広島大学附属中・高等学校中等教育研究紀要
〈第64号　2017〉

問題作成学習を通した高校数学におけるアクティブ・ラーニングの実践研究

喜　田　英　昭

本研究の目的は，高等学校の数学の授業において，個人・グループでの問題作成学習を通したアクティブ・ラーニングを行い，生徒の意識の変容，学習に対する理解度を評価し，この学習の有効性を検証することである。そこで，本稿では，インタビュー調査やアンケート調査を通して，問題を作成するときの生徒の思考活動に着目し，生徒の意識の変容を考察していった。実践結果より，数学の問題を自分で作り出し，それをお互いに評価することで，自分でも気づけなかった問題の良さに気付き，数学への興味・関心を高めることができた。また，グループで問題を発表し，新たな問題を作成することで，お互いに自分の考えを表出しながら，自己の内部では，知識の再統合が行われていたことが明らかになった。

1．はじめに

高等学校の数学の学習では，大学入試などの現実的な問題により時間的な制約もあり，与えられた問題を解く問題演習型の授業が典型的である。確かに，問題演習を通して学習内容を理解し，別の解き方を模索することにより数学的な考え方が高められることもある。しかし，別解などの新たな考え方を求める学習では，生徒がすでに獲得している知識の差が大きく影響し，数学の授業で育成したい生徒の資質が見えにくい。

そこで，『**「問題を解く」授業だけでなく，個人・グループで「問題を作り出す」アクティブ・ラーニングを取り入れることにより，生徒の数学への興味,関心のみならず，数学的な考え方や学習の理解度も深まり，数学の授業を通して育成したい資質を高めることができる**』と考え，研究課題を設定した。

問題作成学習で育成したい生徒の資質は，次の３点である。

１．数学の問題を自分で作り出すことで，数学への興味・関心を高める。
２．完成度の高い問題を作成しようとすることで，生徒自らの数学的な見方・考え方を深化させる。
３．作成した問題の振り返り，発表，検討，評価によって，学習内容を表出しながら，自分の知識を統合していく。

また，問題作成学習では，単に問題を作り出すだけでなく，作成した問題をグループで発表し合い，その問題について相互評価し，さらに，グループで新たな問題を作り出すというコミュニケーション活動を生かした授業を行う。このような数学的なコミュニケーション活動により，さらに新たな見方や考え方が創発され，数学的な見方や考え方を高めることができると考える。

高校生の問題作成に関する先行研究（今岡，2001；下村・今岡・向谷・菅野，2003；下村・今岡・菅野，2006；菅野・下村・今岡，2007）では，原問題を設定せず自由な設定のもとでの問題作りの実践を行い，高校生に対しての問題作りの意義とその方法について考察を行っている。この自由な設定での問題作成では，生徒が直面しているシチュエーション（平林，1984）を生かした問題設定となっており，問題作りの基本的な方法であると考えられる。そこで，本研究では，生徒が直面しているシチュエーションを「問題解決の中から，新たな問題が設定される」（平林，1984）場面に設定し，与えられた問題をさらに発展させるという形での問題作成の実践研究を行った。自由な場面設定に対し，与えられた問題を発展させるという制限はあるが,「問題を発展させる」という数学的な思考が，生徒の数学的な創造性をより発揮できるのではないかと考えている。

以上をふまえて，次の５点を本研究の研究項目としている。

(1) 問題作成学習についての先行研究の調査，考察を行う。
(2) 問題作成学習の枠組みを構築し，実験授業を行う。

Hideaki KIDA：A Practical Study of Active Learning Through Problem Posing in High School Mathematics

(3) 生徒へのインタビュー調査やアンケート調査により，意識の変容を評価する。
(4) 得られた結果より問題作成学習の再構築を行う。
(5) 実践を精査し，問題作成学習でのアクティブ・ラーニングの有効性を検証する。

