

## 軌跡を題材とした数学の表現変換と能動的誤りの発見支援機能を有する学習支援システムの開発と評価

黒川 魁<sup>†a)</sup> 東本 崇仁<sup>††</sup> 堀口 知也<sup>†††</sup> 平嶋 宗<sup>††††</sup>

Development and Evaluation of a Learning Support System with Functions for Conversion of Expression and Facilitation of Active Error-Awareness in Locus Problem in Mathematics

Kai KUROKAWA<sup>†a)</sup>, Takahito TOMOTO<sup>††</sup>, Tomoya HORIGUCHI<sup>†††</sup>, and Tsukasa HIRASHIMA<sup>††††</sup>

あらまし 数学においては、概念的な理解を要する記述問題で、判断の理由などを自分の言葉や図式で説明する課題の正答率が低いことが知られている。この要因の一つとして、数学で用いられる記号的表現と図形的表現を十分に理解しておらず、両者を関連づけた整理ができていないことがあげられる。そこで本研究では、数学における記号的表現を図形的表現に変換する機能を有した学習支援システムの開発を行う。本システムでは、学習者に通常の数学の記述問題のように回答を記述させ、本機能により図形的表現に自動的に変換する。これにより、誤った記述文は誤った図形の描画につながり、学習者自身が自身の解答の誤りに気づける。更に、図形の描画は学習者の記述した解答に基づいた制約内で実現され、その制約内であれば操作可能としているため、学習者は図形の操作を通して記述文の制約を理解し、数学のより深い理解が支援されることとなる。本論文では、本システムを用いて評価実験を行ったため、その結果についても報告する。

キーワード 高校数学、学習支援システム、誤りの可視化、数学表現

## 1. ま え が き

国際比較調査(PISA, TIMSS)により、日本の子供の数学・理科リテラシーや学力は国際的にみると高い水準にあることが示されている。一方で、概念的な理解を要する記述形式の出題で、判断の理由などを自分の言葉や図式で説明する課題の正答率は低く、無回答率が高い。更に、このようなタイプの問題に対する学習

意欲が低いことが知られている [1]。

数学における通常の問題解決では、例題とその解き方を記憶し、類似した問題が出題された場合は過去の問題のパターンに当てはめて手続き的に問題解決を行える場合が少なくない。そのため、通常の数学の問題が解決できる学習者であっても、十分に自身の解法の意味を理解できていない、あるいは説明できない場合が存在する。このような問題点を解決するためには、問題文あるいは解法が図形的にどのような意味をもつかを把握することや、図を文や数式で表現するためにどのように表現すればよいかを理解することが重要である。中原 [6] らは、このような数学における図を用いた表現を図形的表現と呼び、文や数式を用いた表現を記号的表現と呼んでいる。本研究ではこの定義に従い、数学で扱われる概念を文字や数式、文などの記号により表現したものを記号的表現と定義し、また、数学で扱われる概念を点や線などで構成される図で表現したものを図形的表現と定義する。この定義に従えば問題文や解法が意味する図を理解できていない問題点

<sup>†</sup> 東京工芸大学大学院工学研究科, 厚木市  
Graduate School of Engineering, Tokyo Polytechnic University, 1583 Iiyama, Atsugi-shi, 243-0297 Japan

<sup>††</sup> 東京工芸大学工学部コンピュータ応用学科, 厚木市  
Institute of Engineering, Tokyo Polytechnic University, 1583 Iiyama, Atsugi-shi, 243-0297 Japan

<sup>†††</sup> 神戸大学大学院海事科学研究科, 神戸市  
Graduate School of Maritime Sciences, Kobe University, 5-1-1 Fukaeminamimachi, Higashinada-ku, Kobe-shi, 658-0022 Japan

<sup>††††</sup> 広島大学大学院工学研究科, 広島島市  
Graduate School of Engineering, Hiroshima University, 1-4-1 Kagamiyama, Higashihiroshima-shi, 739-8511 Japan

a) E-mail: m1765003@st.t-kougei.ac.jp  
DOI:10.14923/transinfj.2017LEP0023

や、図を文や数式で表現できない問題点は、記号的表現と図形的表現の関係性の理解不足であるといえる。

本研究では、この記号的表現と図形的表現の関係性の理解の促進を目的とする。通常の教科書や参考書などに記載されている例題の模範解答にも記号的表現と図形的表現が記載されているが、これらを一覧するだけでは解法のうちの数式や文がどの図形の描画に関与しているかを十分に把握できず、また、解法の一部を変更した場合、あるいは自身の解法が誤っていた場合に、図形的表現がどのように変化するかなどの関係性の理解が十分に行えない。

そこで、本研究では、記号的表現と図形的表現の間の理解を深めるためには、学習者が一方を表現し、システムがそれを他方の表現に変換し、可視化する機能が有用であると考え、本論文では、このうち学習者に解法を記号的表現で記述させ、システムが図形的表現として学習者の解法を可視化する支援機能を開発する。対象は、高校数学の軌跡を題材とした平面座標幾何問題を取り扱う。

