経験知についての一考察
ー失敗の経験から得るものー

清水　浩士

経験知は多くの場合暗黙知であるから，生徒が経験知を蓄積するための学校教育や数学教育の在りようについての必要十分条件は，言語ではそのすべてを伝えようがない。本稿では，数学教育において生徒達に暗黙知を受け入れて経験知として蓄積していくことのできるような素地をどのようにして培うのか，そのためにはどのような学習を組織する必要があるのかということに関して，見通しを探った。

本研究を通じて，生徒がさまざまなことに取り組む中で失敗を含むいろいろな経験をし，それらの経験そのものを成果として次の新たな経験に生かすことのできる能力を培うことが大切であることを，授業の具体例を通して指摘することができた。また，概念形成という数学的理解のプロセスは数学的活動そのものであることに着目し，その理解過程と経験知との関係を数学教育の理論に基づいて説明した。

1．問題意識

世界は未曾有の変化に直面している。その変化に対する懸念は昨今始まったことではなく，たとえばローマ・クラブ(メドウズ.D.H.　ほか，1975)のレポートにおいてすでに半世紀近く前から指摘されているように，有限な世界の中で宇宙船地球号(フラー.B.，2000)の乗組員として，この世界を持続可能なものとしていかにつくりあげていくかということは近い将来に向けての重要なテーマとして取り上げられてきた。ESD，SGH に代表されるこの間の一連の教育変革の流れはこのような中でなされてきていると考える。その中で，経験知がひとつのキーワードとして取り上げられているのは，既存の知識の当てはめだけでは解決しない新たな状況に取り組むことのできる人材の育成が急務とされてきているからであろう。

本稿では，経験知を，経験の蓄積によって得られた知識や技能として考察を進める。経験知は多くの場合暗黙知である。たとえそれまでの経験すべてを言語化することが可能であるとしても，次に起こる状況はそれまでのいずれかに当てはまるとは限らない。一方で，それまでの経験があるからこそ，その新たな状況に自らの経験を照らし合わせて適合させ，変化させていくことが可能となる。暗黙知を，「言語で明確に表現することができない，もしくはそれが困難な(廣松渉　ほか,1998)」知識であるとすれば，生徒が経験知を蓄積するための学校教育や数学教育の在りようについての必要十分条件は，言語ではそのすべてを伝えようがない。言葉として伝えられるのはせいぜい「教訓」であり，より深い部分は経験者個人のものである。筆者は，数学教育において，生徒達に暗黙知を受け入れて経験知として蓄積していくことのできるような素地をどのようにして培うのか，そのためにはどのような学習を組織する必要があるのかということに関して，その見通しを探りたい。本稿では，経験知とは何かに関するいろいろな考え方を，数学教育学にとどまらず，知見も多い科学技術・経営等をふくむ様々な分野からヒントを得て考察を進める。

毛利（2010）は，科学者のありようとして，従来の要素還元方式[*1] の限界を指摘し，科学技術は文化であり，総合智の一面を担うものであると述べ，「科学には個々の人間に人類全体のことを思い起こさせる力(p.85)」を持っており，科学の地球全体を俯瞰しておこなう課題の提示や警告が「科学技術を担う者の使命(p.85)」であると指摘するように，新たな状況に取り組むことのできる人材の育成は，特定の専門分野が個別に独立して取り組むことのできる課題ではない。科学技術や経営学に知見が多い理由は，経験知を活かすことが大きな進歩や成功に寄与する反面，経験知が活かされないことによる失敗によって取り返しのつかない状況に陥る可能性を常にはらみ，その結果が直接社会に大きな影響を与えるからである。昨今の科学技術の適用や経営方針の間違いによって生じている社会的問題を取りあげれば枚挙にいとまがない。科学や技術に携わる人たちが，「やることによって悪い方に使用されるという責任と，やらないことによって，もっと人間が幸せになれるのを妨げるという責任(朝永，2012，p.4)」の狭間で，日々研究とその成果の使用について対峙せざるを得なかったことは，今や科学・技術者等の一部の人たちだけの課題ではない。

---

*1 科学者一人が扱う自然の範囲は，時代と科学自体の進展につれてどんどん細かくなっていきます。要素還元法といいますが，そうやって最終的に一番小さなものを理解し，それを組み合わせたら自然界がわが手に入るという発想が出てくるわけです。（毛利, 2010, p.82)

