広島大学附属福山中・高等学校
中等教育研究紀要　第35巻

数学に対する興味・関心を高める取り組み

入川　義克

夏休み・冬休みには、まとまった量の問題を解くという課題が多かった。また、授業を振り返ってみても、クラスという学習集団を対象として、数学的な知識・技能を伝達し、解法の過程をあらかじめ予想して進める形態の授業が多かった。限られた時間内で教えなければならない現状を考えれば、このような進め方も必要である。
しかし、授業の展開の仕方にもよるが、このような進め方だけでは、多くの生徒にとって受け身の授業になってしまう。生徒の多様な考え方を引き出したり、数学的な考え方や数学に対する興味・関心を高め、生徒が学習の主体者として意欲的に課題に取り組んでいく課題や授業を計画的に取り入れていけば、私達が期待する以上の効果を上げることができる。

1．「数の歴史と零の発見」についてのレポートより

数学の学習を始めるにあたって、中学１年生には「数の歴史と零の発見」についてのレポートを夏休みの課題とした。

参考図書を探すことから始めなければならず、そのことでかなり苦労したようだが、提出されたレポートの内容は素晴らしく、労作が多かった。

「少年数学史(金田数正)」・「数学って何？(アイザック　アシモフ)」・「数学物語(矢野健太郎)」・「数学質問箱(矢野健太郎)」・「数学の手帖(矢野健太郎)」・「すばらしい数学者達(矢野健太郎)」・「数学の考え方(矢野健太郎)」・「数のしくみ(仲田紀夫)」・「続　数学物語(仲田紀夫)」・「数のはなしⅡ(仲田紀夫)」・「数学のはなし(岩田倫典)」・「数は生ている(銀林　浩、榊　忠男)」・「零の発見(吉田洋一)」・「数学の世界(ランスロット　ホグベン)」・「ゼロから無限へ(コンスタント　レイド)」・「数と図形の発明・発見物語(板倉聖宣)」・「算数・数学学習大事典(中島健三、杉岡司馬)」・「数学の歴史(ジョルジュ　イフラー)」・「数学探検記(バーナード)」・「数の不思議(草場公邦)」・「数学入門(遠山　啓)」・「数学史にひろう(岡部　進)」・「数学ゲーム(フランコ　アゴスチーニ)」・「楽しむ数学１０話(足立恒雄)」…等を読んでレポートをまとめている。生徒の感想を幾つか挙げておこう。

S_1『このレポートをまとめて、私達が普段何気なく使っている０と１～９までのアラビア数字がこんなに長い年月をかけて、いろんな人の力で出来あがっていたことを知り、とても驚きました。特に、「０の発見」は、一番心に残りました。今、もし０がなかったら、計算をするのも大変になって技術などもこんなに発達できなかったのではないかなぁと思います。他にも、いろんな国の数の歴史がよく分かって、とても勉強になりました。ただ、課題は、「数の歴史」だったのに「数字の歴史」になっちゃったかなぁというのが少し気になるけど、また、機会があったら、数学についていろいろ調べてみたいと思います。』

S_2『いろいろの本を読んだが、どの本もむずかしい事ばかり書いてあって理解するのに大変苦労した。でも、矢野健太郎という人の本はわかりやすく説明してあったので、本が見つかったら２

日間で終わった。5つのテーマに分けて自分の調べたいことを調べていったのでまとめながらきちんとできたと思います。数のことについて色々なことが分かりました。この課題は大変だったけどいろんなことが分かっておもしろかったです。』

参考図書を読んでテーマに沿って自分の考えを取り入れながらまとめていくことは、生徒にとってしんどい課題であるが、どのレポートからも真剣に取り組んだ姿勢が窺えた。

2.「可変思考で創造しよう」を読んで

以前、広島大学のT教授に「数学と人生」と題した講演をしていただいたことがある。日常生活の中で「数学的な考え方」がどのように使われているかを生徒に分かり易く話され私自身も深く感激した。

このときの感激を再現し、数学の素晴らしさや面白さが味わえる数学者の著書であるフィールズ賞を受賞した元ハーバード大学教授 広中平祐著「可変思考で創造しよう」の読書感想文を書くことを冬休みの課題とした。生徒は、私の期待通り、この本の素晴らしさを見抜いてくれた。