また、記号的表現と対応する図形的表現を理解するためには、解法が全て構築された後に図に変換するのではなく、学習者が解法を構築していくたびにそれが図的にどういう意味をもつかを可視化することが望ましい。一方で、例えば「点 P を  $(x, y)$  とする」などの単文に対して、可視化機能のみで妥当な理解を促進することは難しい。なぜなら、システムが例えば、上記の単文を表す一例として、 $(2, 3)$  という座標に点をプロットした場合、「点 P を  $(2, 3)$  とする」という単文との差が発生せずに誤った理解が促進される可能性がある。そのため、本システムでは可視化機能と合わせて、図形操作機能を開発する。学習者は可視化された点や線などを単文の制約の範囲内で操作可能とする。本論文における制約とは、記述した記号文に含まれる、図形を描画する（図形が存在できる）ための条件（範囲指定や定値、点や線の性質）のことを示す。「点 P を  $(x, 0)$  とおく」という単文が追加された場合、可視化された点 P は  $y$  の値が 0 であるという制約を受け、学習者は点 P を  $x$  軸上でしか操作できない。この操作を通して、学習者は自身が記述した文が図的にどの制約の範囲で成立するかを学習する。学習者が誤答を生成した場合は、正答とは異なった描画や操作となるため、自ら誤りに気付くことが期待される。この「誤りからの学習」が知識修正や理解に重要な役割を果たすことは、これまでも数多くの研究で指摘され、同時

に学習者が誤りに自発的に気付くことが重要であることも指摘されている [2]~[5]。誤りに対する「内発的な気づき」を生起させるには、学習者の答えを肯定した上で、その結果としてどのような結論が導かれてしまうのかを示し、その矛盾の奇妙さを学習者自身に気付かせることが有効である。

本研究では、上記の可視化機能と図形操作機能を備えたシステムにより、学習者は、記号的表現と図形的表現の関係性を理解し、その効果として記号的な文に対して図形的に考えることができ、また、図形的な内容を記号的に捉えられるようになると思われる。この状態において、学習者は問題解決における自身の解法の意味を理解していることとなる。

本論文では、評価実験を通して、可視化機能と図形操作機能という二つのフィードバック機能を有する本システムの利用の前後のテストの結果に有意な差が得られたことについても報告する。

## 2. 関連研究

数学における表現に関して、中原 [6] は記号的表現と図形的表現を含んだ五つの分類を提唱している。また、この表現を用いて、学習者への課題としてある数学文章に含まれる数量関係の把握等を解決することが挙げられている [7]。

図形的表現の役割や効果は、先行研究において明らかにされている。算数の学習における作業記憶の負荷の低減や、具体的モデルの構築の支援となり [8]、問題構造を明確に表現し、正しく解くための基礎をつくり、解答者の情報知識の跡をたどることができる [9] ことが知られている。しかし、これらは「図形的表現をうまく活用して記号表現の理解を促進する」というアプローチであり、どのようにすれば図形的表現を理解できるかという課題には答えておらず、また、図形的表現に焦点を当てたものが多く [10]、記号的表現との関係の理解については焦点を当てていない。

中原 [6] は、学習者が様々な表現方法を用いて、問題や解答を捉えることの重要性を主張している。仮に、記号的表現で解答を記述できても、その解答の状況が表す図をイメージできない学習者は、十分な理解に至れているとはいえないためである。

以上より、数学学習において学習者が様々な表現方法を活用できるようになることは主張されているが、現状では記号的表現と図形的表現を関連づけて学習させることを狙ったものは見当たらず、本研究のように、

記号的表現の誤りを図的表現において可視化し、学習者に記号的表現と図的表現の関係づけを試行錯誤的に考えさせるといった試みは存在しないといえる。

また、これまでの研究における誤りの可視化は、学習者の思考に基づいた結果のみのシミュレーション（実行）のみで、一方、本研究で提案した図形操作機能は、誤りを可視化した後の“実行後”についても考えることで記述した（されている）各文が、どのような図を表せ、どのような動き（可能描画範囲）になるかという制約について認識・体験することを可能とする。

### 3. システム設計

#### 3.1 学習課題の設定

数学における理解を深めるためには、記号的表現と図形的表現の関係性を理解することが重要である。それには、学習者が自身の記述した記号的表現が図形的にどのような意味をもつかを考え、また自身の描画した図形的表現が記号的にはどのような意味をもつかを考えさせ、試行錯誤できる環境が必要となる。ただし、試行錯誤した際には診断・フィードバックを与える必要がある。したがって、これを支援するシステムにおいては、学習者が記述した記号的表現がもつ図的意味を理解し、記号→図形への変換を行える機能や、学習者の描画した図形的表現がもつ記号的意味を理解し、図形→記号への変換を行える機能の開発が望まれる。

本論文では、その初歩段階として学習者が記述した記号的表現を図形に変換できる機能を実現する。ただし、自由記述された文をシステムが診断することは容易ではないため、本論文では概念・数量関係を表現する単文（数学の教科書などで用いられる「点 P を (x, y) とおく」「問題の条件より」等の典型文）を用意し、単文を組み合わせることで解答文を生成する方法を実現する。本論文では、単文を図形的に有意な要素を一つ以上含むものとし、できる限り 1 要素のみとなるように分割したものに限定する。例えば「点 P を (x, y) とする。AP=BP なので」のような文は、「点 P が平面 xy 上の点である」という要素と、「点 A と点 B から等しい距離にある点である」という要素の二つを含む。このような場合、「点 P を (x, y) とする」「AP=BP である」といった 1 要素の文へと分割する。学習者はこのように定義された単文を組み合わせ、解答を表現する。そのため、学習者の解答のプロセスにおいては、図に追加される要素（制約）が徐々に追加されることとなる。