2．数学教育の理解理論と経験知

筆者は，数学授業の構成（とりわけ，その具体物としての学習指導案）を，数学学習における理解過程を記述するために案出された数学的モデルである超越的再帰モデル（Pirie, S. & Kieren, T., 1989, 1992, 1994, et. al.）を教授における規範性を有するモデルに読みかえて，生徒がよりよい数学的理解を得るような学習指導案の根拠とした。学習指導案に理論的枠組みを与えることで，日々の数学授業実践や教育実習生の指導に再現可能な道標と，反省的実践の根拠を与えることができると考える（清水, 2012a）。従来多くの教員の経験と勘としておこなわれてきた学習軌道を理論的枠組みの中で語ることによって，経験知（「術」）を理論（「学」）の視点から光を当てることを企図した。岩崎（2012）は，学習指導の理論化を必要とする根拠として，今後 10 年間の指導技量豊かな教員の大量退職をあげ，「ベテラン教員の指導技量は本来直接語り継がれるものであろうが，それが一挙にいなくなればその伝達継承は不可能である」とし，「数学教育学」の「理解」理論がそのためのメタ言語を共有する有望な地下資源」となり得ることを述べている。

一方で，経験知は理論によりすべて語り尽くせるわけではない。日本の自動車生産における組み立て工程を単純にアメリカに持ち込もうとしてもできないのは「工場の優秀な従業員ですら言葉で説明できない暗黙の知識や思考様式（池村，p329）」が生産システムを支えているのと同様に，授業の一場面においても，単にその教室にいる生徒と教員の関係のみではなく，学校組織や校風，教育活動の「やりかた」等も含めてさまざまなものにより支えられている。

野中（1996）は，組織レベルにおける知識創造の文脈で「組織的知識創造」の技能・技術こそが日本企業成功の最大の要因である（p.1）とし，その「知」の方法論の特徴として暗黙知をあげる。さらに暗黙知のもつ二つの側面，「ノウハウ」という言葉で捉えられる技能・技巧などを含む技術的側面と，もう一つの重要な側面として我々が持っている「こうである」という現実イメージと「こうあるべきだ」という未来へのビジョンを映し出す思い，知覚などの認知的側面をあげる（野中, pp.8-9）。筆者は，この認知的側面を，sein と sollen の関係ととらえて，「伝え手の当為まで踏み込んでいかない限りその経験を知として捉えることなどできはしない」というメッセージと解釈する。

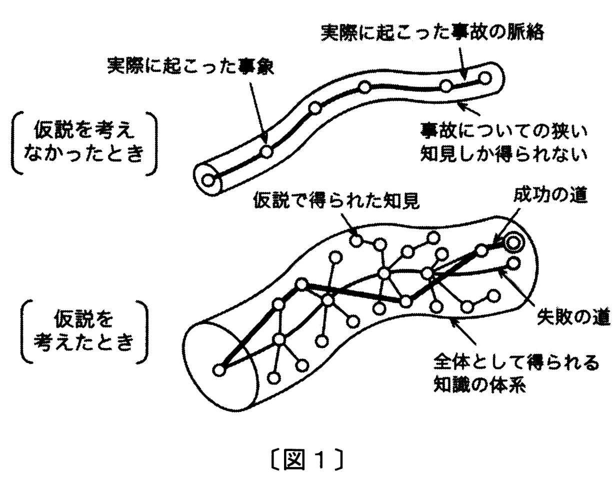
授業者は，ひとつひとつの場面において生徒の理解をよりよいものとするために，その場に応じて自らの知識の引き出しから適したものを引き出して授業を成立させる授業技術の構成原理を語ることはできても，その瞬間をとらえる術（すべ）は，言語では伝えにくい。あとで「その場面」という特別な状況においてどうであったかを語ることができるだけである。

3．失敗と経験

何かひとつのことをおこなうにあたって，上手くいったか否かはあとからわかることも多く，それを事前に察知するのは経験によるしかない。田中（2003）は「実験をこつこつ積み重ねてきたから，いつもと違う現象が起きたときに，それを見過ごすこと無しに，「あ！これは」とぴんとくるものを感じることができた」ことによる偶然の失敗の積み重ねが大きな発見につながったと，実験で失敗を重ねる中で養われていく勘にふれる。

一方で，致命的な失敗もあることは，その裏返しであろう。畑村（2001, pp.175-176.）は，機械工学の立場から，頻発している企業の致命的な失敗の共通点として，作業がすべてマニュアル化された成熟した組織の中で，作業者がそれをはずれたときに異常に気づくことのできない思考停止状態に陥りがちになる技術の成熟の問題，および，マニュアルからはずれたときに起こるべき問題を教え込まないというマニュアル教育の不備がもたらす誤判断をとりあげ，経験の蓄積の重要性を述べる。

さらに，実際に起こった失敗から学ぶためには仮説を立てて成功に至る道を探索することも必要である（畑村, 2012, pp.157-158.）ことにふれ〔図１〕，大事故を防ぐ視点のひとつに「事故の経過に沿ってそれぞれのステージで選択・実行した要因をつなげ（中略）仮に各ステージで別の選択をしたとすれば，その要因のつながりは失敗には至らず，成功につながったかもしれない」と考えて「その脈絡に作用している条件が変わったら何が起こるかを仮想的に考えてみる」という“仮想演習”の必要性を述べる（畑村, 2012, pp.158-160.）。