S_3『この本は、わたしがいままでに読んできた本の中でも、全くあたらしいタイプの本でした。知らないまたは理解しにくい用語があったり、理屈っぽかったりはあったものの、「数学的な考え方」がこれほどわかりやすく日常生活の例に置き換えられるとは、思いませんでした。この本の中でその通りだと同感したこともありましたが、それ以上に多くの新しいものの見方や考え方を知りました。その色々な見方、考え方自体も、この本でいう「可変思考」から生まれたものだと思います。この「可変思考」でものを考えると、何かと都合のいいことがわかります。今までの生活の中でのちょっとした問題もこれをうまく利用すれば解決できることがあると思います。

例えば、学校でも何人かの先生の話を聞くと、その先生によって考え方がちがうので、「あれ？」と思うことがよくありますが、そういう時に「可変座標」をもてばどの先生の話にも「なるほど」とうなずけるし、さらにそういった中から自分の「原点」をみつけることもできるのではないかと思います。

また、広中平祐さんは、挫折や失敗もその人次第でプラスに変える事ができるなどと言っています。その考え方に初めは驚きましたが、だんだんその考え方の支持者になってしまいました。それにもっとも驚いたのは「矛盾」という言葉の意味のことで、「より優れたものを作り出すとは、まったく広中さん独自の解釈の仕方です。これも「可変思考」を用いた発想転換からきたもののようです。「可変思考」は能力開発にも役立つと書いてあります。「何が分かっていないかが分かるのが大切」とか「無駄も必要」「ロングレンジの目的を持つのがいい」などということがありましたがこれらのことは、いつもテストや試験だけのため、つまり目先のことだけを目標にしている私(達？)には考えさせられることがあるのではないかと思います。

この本は、私にとってはまだ難しかったけど、もう少し年をとって、もう少し深い考えが持てるようになってもう一度この本を読んだら、広中さんの本当に言いたいことへの理解が今よりずっと深まると思います。』

生徒の感想文にもあるように、この本を読んで筆者の考え方に驚かされ、感心させられることは多い。さらに、生徒の感想文からも学ぶことが多い課題であった。

3.「任意の角を三等分する」課題

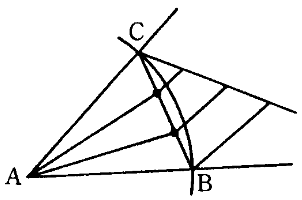
中学3年生で数学の課題学習の時間を1単位設けている。3クラスの同時展開で、担当教師3人が、各クラスを4時間毎にA→B→C→A→と持ち回りで授業をしている。これまでに、幾つもの課題をレポートにしてきたが、それらを十分に活かしきれていなかった。

初等幾何における作図の意味を理解させた上で、「作図の三大難問」の1つである「任意の角を三等分する」課題を個人レポートにして持ち寄り、そのレポートをもとに班でお互いの考えを出し合い討議して班のレポートにまとめていった。班員の考えを調整して、1つのものにまとめていく過程において、疑問や意見が次々でてきて活発な話し合いが展開され、お互いの考えを深めていく活動になっていった。

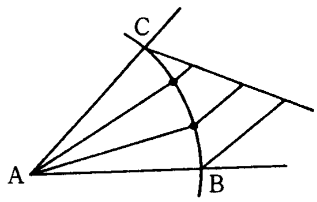
一方、班のレポートに班員の考えのすべてが反映されるとは限らないので、生徒全員の個人レポートを類別し、考え方を整理したプリントをつくって、「数学的な考え方・態度」を全員のものにしようとした。生徒の考えを整理すると次のようになる。