#### 3.2 誤りの可視化フィードバックの実現

学習者と教師の数が N 対 1 にある通常の教室講義においては、学習者の誤答がどのように間違っているかについて個別に診断し、フィードバックを行うことは極めて困難である。そのため、学習者の解答については正誤判断のみを行い、その後正解を提示するという形式がもちいられることが多い。しかし、このようなフィードバックでは学習者は十分な試行錯誤を行えず、学習者自身も自らの解答の何が間違っていたかについて十分に振り返ることができない。学習者自身が誤りを振り返るためには、誤答であることを伝える否定的フィードバックではなく、誤答を正しいとすると何がおかしいことになるかと伝える肯定的フィードバックが効果的であり、その一つの手段として誤りからの学習があげられる。誤りの可視化とは、学習者の解答を肯定した場合に、生じるおかしな状況を可視化することであり、学習者は可視化された内容を観察することで自発的に誤りに気付くことが誘発される。誤りの可視化に関する先行研究として、力学の作用・反作用の把握における誤り可視化 [11]~[13]、幾何証明における推論の誤り可視化 [14]、3 次元モデルによるテッサン誤り可視化 [15]、アニメーションを利用した英作文の誤りの可視化 [16]、学習支援を指向した誤り可視化のためのロバストシミュレータ [17] と多分野にわたり研究の試みがなされている。

本研究では、数学問題において学習者が構築した解答文にそって、対応する図を生成する。これにより、誤った単文を用いた学習者の解答に従った場合、おかしな要素（制約）をもった図が生成されることとなるため、学習者が内発的に誤りに気づくことが期待される。

#### 3.3 可視化された図の操作機能

物理などの誤りの可視化においては、学習者が表現した解答以外に通常物理法則などを用いて誤りをシミュレートする方法がとられている。そのため、学習者の解答が不十分であっても、物理法則を用いながらふるまいを生成できる。一方、数学においては学習者の解答が十分でない場合には、適切な図を生成できない。例えば「点 P を (x, y) とする」という単文だけでは、本来点 P を置く場所をユニークに定めることができない（点 P は平面 xy 上に配置されていれば正しい）。そのため、システムは 1 例として、(2, 3) などの座標に置くことになる。しかし、これでは「点 P は (2, 3) である」という単文との間の差を可視化できない。そのため、単に可視化しただけでは学習者は、た

またそのような図になったのか（制約の範囲では他の図も描画できるはずなのか）、その図は確定的に書かれたのか知ることができない。そこで、本研究では描画された図は、現状用いられた単文がもつ制約の範囲で学習者が操作可能であるように設計する。これにより、学習者は現状の解答文による描画された図の範囲を確認し、理解を深めることができる。また、軌跡問題であるにもかかわらず点Pが軌跡を描かなかったり、固定されたりすることで操作を通して自発的に誤りに気づけることが期待される。

#### 4. システム実装

本章では 3. に従って、実際に実装したシステムについて説明する。システムは、Visual Basic2010 を用いて実装された。

##### 4.1 学習領域

本システムでは、高校数学の“軌跡”の範囲、つまり平面座標幾何の軌跡や軌跡の考え方に至るまでの問題範囲（点と点の距離の算出等）を題材とした。システムでは、実際の数学の教科書で出題される軌跡の範囲の問題を分析し、それらを 3.1 で述べた指針に従い、「点Pを(x, y)とおく」、「AP=BP」等の図的要素を1, 2個程度含む単文を用意した。システムで用意した各問題は単文4から6個で解答できる。

今回システム内に用意した単文は、点の定義、点についての条件、計算式、結果、結論に関わる内容を準備している。

##### 4.2 学習者のシステム内での活動の流れ

最初に、学習者が取り組める問題一覧をシステムが表示する。学習者はその中から取り組みたい問題を選択する。本システムに用意した問題は、点と点の距離を算出する問題、点と点の距離から座標を算出する問題、点の軌跡を求める問題と全3問である。問題を選択すると問題解答画面へ移行する（図1）。

学習者のシステム内での活動は以下のとおりである。

- (1) システムに与えられた問題文を確認する。
- (2) 一つ目に記述する単文を選択し、図1のプロセス1を押す。
- (3) システムが学習者の選択した単文に対応した図を可視化するため、それを確認する。更に、学習者はその制約を確かめるために、図を操作する。自身の解答が不適切であると感じた場合は、単文を他の文に入れ替える。
- (4) 文を追加し、隣接したプロセスボタンを押す。

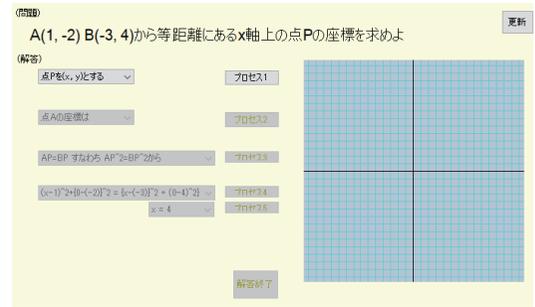


図1 問題解答画面  
Fig. 1 Problem solving interface.

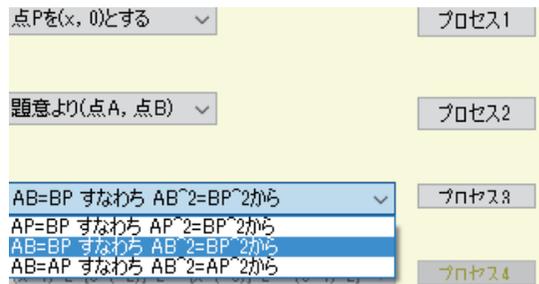


図2 解答テンプレート選択例  
Fig. 2 Single sentence selection example.