〔図１〕

個人においても小さな失敗を経験知として蓄積していくことが，新たな発見にもつながり，一方で大失敗をしないことにもつながる。新しいことをつくりだしていくために「一番大事なことは最初にまず行動して体感すること」であり，「そこで生じた失敗経験が新たな知識を受け入れる素地(畑村 2001, pp.126-127.)」となる。経験を知として蓄積していく基盤として，さまざまなことに取り組む中で失敗を含むいろいろな経験を通し，その経験そのものを成果として次の新たな経験に生かすことのできる能力を培うことが大切であると考える。

4. 数学学習における“仮想演習”

この節において，「さまざまな経験」は失敗を誘発させることではなく，数学の授業において，ひとつの脈絡だけでなく関連する事柄を結びつけ，ひとつの脈絡から派生する別の脈絡をつけていく経験を践（ふ）む“仮想演習”をおこなうことと位置づける。「学校の授業で教える（教科書の）知識は，すでに改良が加えられて，課題から結論までが無駄なく一直線の状態にあるものがほとんどで(畑村, 2001, p.146)※文中のカッコ内は筆者加筆」あり，その別の脈絡をつくる作業は日々の授業に託されていると言ってよい。筆者は，いろいろな脈絡をつくる経験を通して，生徒が個別の概念の獲得のみならず，それらの概念を形成する方法を取得する基盤をつくることを企図して授業構成を試みた。

問題づくりに関しては，オープンエンドアプローチ(島田, 1995)や What-If-Not(ブラウン, S. I. & ワルター, M. I., 1990)等，数学教育学の先行研究も多い。オープンエンドアプローチは未完結な問題を課題として，そこにある正答の多様性を積極的に利用することで授業を展望し，その過程で，既習の知識・技能・考え方をいろいろに組合わせて新しいことを発見していく経験を与えようとする手法(島田, 1995)である。また What-If-Not は，問題の一部を変えることで新たなる問題をつくりやすくすると同時にそのような問題づくりを通して，「①問題設定は標準的な題材をいっそう深く理解するのに役立ち，それを新しい光に照らして見直すことを可能にする ②与えられた題材から新しいアイデアを創り出すことを力づける」と意義付けがなされている。

“仮想演習”は，これら多くの先行研究の系譜にあることは間違いないが，本稿では，限定された前提から特定の目的に向けてそれまでに用いた知識や方法を意図的に集中して用いることと特徴づける。

教科書(高橋, 2011a)には，三角比のまとめとして，正弦定理・余弦定理を利用する例題がある【資料】。三角形の特定の 3 要素が決定すると，三角形が決定し，残りの要素を求めることができる。そのことにより，小学校算数以降の三角形の 6 要素に関わるテーマが完結する。2 辺の長さとその間の角の大きさが決定するときは余弦定理を用いるのは必然の流れとしても，3 辺の長さがわかった時点で条件過多となるので，残りの要素（2 角の大きさ）を決定するにあたり，正弦定理・余弦定理のいずれを用いるのか，あるいは残りのどちらの角に対して適用するのか，についてはそれぞれ複数の選択手段がある。教科書は余弦定理を，求めやすい角に対して適用するような解答のみを提示するが，なぜそうであるかと言う説明があるわけではない。おのずと授業の中で考えさせていくことになる。求めやすい方の角ではなくもう一方の角に当てはめさせて計算させる。正弦定理を用いることによって，180° までの角の正弦に対して 2 つの角が対応するという正弦のもつ特徴が確認できるとともに，論証を通して角の大きさの大小関係と対応する辺の長さの大小関係は一致することが見えてくる。

このようなことを通して，生徒は高等学校で学習する様々な数学の内容の関連づけをするという技能的側面（数学的概念の獲得）と同時に，このように別の方法を用いることにより思考を拡げていくことができることのよさを感じ取るという，野中(1996, p.9)が述べる「我々が周りの世界をどう関知するか」という意味での認知的側面において意義をもつ。

授業者である筆者が高等学校数学 I における三角比をどのようにとらえているかを言葉として伝達することはできるにせよ，授業者の持つ教材観のすべてを生徒に伝えきれるはずもない。また，1 つの問題にいろいろな方法を適用することにより，必ずしもよい結論を得るとは限らない。学習効率としては回り道になることもある。学習指導要領において教える内容は定められている一方で時間数は限られている。常日頃から生徒にそのような習慣をつけさせることが必要であり，授業における目標はおのずと個別の概念の獲得中心から，個別の概念を形成する方法の取得へと変化する。