これまでの研究により，個々の生徒による問題作成に加えて，グループで問題を発展させることによって，

・問題を多角的に見ることができる
・数学的な質や発想を評価することができる
・コミュニケーション活動から，新たな視点，発想が創発する

など，グループで問題作成を行う好意的な結果が得られた。しかし，グループ活動では，一部の生徒が議論を引っ張っていたり，議論に参加していない生徒がいたり，発展の視点が見つからなかったり，活動がうまくいかないこともある。このような場面では，話し合いを促したり，きっかけとなる視点を与えたりするなどの教員側からのサポートも必要であると思われる。さらに，お互いの問題について相互評価を行い，グループで数学的なコミュニケーションを行うことにより，自己評価の向上だけでなく，数学的な知識の深まると考えられる。

これまでの研究では，生徒が作成する問題の分類や作成された問題の水準の設定など，量的な研究が主であった。そこで本稿では，インタビュー調査やアンケート調査を通して，問題を作成するときの生徒の思考活動に着目し，問題作成学習による生徒の変容を考察していく質的な研究を報告する。

2．実践概要

本稿では，数学Ⅰ「三角比」の分野での問題作成学習について，生徒の作成した問題とその問題への自己評価を中心に分析を行う。実施時期は2016年3月3日から7日までであり，連続した3時間を本学習に費やしている。実施クラスは国立高等学校高校1年生42名（男子23名，女子19名）であり，通常のクラス編成によるクラスである。

問題作成学習の全体計画は以下の通りである。

第1次　個人での問題作成，自己評価
第2次　作成した問題のグループ内での発表，相互評価，自己評価
第3次　グループで新たな問題の作成，自己評価
第4次　グループで作成した問題の発表，相互評価

個人での問題作成では，まず原問題を提示し，その問題を参考に問題作成させる。具体的な指示は以下の通りである。

【課題】

次の①～④を参考にして
・問題の条件を変えてみる。
・文字を使って一般的に考察してみる。
・関連する問いを作って考えてみる。
・数学的な性質を考察する。
などの工夫を各自で行って，新たな問題を作成してみよう。このとき，できるだけ自分だけのオリジナルな問題を作成し，完成度の高い問題を作成しよう。作成手順も詳しく書いてください。また，できれば解答（証明）も作成してください。なお，問題①～④を解く必要はありません。

問題作成レポートにおける原問題は，以下の視点に基づいて設定している。

・種々の重要な要素を用いていること。
・多くの生徒に習熟してほしい問題のレベルであること。
・発展性を含んでいること。

今回実践を行った「三角比」の分野は，平面図形，空間図形の性質を含む内容だけではなく，方程式，正弦定理，余弦定理などの数式を用いた考察もできる。以下，**表1**に原問題を示す。

表1　問題作成の原問題

① △ABCにおいて，$\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 4 : 6$であるとき，最も小さい角の余弦の値を求めなさい。
（正弦定理，余弦定理）

② △ABCにおいて，次の等式が成り立つことを証明しなさい。（正弦定理，余弦定理，等式の証明）

$$2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C) = a^2 + b^2 + c^2$$

③ 円に内接する四角形ABCDにおいて，AB=3，BC=1，CD=3，DA=4とするとき，次のものを求めなさい。
（平面図形の性質）

(1) 角Aの大きさA　　(2) 対角線BDの長さ　　(3) 四角形ABCDの面積

④ 四面体ABCDにおいて，AB=AC=AD=3，BC=CD=DB=$\sqrt{3}$のとき，その体積を求めなさい。
（空間図形の性質）

そして，問題を作成させるときに，次の２点について記述をさせた。

１．問題を作成するとき，どの問題に着目し，どのような発想で新たな問題を考えようとしましたか。

２．問題のオリジナル性や完成度を高めるために，どのように問題を変えたり，組み立てたりしましたか。

第２次のグループ発表では，作成した問題をグループで相互に発表し，作成した問題の良い点，改善点を付箋で伝え合った。ここではグループのメンバーからの評価を受けて，自分の問題作成についてさらに自己評価を行った。第３次ではグループでの問題作成として，以下の課題を与え，グループで新たな問題作成に取り組ませ，作成した問題のアピールポイントを記述させた。