（1）こうすれば、任意に与えられた角を三等分できる《推測する考え》

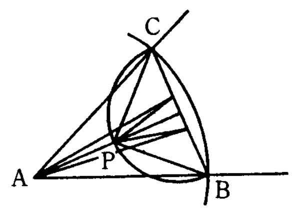
(イ)線分BCを三等分（7名）



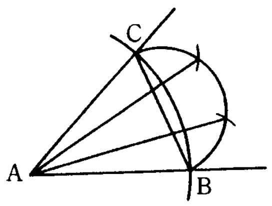
(ロ)弧BCを三等分（?）（2名）



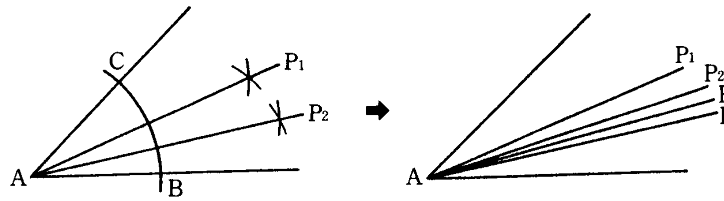
(ハ)∠BPC＝90°を三等分（4名）



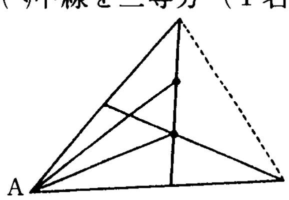
(ニ)半円を三等分（4名）



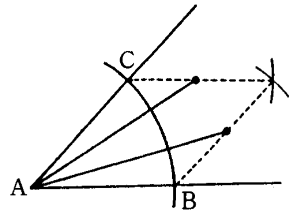
(ホ)極限を考える（3名）



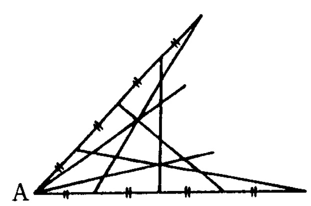
(ヘ)中線を三等分（1名）



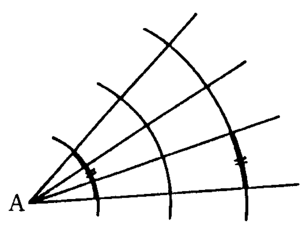
(ト)ひし形の辺の中点（1名）



(チ)等分点をとる（1名）

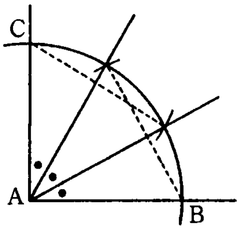


(リ)扇形の半径と弧の長さは比例（2名）

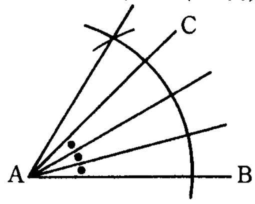


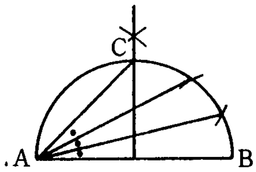
（2）特定の角ならば三等分できる《特殊化する考え》

(イ)90°の場合（24名）

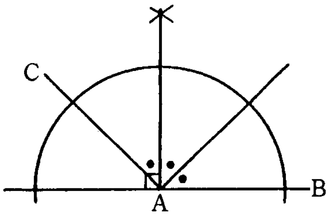


(ロ)45°の場合（7名）

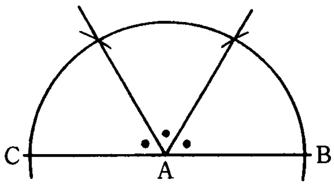




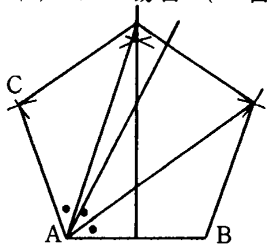
(ハ)135°の場合（8名）



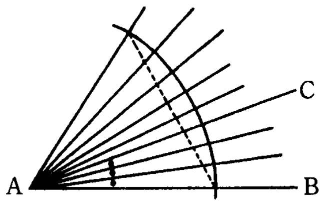
(ニ)180°の場合（12名）



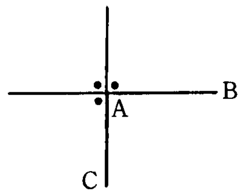
(ホ)108°の場合（2名）



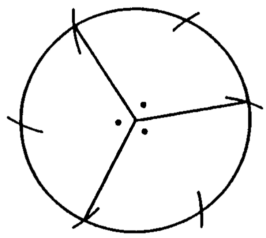
(ヘ)22.5°の場合（3名）



(ト)270°の場合（7名）



(チ)360°の場合（6名）

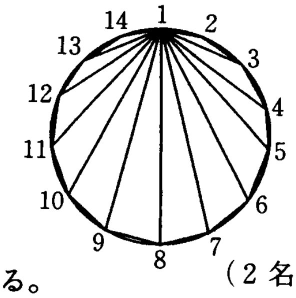


（3）特定の角で考えたことを発展させる《一般化する考え》