5. 数学の理解過程と経験知

筆者は，①生徒がどのような過程を経て数学的活動を数学的認識に高めていくのか，あるいはそのような授業をどのように組織していくのかということを主題に，②生徒がよりよい理解を得られるような授業構成のありかたを明らかにすることを目的として，③生徒の数学的理解過程をより精緻に検討するために超越的再帰モデル(Pirie, S. & Kieren, T., 1989, 1992, 1994, et. al.)を規範的に用いて研究を継続している。

(1) 超越的再帰モデル

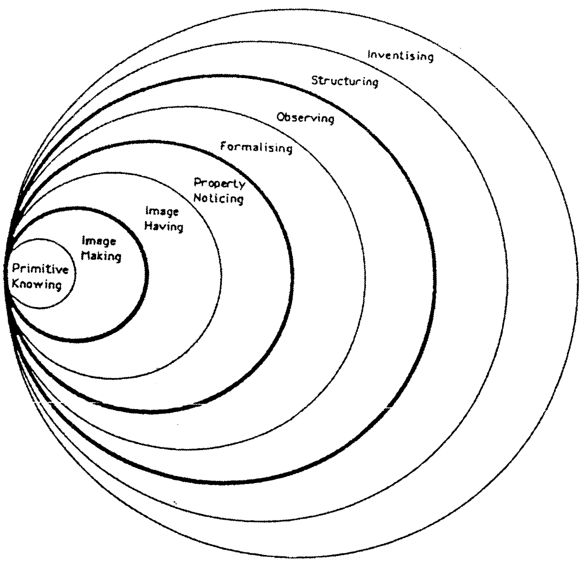
超越的再帰モデル(Pirie, S. & Kieren, T., 1989,1992, 1994, et. al.)は生徒の数学的理解過程を再帰性と超越性をもつ力動的なものとして記述するモデルであり，その理論の特徴として次のことをあげることができる。

① 数学的理解はいろいろな水準[*2]により特徴づけられるであろうが，それは直線的ではない。理解は再帰的現象であり，再帰は思考が知識水準間を移行するときにみられる。(Pirie, S. & Kieren, T., 1989, p.8)

② 子どもたちの数学的理解の成長において，新しい水準での知識がそれ以前にもっていた知識と互換性を保ちながら超えていく(小山, 1994, p.67)という超越性を有する。

③ その超越は，実際の理解過程においては，どの水準にあっても，すぐには解決できないような問題や疑問に直面したとき，自分のその時点での不適切な理解を拡張するために，内側の水準へ折り返す(Pirie, S. & Kieren, T., 1994, p.173)ことを通して行われる。

④各理解水準は，〔図２〕のような８層のモデルで描かれる。



〔図２〕超越的再帰モデル

第１水準：初源的認識（**Primitive Knowing**）
理解するようになる過程の始まりで，初源的とは，それぞれ固有の数学的理解への出発の場所であり，学習者が最初に行なうことができると観察者，授業者あるいは研究者が仮定するものである。

第２水準：イメージづくり（**Image Making**）
学習者はそれまでの知識の中で分類をし，それを新しい方法で用いることが求められる。

第３水準：イメージ所有（**Image Having**）
学習者は，あるトピックについての心的構成をもたらしたいくつかの特別な活動を実際にすることなく，その心的構成を用いることができる。

第４水準：性質認知（**Property Noticing**）
学習者が，文脈に固有な，関連した性質を構成するために，その人のイメージの諸側面を操作したり組み合わせたりすることができるときに起こる。

第５水準：形式化（**Formalizing**）
学習者は，その人が気づいた性質を特徴づけた以前のイメージから，ある方法や共通な性質を抽象する。

第６水準：観察（**Observing**）
形式的活動を反省し，調整する。

第７水準：構造化（**Structuring**）
蓄積された定理の内的関連に気づいて数学的構造をつくる。

第８水準：発明化（**Inventising**）
十分構造化された理解をもち，新しい概念に成長するような，新しい問題を創造する可能性をもつ。

⑤ “不必要な（don't need）境界”は，基本的な概念やイメージの意味と照らし合わせることなしに，心的に，あるいは記号的に操作する能力である。モデルにおいては，太線の円に反映されている。

いったん生徒たちがイメージをもったならば，《イメージづくり(Image Making)》のある特定の事例を彼らは必要としなくなる。そして，彼らの初期の認識とは独立して理解するようになる。彼らが《形式化(Formalizing)》した際には，もはや数学的な活動のためのイメージや具体的な意味づけは必要でなくなる。(Pirie, S. & Kieren, T., 1992, pp.248-249.)