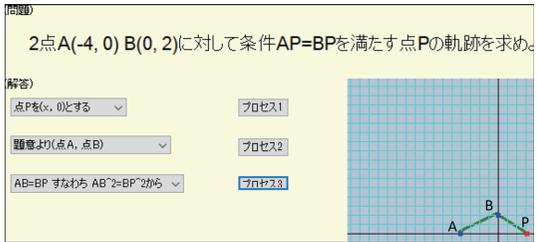
(5) システムが学習者の追加した単文の要素を含めた、全ての単文の要素をもつ図を可視化するため、図を確認する。更に、その要素群からなる制約に基づいて図を操作できるため、現状の制約を図の操作を通して確認する。また、自身の解答が不適切であると感じた場合は、必要な単文を修正する。

##### 4.3 インタフェース

学習者の単文の選択は、プルダウン形式で行う（図2）。プルダウン形式で行う理由について説明する。自然言語で学習者に解答を記述させた場合、技術的な問題で診断が困難であることは前述したが、その他の手段として選択形式ではなく、テンプレートを自分で並べ替えて、自由な解答を行う形式も考えられる。しかし、テンプレート形式で行った場合、ある文を使うための前提が不足しているなどの論理的な問題による誤答が頻発することが予想される。本研究では、解法の論理的な整合性ではなく、解法で用いられる記号的表現と図形的表現の関係性の理解に焦点を当てているため、学習者による自由な構築ではなく、有意味な誤選択肢群が意味する図的意味と、正解の選択肢が意味する図的意味の差を認識させるためにこのようなインタ



(a) 点 P(定義) と点 A, 点 B(題意) の図形変換  
(a) Graphical conversion of Point P, A and B.



(b) 条件式の追加  
(b) Adding conditional formula.

図 3 解答記述追加による図の変化

Fig. 3 Changes in graphics by adding constraint.

フェースとしている．また，プルダウンメニュー内の誤選択肢は，高校の軌跡の範囲における教科書や参考書に掲載されている問題や例題の解法中の表現を収集し，類似したものを提示している．

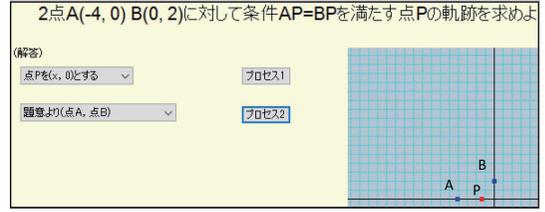
単文を選択後に，対応する右の「プロセス」ボタンを押すことで，現在までに選択した単文の要素を全て保持する図が画面右側の枠に描画される（図 3）．

#### 4.4 図の生成と操作の実現

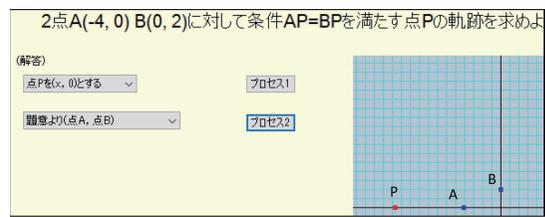
本システムでは，用意した単文に対して，図的な要素を対応させ，データベースに格納している．例えば，「点 P を (x, y) とする」という単文に対しては，「平面 xy 上を移動する点である」旨がデータベースに記載されており，「 $AP=BP$ 」という単文に対しては，「点 P の移動範囲は点 A と点 B から等価な距離になる」旨が記載されている．

システムは，学習者が用いた単文群に対して，このデータベースを参照し，制約に従った図を計算し，生成する．制約により図が一意に定まらないときは，その制約内で一例として図を生成し，制約内でその図を操作可能とする．なお，学習者の用意した単文群が矛盾しており，図が描画できない場合は，矛盾により描画できない旨を通知する．

各単文に記述する図の要素については以下のとおりである．点（の定義）の文では，動点であるのか静点（定点）であるのかについての情報が記述されている．



(a) 記号的表現の図形的表現への可視化  
(a) Visualization of symbolic expression.



(b) 図の操作  
(b) Operation of graphical items.

図 4 制約下での図の操作例

Fig. 4 Examples of graphical item operations under constraints.

動点の場合は定義の段階で範囲に制約があるか（xy 平面上を自由に動ける，x 軸上のみを動く，y 軸上のみを動く）が記述されている．点の制約文では， $AB=BP$  などの点の距離についての制約を定める文においては，どの点にどのような制約が追加されるか記述されている．計算式においては，点の定義と制約に基づいて立式される直線や曲線式についての単文が用意され，そこで描かれる式に関する描画内容がデータベースに記載されている．結論については，計算式で求めた線上を点 P が動くなどの結論が用意されており，この結論に従って点 P の最終的な範囲が決定される．

例えば，図 3 における例を用いて説明する．最初に学習者は「点 P を (x, 0) とする」という点の定義に関する文を入力している．システムは，この単文に関するデータベースを参照し，「x 軸上を点 P は動く」という制約を得て，x 軸上を動く動点 P を可視化する．点 P は一例として x 軸上の任意の点に描画され，学習者は x 軸上で点 P を自由に動かすことができる（図 4(a)-(b)）．その後，「題意より点 A, 点 B」という単文が入力されることで，題意に定められた定点 A, B が画面に表示される（図 3(a)）．この時点でも点 P に関わる制約は付加されていないため，点 P は x 軸上を自由に動かすことができる．この状況で更に学習者が単文「 $AB=BP$ 」を追加すると，システムは点 A から点 B の距離を線で描画し，点 B からその距離と等

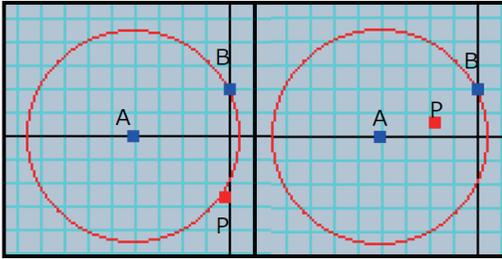


図5 システムによる図の可視化と学習者の操作例  
Fig. 5 example of learner's operation.