正多角形を利用すれば、特定の角を三等分することができる。

例えば、正五角形、正八角形、…一般に正（3ｎ＋2）角形の1つの頂点から対角線は（3ｎ＋2）－3＝（3ｎ－1）本引くことができる。

このとき、これらの対角線により、1つの内角の大きさは3ｎ等分される。



（2名）

（4）どんな角が作図可能か調べる《解析的考え》

（作図できる角）－（作図できる角）は、（作図できる角）ということに気付けば、正の整数で作図できる最小の角を求めることができる。

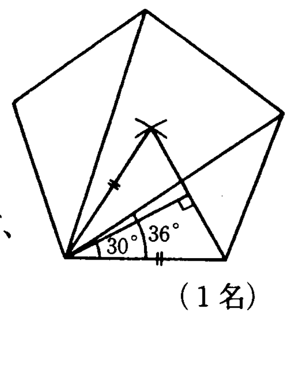
もし、2°が作図可能ならば、角の二等分はできるから1°も作図可能となり、3の倍数の角はすべて三等分できることになる。

しかし、具体例からもわかるように、作図可能な正の整数の角は、9の倍数だから、正の整数の角で作図できる最小の角は3°ではないかと予想できる。。

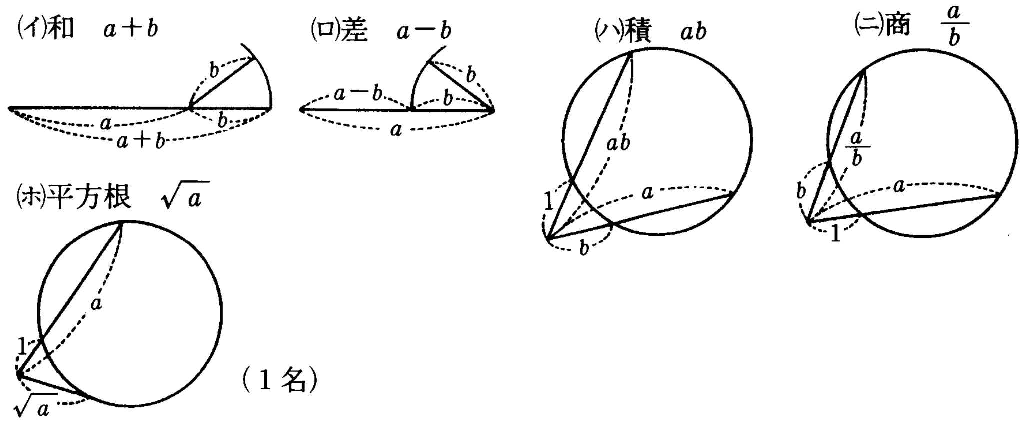
図は、正五角形と正三角形を重ねて6°の角を作図したものである。

この角を二等分すれば、確かに3°の角は作図できる。

次に、定規とコンパスを使って作図できるのは、2つの線分の長さの和，差，積，商と平方根である。したがって、角を三等分したときの長さが、これらの式で表すことができれば、その角の三等分は作図可能になる。



（1名）



（1名）

次の考察は、角の二等分で考えたことが、角の三等分に生かされた例である。

もし、角が三等分されていれば、次のことが成り立つ。

∠ＢＡＰ＝∠ＰＡＱ＝∠ＱＡＣのとき、

△ＡＢＱにおいて、ＡＢ：ＡＱ＝ＢＰ：ＰＱ　…（ｉ）

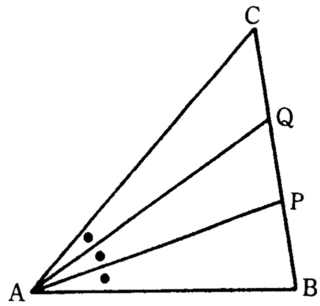
△ＡＰＣにおいて、ＡＰ：ＡＣ＝ＰＱ：ＱＣ　…（ii）

(ii)よりＰＱ＝$\dfrac{\mathrm{AP}\cdot\mathrm{QC}}{\mathrm{AC}}$

(ｉ)に代入すると　ＡＢ：ＡＱ＝ＢＰ：$\dfrac{\mathrm{AP}\cdot\mathrm{QC}}{\mathrm{AC}}$

$\therefore \mathrm{AC}\cdot\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{BP}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AP}\cdot\mathrm{QC}$