(2) 拡張された超越的再帰モデル

本来は生徒の数学的理解過程を記述するモデルである超越的再帰モデル(Pirie, S. & Kieren, T., 1989, 1992, 1994, et. al.)を規範的に適用することにより，次のような知見を得た。

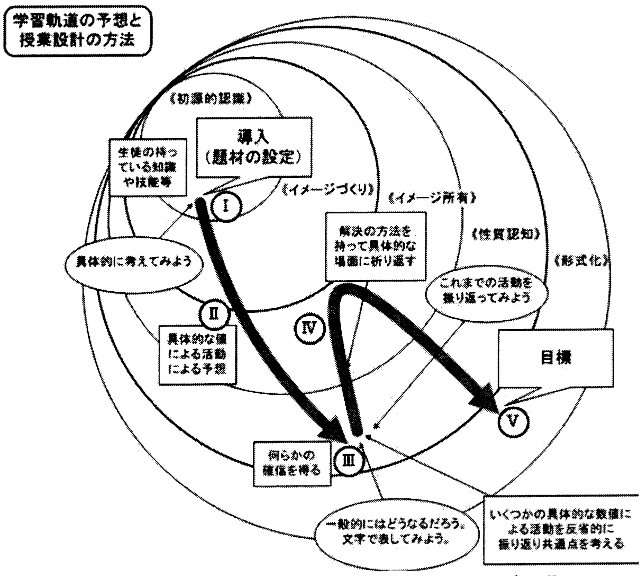
① 数学的活動を通して知識を構成していく学習を説明することができる。

② 生徒のよりよい数学的理解過程を得るような授業構成を検討することができる。

③ 指導者の役割を検討できる。

*2 本研究においては，超越的再帰モデルにおける理解の水準を《》で表す。

筆者は，超越的再帰モデルを規範性をもつモデルと読み替えて生徒の理解過程を予測し，発問を通して行われる授業者の介入のありようを組み込んだ“拡張された超越的再帰モデル（清水，2007a, 2007b, 2008, et. al.）”を用い，個別の授業に即して指導案への適用を行ってきた。



〔図３〕　“拡張された超越的再帰モデル”

(3)　数学的理解と経験知

数学的概念の形成に関わって，スケンプは次のような見解を述べる。

> 抽象行為とは，われわれの経験のあいだの（数学的ではなく日常的意味での）類似性に注目する活動である。クラス分け（分類）とは，こうした類似性に基づいて，いろいろな経験をひとまとめにすることを意味する。また，抽象とは，抽象行為の所産としての永続的な一種の心的変化であり，これによって，すでに形成されたクラスに対する類似性をもつものとして，新しい経験を認識することが可能となる。一口にいって，抽象は，クラス分けを可能にするように学習された何ものかである。あるいは，あるクラスを定義する属性である。抽象行為を活動として，また抽象をその産物として区別するために，以後，後者を概念と呼ぼう（スケンプ，R. R.，1973, p.11）。

