど、最適補助率は上がることを示している。

しかしながら、大気の改善などの公共要素の特性も持つ地方公共財を考慮すると、以下のような結果が得られる。

まず、このような公共要素の特性も持つ地方公共財の場合でも、消費についての外部性  $\beta$  が大きいほど、また地域数  $n$  が多いほど、最適補助率は高まる。また、生産性についての外部性が大きいほど、最適補助率は高まる。

また、生産性についての外部性がない場合、その地域への限界生産性が高いほど、最適補助率は低い。

次に、地方公共財が生産要素としての性質も持つとき、最適補助率は、その性質がない時に比べて、生産的スピルオーバーが消費的スピルオーバーより大きい時大きくなり、小さい時小さくなり、同じときは同じであるということが示された。

さらに、生産的スピルオーバーがない時 ( $\gamma = 0$ )、公共要素の性質も持つ公共財の最適補助率はその性質がない場合より小さくなる。そしてこの公共財の限界生産性が高いほど小さくなること、生産的スピルオーバーが消費的スピルオーバーより大

きいなら、公共財の限界生産力が大きいほど、最適補助率は上がり、逆の場合は下がり、同じ場合は変化しないことなどが示された。

#### [謝辞]

本論文は2名の匿名のレフェリーに御精読いただいた上で有益なコメントをいただき、改善することができた。深く感謝を申し上げます。

#### [参考文献]

- 小川光 (2006)、地方政府間の政策競争－税・支出の競争と外部効果－、『フィナンシャル・レビュー』、第82号、pp.10-36。
- Akai, N. and T. Ihori, (2002), “Central Government Subsidies to Local Public Goods”, *Economics of Governance* 3, pp.227-239.
- Boadway, R., P. Pestieau, and D. Wildasin, (1989), “Non-Cooperative Behavior and Efficient Provision of Public Goods”, *Public Finance/Finances Publiques* 44, pp.1-7.
- Ogawa, H., (2006), “Tax Competition, Spillovers, and Subsidies”, *Annals of Regional Science* 40, pp.849-858.
- Roberts, R.D., (1992), “Government Subsidies to Private Spending on Public Goods”, *Public Choice* 74, pp.133-152.
- Zodrow, G.R., and P. Mieszkowski, (1986), “Pigou, Tiebout, Property Taxation, and the Underprovision of Local Public Goods”, *Journal of Urban Economics* 19, pp.356-370.

\* 本稿は、投稿時に複数の匿名レフェリーによる査読という要件を満たしたものである。

(Article)

## Reexamining the Relationship between the Spillover Effects of Local Public Goods and Optimal Revenue-Matching Grant Rates

Tong Yang †

Toshikazu Ohsawa ‡

### Abstract

The conventional model indicates a relationship between the degrees of spillover arising from local public goods and the optimal revenue-matching grant rates from central government to local government. In the model, an increase in local public goods only impacts utilities. Therefore, we expand the model in this paper to include general public goods, general public capital, and public goods with the characteristics of local public capital. We examine the relationship between the degree of spillover effect and the optimal revenue-matching grant rates, and consider the external effect of both consumption and production. Thus, we obtain a more generalized conclusion and provide a new perspective.

**Key words:** Local public goods, Spillovers, Optimal revenue matching grant rates

---

† Master's Course Student, Graduate School of Social Sciences, Hiroshima University

‡ Professor, Graduate School of Social Sciences, Hiroshima University