$\therefore \dfrac{\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}=\dfrac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AP}}{\mathrm{BP}}$　…(iii)



（1名）

∠Ａを三等分した場合(iii)〈両辺にできる２つの三角形の底辺で他の２辺の積を割った値は等しい〉が成り立つ。

もっとも、これは角を三等分するときには使うことはできないが、角が三等分されているかどうかを確かめるときには役に立つとまとめている。

（5）推測した作図が正しいかどうかを証明する《公理的考え》

（1）の推測する考え方を使って作図し、班で討議していくとその作図が正しいかどうか、証明しようとする生徒がでてくる。このことが、更にお互いの理解を深めることになる。

例えば、弦ＢＣを三等分する点をＰ、Ｑとするとき、ＡＰ、ＡＱが∠ＣＡＢを三等分していないことを次のように証明している。

[証明]

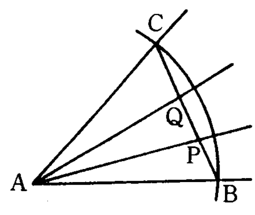
仮に、∠ＢＡＰ＝∠ＰＡＱ＝∠ＱＡＣが成り立っているとすると、

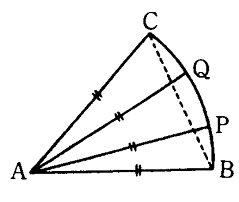
△ＢＡＱにおいて、仮定（∠ＢＡＰ＝∠ＰＡＱ）より、

ＡＢ：ＡＱ＝ＢＰ：ＰＱ

ここで、ＢＰ＝ＰＱだから、ＡＢ＝ＡＱ

同様に、△ＰＡＣにおいて、ＡＰ＝ＡＣ





△ＡＢＣは、ＡＢ＝ＡＣの二等辺三角形だから

ＡＢ＝ＡＰ＝ＡＱ＝ＡＣ

このような場合、ＡＢＣは三角形になりえない。

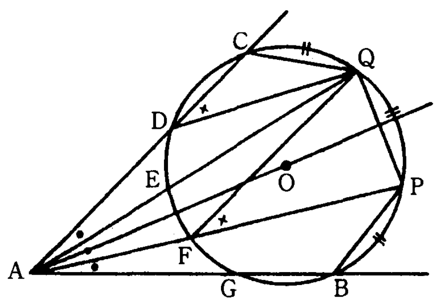
このことは、△ＡＢＣが二等辺三角形であるという仮定に反する。

以上のことにより、弦ＢＣを三等分する点をＰ、Ｑとするとき、ＡＰ、ＡＱによって∠ＣＡＢは三等分されない。　（3班のレポートより）

直感的で厳密さに欠けるところもあるが、背理法の発想を使っている。

正しくないことを証明するときには、背理法の発想が自然に出てくるようで、半円ＢＣを三等分しても、∠ＣＡＢを三等分することにはならないという次の証明には驚かされる。

[証明]



ＡＰ、ＡＱが∠ＣＡＢを三等分しているならば、△ＡＤＱと△ＡＦＱにおいて、∠ＤＡＱ＝∠ＦＡＱ、ＡＱ＝ＡＱ（共通）また、∠ＤＱＡ＝∠ＣＤＱ－∠ＤＡＱ

＝∠ＱＦＰ－∠ＦＡＱ＝∠ＦＱＡ

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、

△ＡＤＱ≡△ＡＦＱ　∴ＤＱ＝ＦＱ

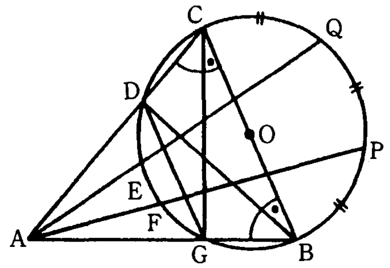
次に、△ＤＥＱと△ＦＥＱにおいて、

ＤＱ＝ＦＱ、∠ＤＱＥ＝∠ＦＱＥ、ＥＱ＝ＥＱ（共通）

2辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので、△ＤＥＱ≡△ＦＥＱ∴∠ＤＥＱ＝∠ＦＥＱ …（※）