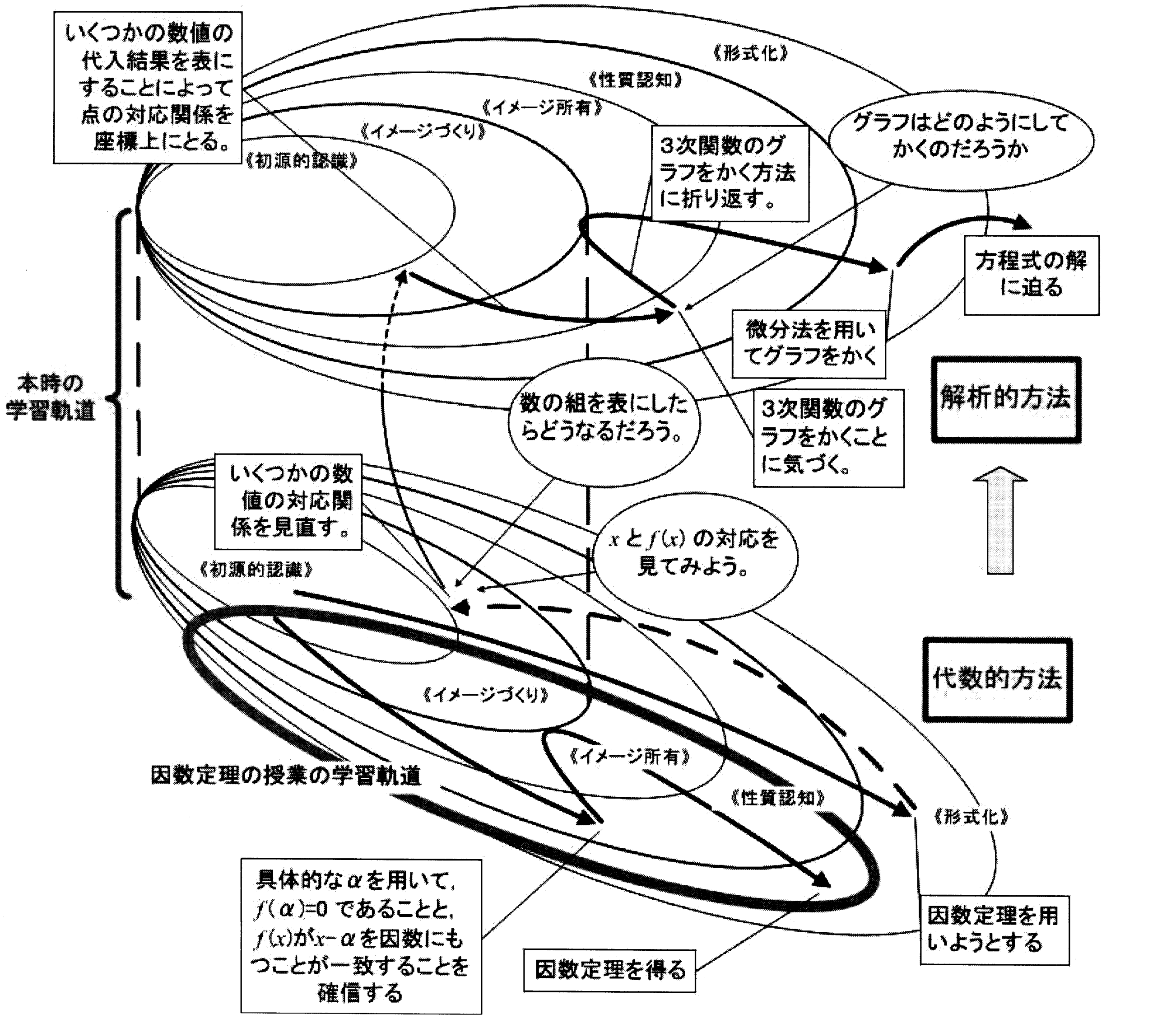
概念形成には個別の具体的な活動の経験が欠かせないことを数学教育の文脈において考えるならば，この活動は数学的活動そのものである。筆者はスケンプのこの見解に，「経験を知として受け入れる素地をつくること」と高等学校学習指導要領において数学の目標に掲げられる「数学的活動を通して，数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め，事象を数学的に考察し表現する能力を高め，創造性の基礎を培うとともに，数学のよさを認識し，それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。（文部科学省(2009)」ことを直接結びつける根拠を求める。

さらに筆者は，数学的理解過程において，経験知は超越的再帰モデルにおける，“不必要な（don't need）境界”（Pirie, S. & Kieren, T., 1992, pp.248-249.）と対応すると考える。数学学習における経験知とは，「基本的な概念やイメージの意味と照らし合わせる」経験を積み重ねることを通して，やがては，より内側の理解水準に折り返す(folding back)必要なしに，「心的に，あるいは記号的に操作する」ことができるようになることと位置づける。一方で，このようにして得られた数学的概念や方法は，新たな≪初源的認識≫として生徒の中に蓄積され，また新たな数学的活動を推進させる力となる。このように，数学的理解と数学的活動を通して得られる経験知は相補的に深まる。

６．失敗の経験からの授業構成

本稿では，代数的方法の適用の失敗（行き詰り）をもとに，解析的方法の適用へと転換する授業を，清水・馬場(2010)，清水(2012b)をもとに考察する。題材は高等学校数学Ⅱ教科書（高橋　編，2011b)「微分法の方程式への応用」の例題である。生徒はこの段階で，因数定理は既習事項であるから，3 次方程式　$x^3+3x+2=0$　を解くことはできるが，同様の方法によって 3 次方程式　$x^3+3x+1=0$ を解くことはできないため，行き詰まりを生じる。

筆者は，スケンプ（1973,　p.21）の「ある個人が持っている概念よりも高次の概念は単なる定義によっては理解されない。唯一の方法は適切な範例の集合を示すことである。」という見解を，新しい数学概念を獲得するためには一度範例に立ち返りその範例に別の解釈を与える必要があることを示唆しているととらえた。超越的再帰モデルの図では，より内側の水準である《イメージづくり》に返り，そこからもう一度知識の再構成をする必要があると考え，因数定理を用いて解くために代入したいくつかの数値の組を，3 次関数　$y=x^3+3x+1$　のグラフ上の点の座標に読み替えることにより因数定理から微分法への切り替えを図る授業を行った**【図４】**。