【課題】

作成された問題の１つに着目する，または，複数の問題を融合するなどして，グループで新たな問題を１つ作成しよう。さらに，作成した問題の数学的性質を考察してみよう。

第４次ではグループで作成した問題を発表し，相互評価を行った。最後に，アンケート調査を行い，この学習への数値的な評価を行った。

本稿では，第１次，第２次，第３次での個別の生徒の思考に焦点を当て，個人での問題作成，インタビュー，作成した問題への自己評価，グループでの問題作成の自己評価を考察し，育成したい生徒の資質がどのように表れているか考察していく。

３．授業実践の考察

本節では，生徒が実際に作った問題を挙げ，どのように考え問題を作成したかを，インタビュー調査を通して考察していく。インタビュー調査の質問項目は以下の通りである。

質問１：「オリジナルな問題」，「完成度の高い問題」をどのようにとらえましたか。

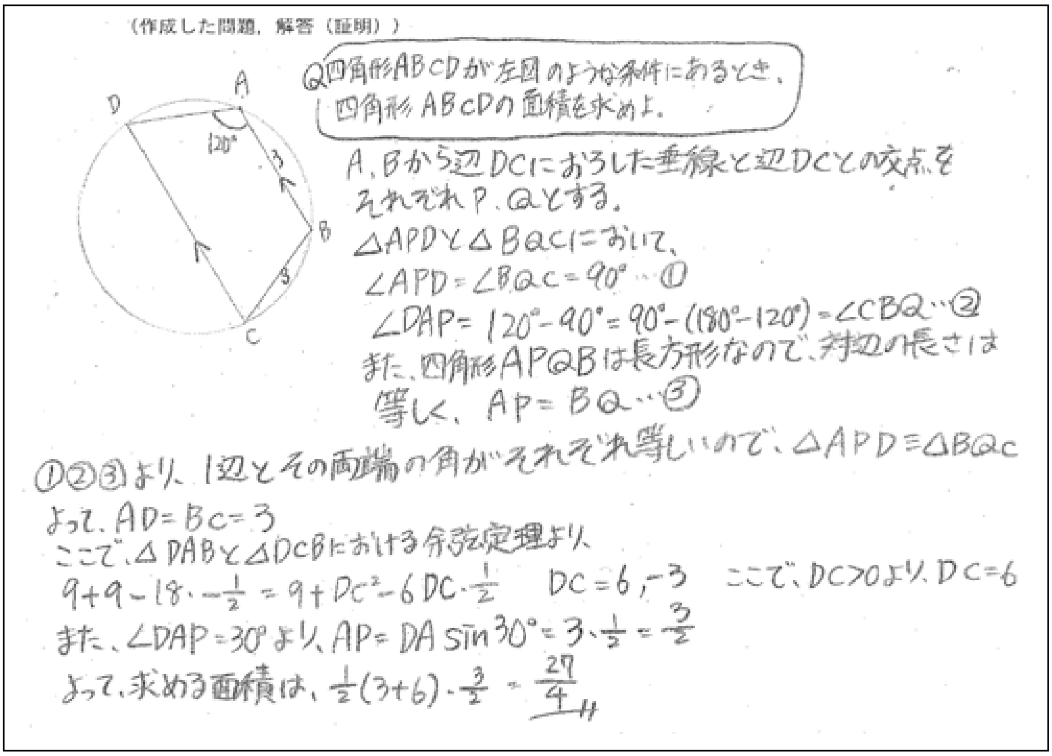
質問２：問題を作るとき，どのような問題が良い問題だと思っていますか。

質問３：どのような発想で問題を作成していきましたか。

質問４：これからさらに，どのように完成度を高めようとしていますか。

以下，２人の生徒Ａ，Ｂに着目し，インタビュー調査を通して，考え方の変容を考察する。

まず，生徒Ａが作成した問題を以下に示す。


（作成した問題，解答（証明））

Q 四角形ABCDが左図のような条件にあるとき、四角形ABCDの面積を求めよ。

A、Bから辺DCにおろした垂線と辺DCとの交点をそれぞれP、Qとする。
△APDと△BQCにおいて、
$\angle APD = \angle BQC = 90^\circ$ …①
$\angle DAP = 120^\circ - 90^\circ = 90^\circ - (180^\circ - 120^\circ) = \angle CBQ$ …②
また、四角形APQBは長方形なので、対辺の長さは等しく、$AP = BQ$ …③
①②③より、1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、$\triangle APD \equiv \triangle BQC$
よって、$AD = BC = 3$
ここで、△DABと△DCBにおける余弦定理より