このとき、ＡＣ＝ＡＢ（△ＡＢＣは二等辺三角形）より、∠ＡＣＢ＝∠ＡＢＣ

また、∠ＤＣＧ＝∠ＤＢＧ（$\overset{\frown}{DG}$に対する円周角）



∴∠ＧＣＢ＝∠ＤＣＢ－∠ＤＣＧ

＝∠ＧＢＣ－∠ＧＢＤ＝∠ＤＢＣ

したがって、$\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{GB}$

ここで（※）より、$\overset{\frown}{DCQ}=\overset{\frown}{QPF}$だから

$\overset{\frown}{DC}+\overset{\frown}{CQ}=\overset{\frown}{QP}+\overset{\frown}{PB}+\overset{\frown}{BG}+\overset{\frown}{GF}$

$\overset{\frown}{DC}=T$、$\overset{\frown}{CQ}=S$　と置くと、$T+S=S+S+T+\overset{\frown}{GF}$　これは矛盾。

∴ＡＰ、ＡＱによって∠ＣＡＢは三等分されない。　（6班のレポートより）

（6）器具を使えば、任意に与えられた角を三等分できる《操作的考え》

トマホークと直角定規についてレポートした生徒がいたので、早速作ってみた。特大トマホークを作った生徒、逆に小さすぎて操作しにくいものなどさまざまである。

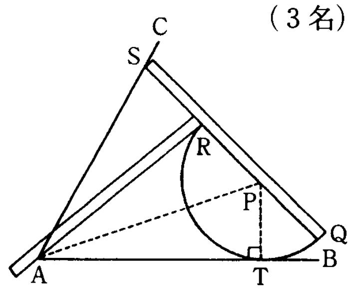
これらの器具をどのように使えば、任意の角が三等分できるかということに全員が挑戦した。