価な位置に点Pを置く。ただし、この時点で既に点Pはx軸上という制約が付いているため、図3(b)の箇所に点Pは固定される。この問題の場合、点Pは軌跡とならなければならないため、学習者は自らの解答プロセスに誤りがあったことに気づくことになる。

また、学習者が計算式を入力することで、システムは図5のようにその計算式が意味する図を描画する(図5の場合は円)。しかし、学習者によっては、描画した図の上で移動できない制約となっている場合があり、学習者は自身の求めた計算式の上を点が移動できないことを操作により確認し、自らの誤りに気付くことが期待できる。

また、システムは学習者が単文を追加・修正・削除するごとに、現状の単文に従った図を生成する。

#### 4.5 正誤診断

各問題に、あらかじめ正解となる単文の組合せがシステム内に入力されており、それと学習者の解答した結果を比較することにより正誤判断を行う。

### 5. 評価実験

#### 5.1 目的

本システムが与えるフィードバックが数学学習に有効であるかを評価するための評価実験を行った。

#### 5.2 方法

数学の学習経験のある情報系の工学部の学生18人を被験者とした。実験の手順は、実験の流れを説明後に、システムを一度も触れていない状態で、事前テスト(10分)に回答してもらった。その後、前半のシステムによる学習活動(30分)を行ってもらい、事後テスト1(10分)に解答してもらった。続いて、後半のシステムによる学習活動(30分)、事後テスト2(10分)を行った。実験終了後に6件法(6:とても思う, 5:思う, 4:やや思う, 3:あまり思わない, 2:思わな

い, 1:全く思わない)でアンケートに答えてもらう。18名の被験者を、A群(前半の学習:フィードバックなしシステム、以降統制システムと呼ぶ、後半の学習:本提案システム)9名と、B群(グループAとは逆順の学習)9名にわけた。統制システムは、本提案システムと同様のインターフェースをもつが、誤りの可視化機能を有していないシステムである。そのため、システムからはフィードバックは与えられない。ただし、こちらで学習する場合は各問題で解法終了ボタンを押したタイミングで、その問題の正解の解法が記された紙を渡し、正解を確認してもらった。一方、提案システムを用いた場合は学習者が正解となるまで自身で考えることとなる。

本システムが効果的であるという仮説が正しければ、A群は、前半に事前テスト→統制システム→事後テスト1→提案システム→事後テスト2という順で学習するため、事後テスト1から事後テスト2にかけて点数の向上が期待でき、B群は事前テスト→提案システム→事後テスト1→統制システム→事後テスト2という順で学習するため、事前テストから事後テスト1にかけての向上が期待できる。

なお、システムでは、三平方の定理を用いた距離算出問題、点と点の距離から座標を算出する問題、点の軌跡を求める問題の3問を扱った。

#### 5.3 テスト内容

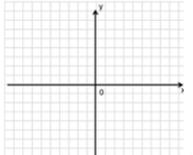
事前テスト、事後テスト1、事後テスト2では、いずれも共通の内容を出題した。問題は、2点間の距離や軌跡といった高等数学教育で扱う高校2年生の範囲である「図形と方程式」から出題した。問題は与えられた単文を読み取り、図示する図示問題4問(図6(a))、文と図の関係性に矛盾がないか評価する矛盾評価問題5問(図6(b))、通常の数学問題でよくみられる点座標の算出や軌跡を求める記述問題2問(図6(c))の全3種類11問を用意した。なお、図示問題、矛盾評価問題は正誤のみを評価したが、記述問題2問は複数の単文で構成されたものが解答となるため、単文ごとに採点した。記述問題の1問目の点座標算出問題は5点満点、2問目の軌跡問題は6点満点の評価となっている。

#### 5.4 テスト結果

図示問題・矛盾評価問題と、記述問題では評価の仕方が異なるため別個に評価することとする。

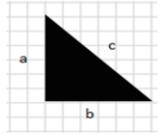
図示問題、矛盾評価問題についてのA群B群の事前・事後テスト1・事後テスト2の正答数の平均点の結果を表1~2に示し、図7に事前テスト、事後テス

1.下記はある問題の解答文を1文ずつ分けた文である. 各々の文に合う図を作図せよ  
 ①点Pを(x, y)と置く[点Pの描画範囲を記述]



(a) 図示問題  
 (a)Drawing problems.

2.次の文と図をみて関係が矛盾していないものには○, していれば×と答えよ  
 ① $a^2 + b^2 = c^2$



答え

(b) 矛盾評価問題  
 (b)Contradiction evaluation problem.

3.次の問いに答えよ  
 ①A(0, -2) B(-3, 1)から等距離にあるx軸上の点Pの座標を求めよ  
 ②2点A(-2, 0) B(0, 4)に対して条件AP=BPを満たす点Pの軌跡を求めよ

(c) 記述問題  
 (c)Description problem.

図6 事前事後テスト内容  
 Fig.6 Pre and post-test contents(part).

ト1, 事後テスト2における平均正答数の向上の様子を表すグラフを示す. 表1より, A群では, 統制システムを用いた学習の前後(事前→事後1)では0.6点の向上, 本提案システムの前後(事後1→事後2)で1.3点向上している. 表2より, 同じくB群でも, 統制システムを用いた学習の前後(事後1→事後2)では0.5点の向上, 本提案システムの前後(事前→事後1)で1.7点向上している.

本結果に対して, ANOVAを適用したところ, 両群とも個人内で有意な差が確認された( $p < .01$ ). 多重比較を行ったところ, A群では, 事前テストの結果と事後テスト2の結果, 事後テスト1の結果と事後テ

表1 A群のテスト結果(平均点)  
 Table 1 Test result of group A(average).

	事前	事後1	事後2
図示問題(Max:4点)	2.0	2.4	2.9
矛盾評価問題(Max:5点)	2.6	2.8	3.7
合計	4.6	5.2	6.5

表2 B群のテスト結果(平均点)  
 Table 2 Test result of group B(average).