$9 + 9 - 18 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 9 + DC^2 - 6DC \cdot \frac{1}{2}$　$DC = 6, -3$　ここで、$DC > 0$ より、$DC = 6$
また、$\angle DAP = 30^\circ$ より、$AP = DA \sin 30^\circ = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
よって、求める面積は、$\frac{1}{2}(3+6) \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{4}$ //

問題作成途中のインタビューでは，生徒Ａは次のように回答した。

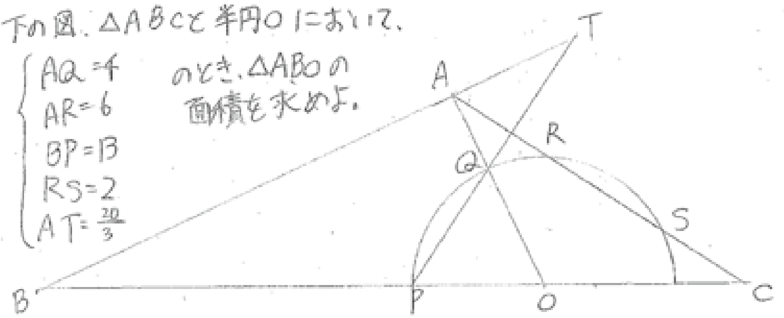
質問１（問題のオリジナル性，完成度について）

「円に内接する四角形の問題は，辺や角の大きさが与えられるのが一般的だから，平行とか違う条件でやってみたいと思った。より少ない条件を与えるのが完成度の高い問題と思った。」

質問２（良い問題の条件）

「条件が少なくて，よくよく考えていけば色んなヒントが分かってくる問題。」
質問 3（問題作成の発想）
「円に内接することと平行を使いたくて，どの条件が必要かなと考え，最小限に抑えようとした。」
質問 4（完成度を高めるために）
「図形を複雑にしたら，条件が少なくてもヒントが与えやすくなる。」
その後，グループによる相互評価では，生徒 A の問題に対しては，次のようなコメントが与えられている。
「条件が少なくて，自分で条件をみつけていかなくちゃいけないから考えさせられた。△ DAB と△ DCB の面積を求めるための条件を，それとは違う図形の分け方でとくのが面白かった。問題がすっきりしていてわかりやすい。」
「シンプルな問題設定だが，図形の性質をよく理解していないと解けないようになっていた。もう少し値を複雑にしたら難易度が上がり面白くなるかもしれないと思った。」
「条件を変えることで普段見かけるような同一円周上の四角形の問題と違うという工夫があった。もう少し難しくていいと思った。」
このコメントをふまえて，生徒 A の問題作成についての自己評価は以下の通りである。
「みんなの問題がすごくてびっくりした。色んな定理を組み合わせていてすごかった。自分の問題は少し易しすぎたかなと思った。もっと図形を複雑にすべきだったと思った。」
そして，このグループで議論し，新たな問題を作成した。作成した問題を以下に示す。