【図４】“拡張された超越的再帰モデル”による授業構成

７．創造性と経験知（今後の課題にかえて）

生徒が学習を通して新たな概念を構成していくプロセスを「ある個人が持っている概念よりも高次の概念は単なる定義によっては理解されない。唯一の方法は適切な範例の集合を示すことである（スケンプ，1973, p.21）。」とすれば，概念の形成は，具体的・個別的な複数の数学的対象に対する活動の連続を通して，その同一と差異を見ることによりおこなわれる。その差異の部分を切り捨てることなく心のどこかに留めておくことにより，別の状況で様々な従来の概念と結びついて，新たな概念を創造する可能性はある。逸話の真偽に諸説はあるが，ニュートンのリンゴのように，すべてはそれまでに蓄積して来たものに依る結果であり，リンゴはきっかけにしか過ぎない。白川(2001)はこのニュートンのリンゴがセレンディピティ[*3] 的着想であったことにふれ，「偶然を認識し，思索を深めて発見や発明につなげていくためには，その偶然に出会った人が旺盛な好奇心や洞察力などに富んでいることが不可欠である」ことを主張する。伝え手

*3 セレンディピティとは，偶然的に科学的真理を発見する能力(野家，2015）また，野家(2015, pp.124-125.)は「新たな理論や法則を発見する場面では，(中略)，アナロジーやメタファーなどの非形式的推論，アブダクションのような人間のイマジネーション(想像力)やクリエイティビティ(創造力)に関わるような別の発想力が，新しい発見や既成の理論を打ち破る大胆な発想へとつながっていく」と主張する。※文中中略は筆者による

と受け手の双方が存在する教育の場面において，経験させることがすぐに受け手に反映するような啐啄同時[*4]の関係が成立するほど単純ではない。ポランニー．M.(2003)の「私たちが言葉が意味するものを伝えたいと思うとき，相手側の知的な努力によって埋めるしかないギャップが生じてしまうもの」であり，「受け手が，言葉として伝え得なかった内容を発見できるかどうかにかかっている」という主張はわかりやすい。知識の伝達において,受け手が伝え手の経験から得るものは一様でない。だからこそ，経験知の蓄積が新たな創造を生む可能性があるとも言える。「イマジネーションを解き放つ新鮮な驚きと，ほとんど「呆れるほど身近な」常識のなかで育まれた，(ものつくりへの)強靭なこだわり(瀬戸, 2004)[*5] ※文中のカッコは筆者」の態度を培うことが肝要であると考える。伝え手（授業者）の立場から見れば，受け手（学習者）の意欲を喚起し，その基盤となる思考の方法や概念の幅の拡がりを図り，蓄積する基盤をつくるような授業を日常的に構成していかなければ世の中の変化への対応や創造性などおぼつかない。

【引用文献】

Pirie, S. & Kieren, T.（1989）, A Recursive Theory of Mathematical Understanding, *For the Learning of Mathematics* 9, 3 （November 1989）, pp.7-11.

Pirie, S. & Kieren, T. （1992）,Watching Sandy's Understanding grow, *Journal of Mathematical Behavior 11*, pp.243-257.

Pirie, S. & Kieren, T.（1994）, Growth Mathematical Understanding: How Can We Characterise It and How Can We Represent It?, *Educational Studies in Mathematics* 26, pp.165-190.

池村千秋(2013)，『「経験知」を伝える技術，ドロシー・レナード.D & スワップ.W, 池村千秋訳』，ダイヤモンド社

岩崎秀樹(2012)，　第 4 回広島大学附属学校園合同研究フォーラム実施報告書, pp.10-11.

小山正孝（1994），「数学理解の超越的再帰理論に関する一考察」，広島大学教育学部紀要 第二部 第 43 号，pp.63-72.

島田茂（1995)，「1 オープンエンドアプローチの意義」，『算数数学科のオープンアプローチ』，東洋館出版社，pp.9-21.

清水浩士(2007a)，「生徒の数学的理解過程における問題づくり」，全国数学教育学会誌『数学教育学研究第 13 巻』, pp.155-161.

清水浩士(2007b)，「超越的再帰モデルの規範的適用－教育実習指導における活用－」，日本数学教育学会誌，pp.163-168.

清水浩士(2008)，「超越的再帰モデルの規範的適用(2)－小中接続の授業構成－」，『第 41 回数学教育論文発表会　論文集』，日本数学教育学会誌, pp.163-168.

清水浩士・馬場卓也(2010)，『新しい学びを拓く数学科授業の理論と実践中学・高等学校編』，岩崎秀樹編著，ミネルヴァ書房，pp.119-125.

清水浩士(2012a)，「超越的再帰モデルの規範的適用(4)－“拡張された超越的再帰モデル”による学習指導案の作成－」，『第 45 回数学教育論文発表会　論文集』，日本数学教育学会誌, pp.1025-1030.

清水浩士(2012b)，「高等学校の数学授業における多面的な見方の指導－“代数的方法から解析的方法への変容”の授業構成－」，『広島大学附属福山中・高等学校　中等教育研究紀要　第 53 巻』，pp.143-148.

白川英樹(2001)，『化学に魅せられて』，岩波新書, pp.14-15.