	事前	事後1	事後2
図示問題(Max:4点)	2.1	3.4	3.6
矛盾評価問題(Max:5点)	3.0	3.3	3.7
合計	5.1	6.8	7.3

三段階テストにおける平均点数推移

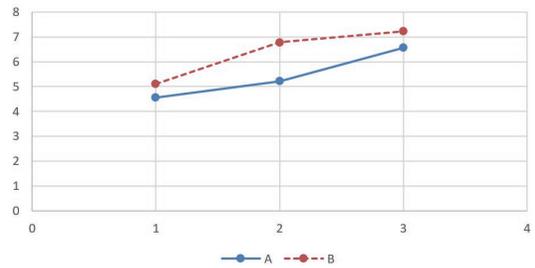


図7 平均正答数の変化

Fig.7 Change in average number of correct answers.

ト2の結果の間で有意な差が確認された(それぞれ $p < .01$ ). つまり, 本システムで学習を行った後の事後テスト2のみ他のテストとの有意な差が得られたことより, A群においては本提案システムが効果的であったことが分かる. B群では, 事前テストと事後テスト2, 事前テストと事後テスト1で有意な差が確認された(それぞれ $p < .01$ ). B群では, 事前テストと事後テスト1の間で本システムによる学習を行ったため, 事前テストと事後テスト1, 及び事前テストと事後テスト2の間で差が得られたといえる. 一方, 事後テスト1と事後テスト2の間で有意な差が得られなかったことから, 統制システムによる学習効果は得られなかったことが分かる. よって, 本システムの学習効果がシステム上の解答選択肢(プルダウンメニュー)を見たときの思い出しによる得点ではないことが分かる.

以上より, 本システムと同様のインタフェースをもち, 選択肢形式で学習させ, 解答後に正解を与える統制システムより, 記号的表現を図形的表現に変換し, システムが図的なフィードバックを与える本提案システムの方が, 文に対応する図を作図する図示問題においても, 文と図の関係性を理解する矛盾評価問題にお

表 3 A 群記述問題平均点

Table 3 Group A description problem average.

	事前	事後 1	事後 2
小問 1 (Max:5 点)	0.7	2.4	4.3
小問 2 (Max:6 点)	0.4	0.8	1.8
合計	1.1	3.2	6.1

表 4 B 群記述問題平均点

Table 4 Group B description problem average.

	事前	事後 1	事後 2
小問 1 (Max:5 点)	0.6	3.0	4.2
小問 2 (Max:6 点)	0.3	0.7	1.9
合計	0.9	3.7	6.1

いても、成績が向上することが分かり、本開発システムが数学の理解へ貢献していたものと考えられる。

また、記述問題については、被験者が各問（合計 2 問）でどの程度の単文を正しく解答（記述）できたかを評価する。評価方法は、定義、既出情報の提示、条件式、計算（結果以外の計算過程は除く）、結果、小問 2 の軌跡の問題では結論も必要とし、各々 1 点ずつ配点を行う。そのときの小問 1, 2 の平均正答数を表 3~4 に示す。その後分散分析を行った。

本システム活用の前後で点数の平均点が両群、小問 (1) 座標算出問題で 1.9~2.4, 小問 (2) 軌跡問題で 0.4~1.0 上昇した。小問 (1) は、分散分析により両群共に有意な差が確認できた ( $p < .01$ )。小問 (2) については、分散分析の結果、B 群の事前テストから事後テスト 1 回目、つまりシステム学習前と本システム学習使用後の結果において有意な差が確認できなかった。

また、表 1~4 より、工学部の大学生において基本的な問題であっても、事前テストの状態では記号的表現と図形的表現の関係を問う問題に答えることは容易ではなく、また解答に用いられる文の候補を確認でき、正解を確認できた統制システムの利用を通して学習効果が得られないことが分かった。一方、記号的表現を図形的表現に変換し、学習者が図形を操作可能な機能を備えた本提案システムを用いた学習により、図示問題の成績向上（記号的表現を見て図形的表現を生成できる能力の向上）、矛盾評価問題の成績向上（記号的表現と図形的表現の関係性を理解する能力の向上）、記述問題の成績向上（従来の問題解決能力の向上）に寄与することが分かった。以上より、本開発システムが両表現間の関係性の理解に寄与することが分かった。

上記から、本提案システムの活用により、記述問題の成績が上がる可能性が示唆されたが、問題の種類に

表 5 解答の変更数と初回診断

Table 5 Number of answer changes and initial diagnosis.

単文の種類	解答修正数	初回診断正誤
点の定義	2.67	0.44
点の関係	2.33	0.72
計算式	4.61	0.28
計算結果	7.28	0.17
結論	2.22	0.50

依存する可能性もあり、今後の追加調査が必要である。

### 5.5 ログ分析結果

被験者のシステム内での活動について、今回システムで出題した最難問である「軌跡」の問題についてのログを分析し、分析結果から被験者の解答修正数と初回診断時について表 5 にまとめる。

本システムでは、単文の種類として、点の定義（点 P を  $(x, y)$  とする、など）、点の関係性（ $AB=BP$  など）、計算式、計算結果、結論の五つを用意した。各単文の種類ごとに、初回診断時の正解数と、解答の修正数をまとめている。

表 5 より、初回診断時に正解する確率は低く、また正解にいたるまでに必要な修正数は 2~7 回を要することが分かる。このことより、学習者がその問題を理解するためには、試行錯誤を繰り返す必要があることが分かり、本提案システムのような試行錯誤ができるようなフィードバックが重要であることが分かる。

### 5.6 アンケート結果

実験後に 18 名の被験者に対して本システムや手法について 6 件法アンケートを行った。その一部の項目と被験者の平均評価を表 6 にまとめる。事前テストの結果や統制システムを用いた後の事後テストの結果にも示されているとおり、記号的表現と対応する図形的表現（あるいは対応しない図形的表現）を提示したとしても、学習者は必ずしも理解できていない。よって、本システムによる学習を通して、本システムが描画した図形的表現が理解できたか等、表 6 については各々重要な項目であると考えられる。

アンケートはそれぞれ (1)~(5) でシステムが正常に機能していたか、(6)~(10) で本研究において提案した手法自体が数学学習に重要であったか、(11)~(15) で本提案手法を反映させたシステムによる数学学習の有効性について評価するための項目となっている。

結果、被験者の多くから本システムを用いた数学学習について高評価を得た。特に本論文で挙げた記号的表現をもとにした図の可視化や操作について、可視化

表 6 アンケート結果 (一部)  
Table 6 Questionnaire results(part).