下の図．△ABCと半円Oにおいて，
AQ=4, AR=6, BP=13, RS=2, AT=$\frac{20}{3}$ のとき，△ABOの面積を求めよ。



(解答)
方べきの定理より $6(6+2)=(2QO+4)4$
$48=8QO+16$
$\therefore QO=4$

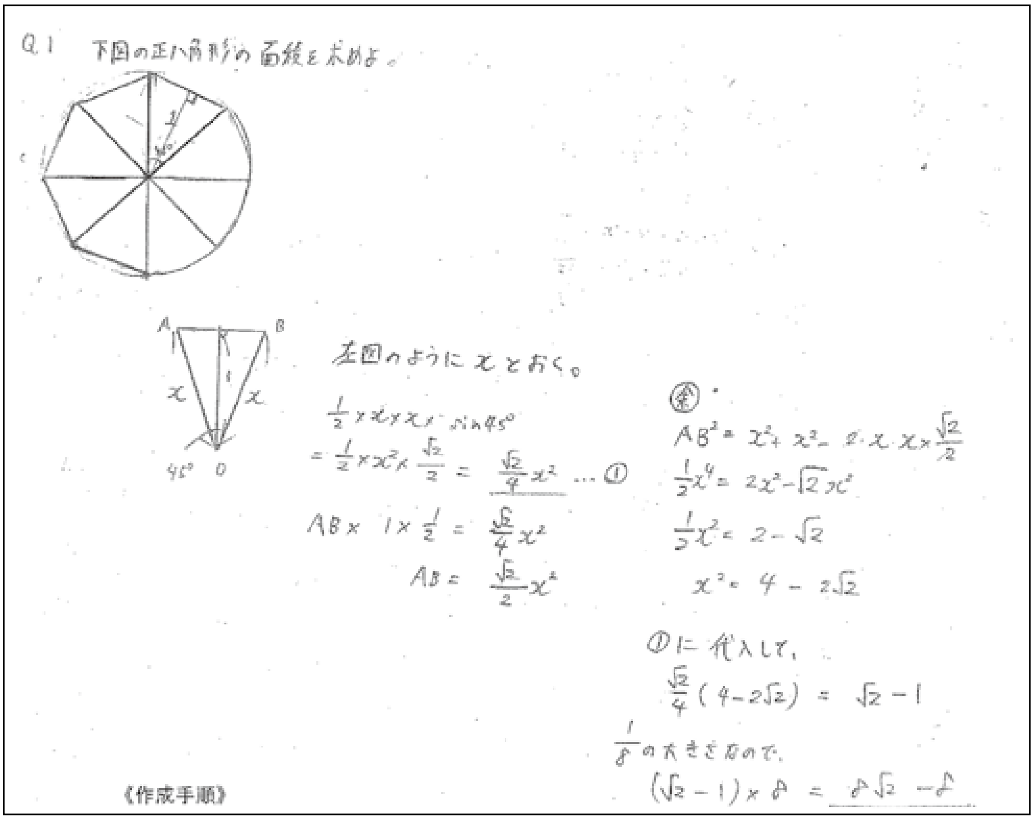
△BAOと直線TPにおけるメネラウスより，$(QO=PO)$
$\frac{TB}{AT}\cdot\frac{PO}{BP}\cdot\frac{QA}{OQ}=1$
$\frac{\frac{20}{3}+AB}{\frac{20}{3}}\cdot\frac{4}{13}\cdot\cancel{\frac{4}{4}}=1$ 　 $80+12AB=260$
$12AB=180$ 　 $\therefore AB=15$

$\cos\angle ABO=\frac{225+289-64}{510}=\frac{15}{17}$
$\sin\angle ABO=\sqrt{1-\frac{225}{289}}=\sqrt{\frac{64}{289}}=\frac{8}{17}$

$\triangle ABO=\frac{1}{2}\cdot15\cdot17\cdot\frac{8}{17}=60$

この問題のアピールポイントは
「方べきの定理，メネラウスの定理，余弦定理，面積の公式をすべて使った問題で，総合的な知識がないと解けないようになっている。」
と評価しており，最後の感想では，
「とても難しかったけど，みんなでアイデアを出し合って作れたのがよかった。」
と自己評価している。個人で問題を作成するとき，問題条件を少なくするために図形への見方や考え方を深め，さらに，問題をグループで作成することで，これまでに学習した知識を振り返り，そして問題の中で知識を統合することができるようになっていた。

次に，生徒Bが作成した問題を以下に示す。



問題作成途中のインタビューでは，生徒Bは次のように回答した。

質問１（問題のオリジナル性，完成度について）
「基本をあらいなおそうと思って，教科書見て，今までにやったことをなんとなく書き留めて，自分でどういじろうかと考えていた。教科書を見ていたら正八角形の面積が面白いと思って，辺の長さだけ分かれば面積が分かるので，この次は辺の長さが分かる位置を変えようと思った。」