操作活動の後は、その証明である。生徒達は、見事に証明を完成させていく。

［証明］

∠ＣＡＢに対して、トマホークを図のように位置し、 （3名）

半円とＡＢの接点をＴとする。



△ＳＡＲと△ＰＡＲにおいて、

ＳＲ＝ＰＲ、ＡＲ＝ＡＲ（共通）、∠ＳＲＡ＝∠ＰＲＡ＝９０°

２辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので、△ＳＡＲ≡△ＰＡＲ

∴∠ＳＡＲ＝∠ＰＡＲ

また,△ＰＡＲと△ＰＡＴにおいて、

ＰＲ＝ＰＴ、ＰＡ＝ＰＡ（共通）、∠ＰＲＡ＝∠ＰＴＡ＝９０°

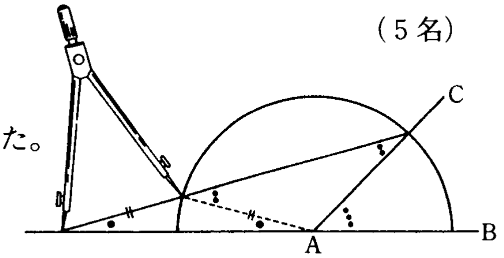
直角三角形で、斜辺と他の一辺がそれぞれ等しいので、△ＰＡＲ≡△ＰＡＴ

∴∠ＰＡＲ＝∠ＰＡＴ （5名）

したがって、∠ＳＡＲ＝∠ＰＡＲ＝∠ＰＡＴ が成り立つ。

また、アルキメデスの三等分法をレポートした生徒もいた。

もちろん、その証明にも挑戦している。

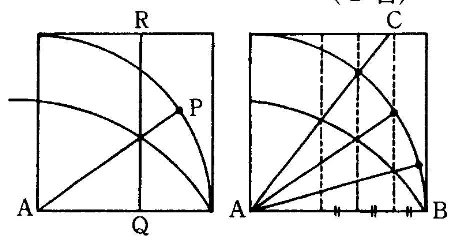


（7）こんなグラフが書ければ、三等分できる《関数的考え》 （1名）

動径ＡＰと線分ＱＲが一定の等しい速さで動くとき、

その交点の軌跡は、円積曲線(ヒピアスの曲線)といわれる。

この曲線を使って、任意の角を三等分している。

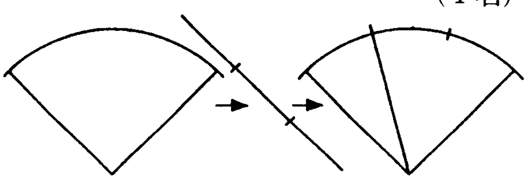


（8）弧の長さが直線に移れば、三等分できる《基本的性質に基づく考え》

弧の長さをひもに移し、そのひもを三等分 （1名）

して弧に合わせれば、任意の角を三等分する

ことができる。



（9）作図できないことを証明しようとする〈演繹的考え〉

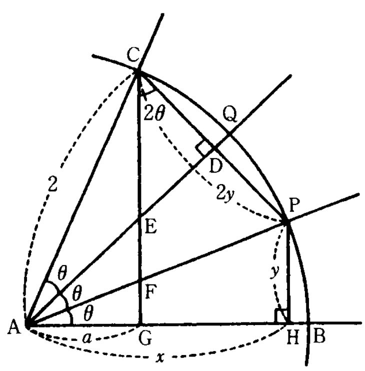
任意の角を三等分する作図はできないということを証明しようと考えた生徒もいる。その中に角の三等分の問題を,いわゆる“角の三等分方程式”に関連させて証明したものがある。

［証明］ （7名）

図において、△ＡＰＨは直角三角形だから、三平方の定理より、$x^2+y^2=2^2$　　$\therefore\ y^2=4-x^2$

また、∠ＰＣＦ＝∠ＣＡＦ（＝２θ）だから、直線ＰＣは、３点Ａ、Ｃ、Ｆを通る円に接する。

方べきの定理より、ＰＡ・ＰＦ＝ＰＣ^2



$\therefore\ 2\left(2-\dfrac{2a}{x}\right)=4y^2$

したがって、$4-\dfrac{4a}{x}=4\ (4-x^2)$

$\therefore\ x^3-3x-a=0$

この式は、“角の三等分方程式”呼ばれ、$3\theta=60^\circ$ と置けば、$a=1$ になる。

すなわち、$x^3-3x-1=0$ の解がＡＨの長さになる。

この長さが、定規とコンパスで作図可能かどうか考えることになる。

なお、この“角の三等分方程式”は、高校２年生であれば、

$\mathrm{Cos}\ 3\theta=\dfrac{a}{2}$、$\mathrm{Cos}\ \theta=\dfrac{x}{2}$ を $\mathrm{Cos}\ 3\theta=4\ \mathrm{Cos}^3\theta-3\ \mathrm{Cos}\ \theta$ に代入すれば、簡単に求めることができる。

尚、生徒全員の個人レポートを類別し、考え方を整理したプリントには、(　)内の人数の箇所にその考え方をまとめた生徒の出席番号を書いて、生徒一人一人の考え方を大切にするよう心がけた。

生徒のレポートを整理していくと「数学的な考え方・態度」がいたるところでみられる。

このような取り組みの初期の段階では、生徒の個人レポートのいくつかを紹介して、全体に返すだけで終わっていたが、それでは、いくら個々の生徒の考え方に素晴らしいものがあっても、それ以上に高めることは望めないし、生徒一人一人の考えを大切にすることにはならない。

日々の授業の中で、お互いの考えを大切にする姿勢がなければ、生徒はさらに深く考えようとはしなくなる。生徒がお互いの考えを知り、自分とは異なる考えや結論を比較検討しながら論議する場が設定できないかと考えた取り組みの１例である。このような課題を積み重ねていけば、生徒が学習の主体者として生き生きと授業に参加できるようになり、数学を創造していくことの楽しさや分かる喜びが味わえるような授業になると考えている。

《参考文献》

片桐　重男　「数学的な考え方の具体化」　明治図書　１９８８

矢野健太郎　「角の三等分」　日本評論者　１９８４

拙　　稿　「中学校数学科教育実践講座 第１３巻 生徒の多様な考えを生かす指導」

指導事例集 － 数学的な考え方を育てる授業をめざして － １９９４