(1) システムが描画した図の内容は理解できたか	4.5
(2) 自身の解答文で生成された図の誤りには気付いたか	4.3
(3) 自身の解答文に誤りがあった際誤りだと気付けたか	4.2
(4) システムの解答文を用いての解答は可能であったか	4.7
(5) システムに用意された解答文は見慣れた文であったか	3.2
(6) 文を図形に変換できる能力は数学理解に重要か	5.4
(7) 文を図形に変換する活動は数学理解に重要か	5.2
(8) 自身の文がどんな図形を表すか考えることは重要か	4.9
(9) 自身の文でどんな制約の図ができるか意識しているか	3.2
(10) 図の制約について意識することは数学理解に繋がるか	4.4
(11) 表現の変換や図の操作は数学の理解に繋がると思うか	5.4
(12) 記号的・図形的表現の両表現の理解は重要だと思うか	5.3
(13) システムを用いた学習は数学理解に有効だと思ったか	5.2
(14) 記号文から図形への変換は解答の際に役に立ったか	5.0
(15) 記号文から図形への変換は数学理解に有効だと思うか	5.1

された図が誤っている (図の操作で思ったような操作ができない) ことから被験者の記号的表現文が誤っていることに気付けたのではないかと表 6 の項目 (1)~(4) の評価から考えられる。ただし, その問題の解答図を想定できなかった被験者からすれば誤りの図が認識できないため, 結果的に自身の記号的表現文の誤りにも気づきづらかった場面もあったのではないかと想定する。このことから, この問題点の対処 (解答図だけ用意をする等) を行うことも今後の課題の一つといえる。項目 (5) より解答時に文面だけでおおよその答えを想定されるというのはほとんどなかったと考えられる。また, 被験者も元々, あるいは実験を通して数学理解について複数の表現 (本論文は記号, 図形表現の 2 表現) を用いることが有効であることに肯定的であったことが項目 (6)~(8) で読み取れる。この結果は, 本手法が数学理解に貢献, 必要であることを示唆している。項目 (9) から, 学習者が普段の数学学習で書く文がどのような図になるか, またどのような制約がかかるかは意識していないことが分かる。しかし, 項目 (10) で, 理解へつながると意識していることから, その普段の学習についての困難さが考えられる。本手法を取り入れたシステムによる学習が数学理解につながり, それを実感した上で両表現を理解しておくことの重要性を被験者が感じ取ったことも項目 (11)~(13) で分かった。更に, 項目 (14), (15) で記号→図形への変換機能を用いたシステムによる数学解答について高評価を得た。

## 6. む す び

本論文は, 高等学校教育科目の数学「図形と方程式」

を対象に, 数学の問題文や解答に該当する記号的表現と, それが意味する図形的表現の関係性の理解を促進するシステムについて提案した。提案システムでは, 学習者は自身で単文を組み合わせて数学の解法を記述していく。システムは内部にもつデータベースにより, 学習者の解法を診断し, その単文群がもつ図形的な制約に基づいた図を可視化する。更に, 単文群がもつ制約の範囲であれば図を操作可能とした。これにより, 学習者は自身の構築した単文群がもつ図形的な意味を把握でき, 単文を追加・修正・削除したときに図がどのように変化するかを観察できる。また, 学習者の解答が誤っているときは, 学習者自身が図の振る舞いの誤りに気付き, 修正することが期待される。

本システムを用いた評価実験によって, テスト内容の、『図示問題』、『矛盾評価問題』、『記述問題』とアンケートの結果から, システムによる数学学習の有効性を確認し, 本論文の目的である記号文から図形への変換を行うことでの内発的な気づきによる数学理解が本システムを介して両者の関係を理解させるのに有効であることが明らかになった。よって, 数学における記号的表現と図形的表現の理解のために, 両表現を関係づける方法として提案した, 学習者が記述する記号的な文に対して図形的に表現 (変換) するフィードバックの妥当性が示された。同時に, この結果を導いた今回の評価実験の妥当性を示せたと考えられる。また, 通常の数学の記述問題の理解の向上につながる可能性も示唆された。操作ログより, 本提案システムのように試行錯誤させることの必要性が明らかになった。アンケート結果より, 本システムを用いた学習は被験者に好意的に受け入れられており, 本システムを用いて学習することに被験者は肯定的であることが分かった。

今後の課題としては, 本論文では, 1) 誤選択肢は類似した表現を著者らが選択し, 提示する選択肢により学習効果が変わることが予想できるため, この点についての議論が必要である, また, 2) 軌跡の分野における単純な問題でのみの学習だったので, 他の平面幾何座標問題や複数の要素を組み合わせた複合問題での学習についての対応方法を検討していく, 更に, 3) 本論文で提案したシステムの学習効果により, より精査な評価を行う必要がある。本システムでは, 題材として軌跡を扱っているため本範囲が未知である学習者は対象外となる。一方で, 今回対象とした工学部の学生やその他の範囲の学生に対しても, 被験者の状況により学習効果が異なる可能性があるため, 被験者の特性も