質問２（良い問題の条件）
「簡単だけど，すごい計算をするのではなくて，この発想を使えば一瞬で解けるという問題。」

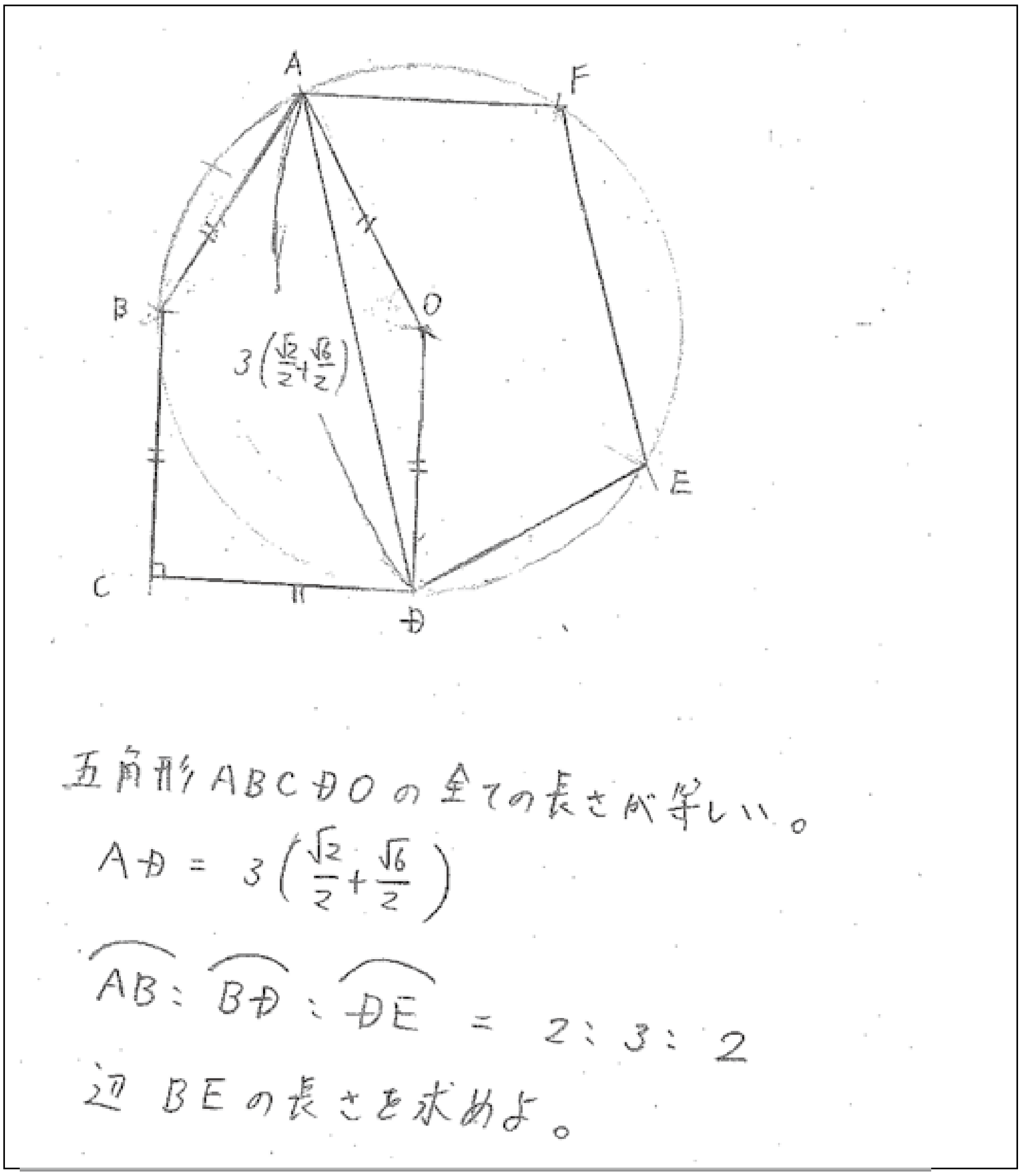
質問３（問題作成の発想）
「基本の問題をいじって，１個考え方を加えて，そうしたら問題が解けるようにする。」