新村出 編(1998)，「広辞苑」，岩波書店, p.1571

スケンプ(Skemp , R. R., 1973)，『数学学習の心理学』，新曜社, p.11, p.21

瀬戸一夫(2004)，『科学的な思考とは何だろうか－ものつくりの視点から』，ちくま新書，p.239

高橋陽一郎 編(2011a)，『数学Ⅰ』，文部科学省検定済教科書, 啓林館, p.148

高橋陽一郎 編(2011b)，『数学Ⅱ』，文部科学省検定済教科書, 啓林館, p.198

田中耕一(2003)，『生涯最高の失敗』，朝日選書 736，朝日新聞社, pp.142-143.

朝永振一郎(2012)，『プロメテウスの火』，江沢洋 編「始まりの本」，みすず書房, p.4

野家啓一(2015)，『科学哲学への招待』，ちくま学芸文庫，pp.124-125.

野中郁次郎 & 竹内弘高(1996)，『知的創造企業』，東洋経済新報社, pp.8-9.

畑村洋太郎(2001)，『失敗学のすすめ』，講談社

*4 啐啄〔そつたく〕（「啐」は卵がかえるとき，殻の中で雛がつつく音，「啄」は母鶏が殻をかみ破ること）①〔仏〕禅宗で，師家〔しけ〕と弟子の働きが一致すること。啐啄同時（新村, 1998）

*5 科学的思考とは何か。それは「境界を越えて学ぶ好奇心」に従いながらも，けっして「境界を踏み越えない姿勢」に徹し，「境界に立つ立場」から，常識をより豊かにする思考であった。（瀬戸, 2004）

畑村洋太郎(2012), 『福島原発で何が起こったか　政府事故調技術解説』, 淵上正朗ほか, 日刊工業新聞社, pp.157-161.
廣松渉 ほか(1998), 『岩波 哲学・思想事典』, 岩波書店, pp.55-56.
フラー, B.(2000), 『宇宙船地球号 操縦マニュアル』, ちくま学芸文庫
ブラウン, S. I. & ワルター, M . I. (1990), 平林一榮監訳,『いかにして問題をつくるか』, 東洋館出版社
ポランニー, M. (2003), 『暗黙知の次元』, ちくま学芸文庫, pp.20-22.
メドウズ, D.H. ほか(1975), 『ローマ・クラブ「人類の危機」レポート　成長の限界』, ダイヤモンド社
毛利衛(2010), 『日本人のための科学論』, ＰＨＰサイエンスワールド新書, pp.82-pp85.
文部科学省(2009),『高等学校学習指導要領』（平成 21 年 3 月)」, 東山書房, p.53

【資料】三角形の決定の授業

三角形の決定

三角形のいくつかの辺や角の条件が与えられたとき，正弦定理や余弦定理を使って，残りの辺や角を求めることができる。

例題 9　△ABC において，

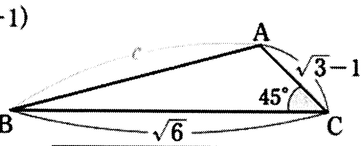
$$a=\sqrt{6},\ b=\sqrt{3}-1,\ C=45^\circ$$

のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

考え方　2 辺の長さとその間の角がわかれば，余弦定理によって残りの辺の長さを求めることができる。

解　$\cos 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，余弦定理により，

$$c^2=(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3}-1)^2-2\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)\cos 45^\circ$$
$$=6+(4-2\sqrt{3})-2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$$
$$=4$$



$c>0$ より，　$c=2$

また，余弦定理により，

$$\cos A=\frac{(\sqrt{3}-1)^2+2^2-(\sqrt{6})^2}{2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot 2}$$
$$=\frac{-2(\sqrt{3}-1)}{4(\sqrt{3}-1)}=-\frac{1}{2}$$

$0^\circ<A<135^\circ$ より，　$A=120^\circ$

このとき，　$B=180^\circ-(A+C)=15^\circ$

以上のことから，　$c=2,\ A=120^\circ,\ B=15^\circ$

正弦定理を用いたら
$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$ より
$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin A}=\dfrac{2}{\sin 45^\circ}$ であるから，
$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
よって，$A=60^\circ, 120^\circ$

余弦定理を∠Bに用いたら
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$
$$=\frac{2^2+\sqrt{6}^2-(\sqrt{3}-1)^2}{2\cdot 2\sqrt{6}}$$
$$=\frac{6+2\sqrt{3}}{4\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$A=60^\circ$ のとき，$B=75^\circ$
$C<B$ となるが，
$b=\sqrt{3}-1, c=2$ より，$b<c$
これは，角の大小関係と対応する辺の大小関係は一致することに反する。

※背理法と，辺と角の関係は既習事項

高橋陽一郎 編(2011a), 『数学Ｉ』, 文部科学省検定済教科書, 啓林館, p.148