考慮した実験を行うことも今後の課題の一つである。

謝辞 本研究の一部は科研費・基盤研究(C)(15K00492) 基盤研究(B)(K15H02931) 基盤研究(B)(K26280127)の助成による。

### 文 献

- [1] 藤村宣之, 知識の獲得・利用とメタ認知, 三宮真智子(編)メタ認知-学習力を支える高次認知機能, 北大路書房, 京都, 2008.
- [2] PERKINSON, H.J, 誤りから学ぶ教育に向けて 20 世紀教育理論の再解釈, 勁草書房, 2000.
- [3] 平嶋 宗, “「誤りへの気づき」を与えるインタラクシオンを目指して,” ヒューマンインタフェイス学会誌, vol.6, no.2, pp.99-102, 2004.
- [4] 平嶋 宗, 堀口知也, “「誤りからの学習」を指向した誤り可視化の試み,” 教育システム情報学会誌, vol.21, no.3, pp.178-185, 2004.
- [5] 東本崇仁, 今井 功, 堀口知也, 平嶋 宗, “誤りの可視化による階層構造の理解を指向したコンセプトマップ構築学習の支援環境,” 教育システム情報学会誌, vol.30, no.1, pp.42-55, Jan. 2013.
- [6] 中原忠男, 算数・数学における構成的アプローチの研究, 聖文社, 1995.
- [7] 望月 悟, “算数の問題における絵図を用いた解決過程についての研究,” 上越数学教育研究, no.21, pp.119-128, 2006.
- [8] G. van Essen and C. Hamaker, “Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems,” J. Educational Research, vol.83, no.6, pp.301-312, 1990.
- [9] C.M. Diezmann and L.D. English, “Promoting the use of diagrams as tools for thinking,” The Roles of Representation in School Mathematics, (NCTM2001YEARBOOK), NCTM, pp.77-89, 2001.
- [10] 田中由美恵, “図形表現から記号的表現への変換に関する調査研究,” 上越数学教育研究, no.21, pp.119-128, 2006.
- [11] 堀口知也, 平嶋 宗, “誤りへの気づきを支援するシミュレーション環境—表現手法と視覚効果を考慮した Error-Based Simulation の制御,” 教育システム情報学会誌, vol.18, no.3, pp.364-376, April 2001.
- [12] 堀口知也, 平嶋 宗, “誤りの修正を支援するシミュレーション環境—誤り原因の示唆性を考慮した Error-Based Simulation の制御,” 人工知能学会論文誌, vol.17, no.4, pp.462-472, 2002.
- [13] 今井 功, 東本崇仁, 堀口智也, 平嶋 宗, “中学理科における Error-based Simulation を用いた授業実践—「ニュートンに挑戦」プロジェクト—,” 教育システム情報学会誌, vol.25, no.2, pp.194-203, 2003.
- [14] 舟生日出男, 亀田卓司, 平嶋 宗, “幾何証明課題の解決過程における推論の誤りのインタラクティブな可視化,” 日本教育工学会論文誌, vol.32, no.4, pp.425-433, 2009.
- [15] 松田憲幸, 高木佐恵子, 曾我真人, 堀口知也, 平嶋 宗, 瀧 寛和, 吉本富士市, “鉛筆デッサンが表す写実誤りの三次元モデルによる顕在化,” 信学論 (D), vol.J91-D, no.2, pp.324-332, Jan. 2008.
- [16] 國近秀信, 古賀崇年志, 出山大誌, 村上卓見, 平嶋 宗,

竹内 章, “誤り可視化による英作文学習支援,” 信学論 (D), vol.J91-D, no.2, pp.210-219, Feb. 2008.

- [17] 堀口知也, 平嶋 宗, “学習支援を指向した誤り可視化のためのロバストシミュレータ,” 人工知能学会論文誌, vol.21, no.6, pp.514-525, Nov. 2006.

(平成 29 年 9 月 29 日受付, 30 年 1 月 14 日再受付, 3 月 6 日早期公開)



黒川 魁

2017 東京工芸大学工学部卒。現在、東京工芸大学大学院博士前期課程在学中。数学における記号的表現と図形的表現を用いた数学理解のための学習支援の研究に従事。



東本 崇仁 (正員: シニア会員)

九州工大・情報工・知能情報工卒。同修士了。広島大・工・情報工博士退。広島大・博士(工学)。早大人間科学学術院助手, 東京理科大学工学部経営工学科嘱託助教を経て, 2015 年より東京工芸大工学部コンピュータ応用学科助教, 現在に至る。教育工学, 知的学習支援システムの研究に従事。日本教育工学会, 教育システム情報学会, 人工知能学会等会員。本学会教育工学専門委員会幹事補佐を経て, 現在幹事。2008 年, 2009 年教育システム情報学会論文賞, 2009 年 AIED Honorable mention (Top 3 papers) 受賞。



堀口 知也 (正員)

1987 早稲田大学理工学部電気工学科卒。1989 同大学院理工学研究科博士前期課程了。1997 大阪大学大学院工学研究科博士後期課程了。同年, 神戸商船大学講師。2001 同助教。2003 神戸大学海事科学部助教。2007 神戸大学大学院海事科学研究科准教授。工学博士。知識工学の教育応用に興味をもち, 知的学習支援, 情報可視化システムの研究に従事。



平嶋 宗 (正員)

1986 阪大・工・応物卒。1991 同大学院博士課程了。同年同大産業科学研究所助手。同講師, 九工大・情工助教を経て, 2004 年より広島大学大学院工学研究科教授。学習工学に関する研究に従事。工学博士。