学位論文要旨

On a Riemannian submanifold whose slice representation has no nonzero fixed points

(スライス表現に 0 でない固定点を持たないリーマン部分多様体について)

武富雄一郎

X を完備連結リーマン多様体, Y を X のリーマン部分多様体とする. $\mathrm{Isom}(X)$ を X の等長変換のなす群とする. X の等長変換 $f \in \mathrm{Isom}(X)$ が, Y を保つ (*i.e.* $f(Y) = Y$) とき, f は Y の外在的等長変換であるという. Y の外在的等長変換全体のなす群を $N(Y)$ とする.

外在的等長変換の群 $N(Y)$ は X および Y に等長的に作用する. G を $N(Y)$ の任意の部分群と, Y の任意の点 $p \in Y$ に対し, 法空間 $(T_pY)^\perp$ への自然な作用

$$g.\xi := (dg)_p\xi, \quad (g \in G_p,\ \xi \in (T_pY)^\perp)$$

を部分多様体 Y の p における *G-slice representation* と呼ぶ. また, $N(Y)$-slice representation を *full slice representation* と呼ぶ.

学位論文においては, この G-slice representation に関して, 以下のような対称性を持ったリーマン部分多様体を扱う.

Definition 1. G を $N(Y)$ の任意の部分群とする. 任意の Y の点 p に対して, Y の p における G-slice representation が 0 でない固定点を持たないとき, Y を *G-arid submanifold* と呼ぶ. また, $N(Y)$-arid submanifold を単に *arid submanifold* と呼ぶ.

リーマン部分多様体論において, arid submanifold は以下のような位置付けにある：

$$\begin{array}{ccc}
\text{鏡映部分多様体} & \Rightarrow & \text{全測地的部分多様体} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\text{弱鏡映部分多様体} & \Rightarrow & \text{austere submanifold} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\text{arid submanifold} & \Rightarrow & \text{極小部分多様体}
\end{array}$$

右の列の全測地的, austere, 極小の 3 つの部分多様体は曲率の性質から定義される概念である. 鏡映は全測地的を, 弱鏡映は austere を, arid は極小を, 外在的等長変換群の作用による対称性の観点から特殊化したものであるといえる.

arid submanifold の具体例として, 球面内の球面の直積が挙げられる：

$$\underbrace{S^{n-1} \times \cdots \times S^{n-1}}_{m\text{-times}} \subset S^{mn-1}.$$

また一般に, 等質な arid submanifold は何らかの等長作用の孤立軌道として特徴付けられる：

Theorem 2. Y を閉かつ等質な部分多様体とする. このとき, 以下は同値：

(1) Y は arid submanifold.
(2) ある Lie 部分群 $G \subset \mathrm{Isom}(X)$ が存在して, Y は G-作用の孤立軌道となる.

また学位論文においては, arid submanifold の左不変リーマン計量の研究への 1 つの応用を紹介している. G を単連結 Lie 群, $\mathfrak{g}$ をその Lie 代数とする. $\mathfrak{M}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ 上の正定値内積のなす空間とする. $\mathfrak{M}(\mathfrak{g})$ には, $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ が基底変換によって推移的に作用する. また, $\mathfrak{M}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$-作用に関して不変なリーマン計量をもつ. $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$-等質なリーマン多様体 $\mathfrak{M}(\mathfrak{g})$ に, 以下で定義される $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ の部分群を作用させる：

$$\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) := \{c\varphi \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \mid c \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\}.$$

この $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-作用の軌道空間は, G 上の左不変計量のある種の moduli 空間となることから, 様々な研究が行われている. 例えば, 参考論文 (3) においては, $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-作用の観点から, 一般の Lie 群が左不変な Ricci soliton 計量を許容するための必要条件を予想し, 考察を行なっている. また参考論文 (4) は, $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-作用による研究の手法を, 左不変擬リーマン計量にまで拡張している. 一方, 参考論文 (2) においては, この $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-作用を用いて, hyperpolar 作用と呼ばれる良い等長作用の具体例を構成している.

学位論文においては, 左不変計量が Ricci soliton になるための十分条件を以下のように与えている：

Theorem 3. 軌道 $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).\langle , \rangle$ が $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-*arid submanifold* ならば, 対応する単連結 *Lie* 群 G 上の左不変計量 $\langle , \rangle$ は *Ricci soliton.*

この十分条件は, 一般の Lie 群に対して適用できる. 可解 Lie 群上の左不変 Ricci soliton については, 様々なことが分かっているが, 一般の Lie 群に対して適用できる結果はこれまでほとんど得られていなかった.

参考論文 (1) は, 以上の学位論文の内容を簡潔にまとめたものである.