質問４（完成度を高めるために）
「人に解いてもらう。すらすら解けたら数値をいじってみる。」

その後，グループによる相互評価では，生徒Bの問題に対しては，次のようなコメントが与えられている。
「八角形の特性をうまく三角比に組み込んですごいと思った。簡単げだけど，なんか難しげ。」
「図がスッキリしていながら，問題が工夫されているのが凄い。発想が面白かった。」
「Simple is best‼ 数字１つで解けるのは面白い。図形で，何かを記号でおいて最後までやるのは難しいから，解きがいがありそう。」

このコメントをふまえて，生徒Bの問題作成についての自己評価は以下の通りである。
「一目見て分かりやすい問題を作ろうと意識したことが皆にも伝わってよかった。一見簡単そうに見えるが，三角比を使った面積の求め方，余弦定理の２つを組み合わせて少し難化させた。問題を作る側になると，答えから逆算して考えていく方法が楽だと思った。」

そして，このグループで議論し，新たな問題を作成した。作成した問題を以下に示す。



この問題のアピールポイントは
「あることに気づけばとても簡単になるが，ちゃんと解けばわりと難しい問題になるところ。ちゃんと解けば，様々な三角比に関する考えや円周角の定理を使う必要があるから，面白い。」
と評価しており，最後の感想では，
「自分で考えるのはとても難しかったけど，グループで話し合ったりして１つの問題を作っていくのがとても楽しかった。なかなか良い問題ができたと思う。」
と自己評価している。問題を作成する中で数学への面白さに気づき，さらにグループで問題を作成することで，自分の知識を表出し，様々な考え方を統合した問題を作成することができていた。自分では気づけない考え方も，グループで考えることで気づくことができ，それらを統合して新たな考え方を導くことができると考えられる。

４．まとめ

本稿では，インタビュー調査やアンケート調査を通して，問題を作成するときの生徒の思考活動に着目し，問題作成学習による生徒の変容を考察していった。この考察により以下の点が挙げられる。

・数学の問題を自分で作り出し，それをお互いに評価することで，自分でも気づけなかった問題の良さに気付き，数学への興味・関心を高めることができていた。

・問題の条件を精錬化し，様々な定理，性質を組み合わせることで，完成度の高い問題を作成しようとし，自らの数学的な見方・考え方を深化させることができていた。
・グループで問題を発表したり，新たな問題を作成したりすることで，お互いに自分の考えを表出しながら，自己の内部では，知識の再統合が行われていた。

これらの考察により，問題作成学習を通したアクティブ・ラーニングは，数学の授業を通して高めたい生徒の資質の向上に有効であると考えられる。さらに，学習内容について振り返りを行うことができ，学習内容への理解度も深めることができると考えられる。

今後の課題としては，様々な分野にて問題作成学習を行い，これらの生徒の行動は分野に依存するのかについて質的研究を深めていきたいと考えている。

引用・参考文献

1）今岡光範，「高校生・大学生による数学の問題作り」，『全国数学教育学会誌，数学教育学研究』，第７巻，2001年，pp.125-131
2）下村哲・今岡光範・向谷博明・菅野栄光，「高校生による問題作り－高校３年生を対象にして－」，『全国数学教育学会誌，数学教育学研究』，第９巻，2003年，pp.243-253
3）下村哲・今岡光範・菅野栄光，「高校生による問題つくり（Ⅱ）－数列の問題作りを通して－」，『全国数学教育学会誌，数学教育学研究』，第12巻，2006年，pp.215-225
4）菅野栄光・下村哲・今岡光範，「高等学校における発展的な問題作りの授業－大学入試問題を活用した取り組み－」，『日本数学教育学会誌』，第89巻，第７号，2007年，pp.２-９
5）平林一栄，「問題解決から問題設定へ」，『日本数学教育学会論文発表会論文集』，1984年，pp.69-72
6）喜田英昭，「生徒の創造性を育成する問題作成レポート学習の研究」，『日本数学教育学会誌臨時増刊，第93回総会特集号』，第93巻，2011年，p.484