論 文 審 査 の 要 旨

博士の専攻分野の名称	博　士（　理学　）	氏名	中　川　　勝　國
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1・2 項該当		

論文題目

Multifractal rigidity for piecewise linear Markov maps
（区分的線型写像による力学系のマルチフラクタルの剛性）

論文審査担当者

主　　査	准教授	岩田　耕一郎
審査委員	教　授	井上　昭彦
審査委員	教　授	若木　宏文
審査委員	教　授	坂元　国望

〔論文審査の要旨〕

フラクタル構造の定量化として，ハウスドルフ次元がよく使われる。より詳しい情報を引き出すには，自己相似性と整合する測度の次元スペクトルを使うことができる。一般に距離空間上の測度に対して，各点ごとに球の測度の半径依存性を表す指数を対応させる関数を局所次元といい，局所次元の各レベル集合をハウスドルフ次元で測ったものが次元スペクトルと呼ばれる関数である。学位申請者は，自己相似性と整合する測度について次元スペクトルを考えることによりフラクタルの構造がどの程度分かるかという問題に取り組んだ。

ある集合内に定義域と像を持つような写像を考える。写像が無限回合成可能でありかつ各点で拡大的となるように部分を取り出すことによりリペラーと呼ばれる集合が定まる。写像とリペラーの組がなす力学系は構造を調べやすいフラクタルの例を提供する。測度の次元スペクトルが既知であるとして，同相写像による共役を除いて力学系が決定できるならそのスペクトルは剛性を持つという。より鮮明な描像を得るには，リペラー上の自己相似性と整合する測度としては，ポテンシャルと呼ばれる関数によって特徴付けられる力学系の不変測度，すなわち平衡測度へと対象を絞るのがよいと考えられている。学位申請者は，１次元２脚区分的線型写像のリペラーとその上のマルコフ測度からなる力学系を考察した。ただしマルコフ測度とはポテンシャルが確率推移行列の対数で表せる平衡測度をいう。本学位論文は，剛性を持つスペクトルの特徴付けを与え，さらに剛性を持たないスペクトルも含めて力学系の構造を完全に決定したものである。

力学系が与えられたとき，ポテンシャル関数に対しては位相的圧力と呼ばれる特性量が定まり，不変測度に対してはコルモゴロフ・シナイのエントロピーと呼ばれる特性量が定まり，更に特性量たちの間には熱力学的解釈を持つ変分不等式が成立する。平衡測度というクラスが好まれるのは，熱力学的変分不等式における等号を実現する不変測度として特徴付けられるからである。これを活用するのが力学系における熱力学形式であり，平衡測

度の次元スペクトルの議論においても，確かな指針を与えている。その大枠は 1990 年代に Pesin, Weiss らによってマルチフラクタル解析という名で整備された。登場する熱力学関数は，逆温度パラメータを付加したポテンシャルが写像のリャプノフ指数と位相的圧力の意味でバランスするように定まり，ルジャンドル変換の意味で次元スペクトルと共役となるものである。また各逆温度パラメータに対応して定まる平衡測度について，コルモゴロフ・シナイのエントロピーとリャプノフ指数の平均との比をとると，対応するレベルにおける次元スペクトルの値にちょうど一致する。熱力学形式を通して見ると，次元スペクトルの最大値はリペラーのハウスドルフ次元に等しいことなど力学系の情報を多く読み取ることができる。そこで Barreira-Pesin-Schmeling (1997) は，次元スペクトルから同相写像による共役を除いて力学系を決定することを目指した。彼らが示したのは，１次元２脚区分的線型写像のリペラーとその上のベルヌイ測度からなる力学系ではすべてのスペクトルが剛性を持つということである。なおベルヌイ測度はマルコフ測度の特別な部分クラスである。また Barreira-Saravia (2008) は，区分的線型写像の傾きが２脚上で共通である場合に対応する記号力学系を考察し，剛性を持つスペクトルの特徴付けを与え，さらに剛性を持たないスペクトルも含めて力学系の構造を完全に決定した。本学位論文の主結果は, Barreira-Pesin-Schmeling (1997) と Barreira-Saravia (2008) の結果を包括するものと言える。

局所次元のレベル集合が空にならない限界をスペクトルの端点と呼ぶことにする。Schmeling (1999) は，次元スペクトルの値がスペクトルの端点で 0 となることを，スペクトルは非退化であると称した。スペクトルの剛性は非退化であるときに複雑になる。スペクトルの端点は，逆温度パラメータでいうと無限大すなわち温度零に対応する。スペクトルの端点においても，次元スペクトルが熱力学関数のルジャンドル変換で表せ，また各逆温度パラメータに対応して定まる平衡測度の零温度極限によっても表現できると言う関係は有効である。更に零温度極限に寄与する周期軌道により，スペクトルが非退化となるための条件を記述できる。零温度極限の詳細を解明できたのは本学位論文の結果を導くのに決定的であった。非退化なスペクトルについては，零温度極限に寄与する周期軌道によって分類して，零温度極限情報から同相写像による共役が存在することを順次示すという方法が一定の段階まで機能する。その手順により最後まで片付くわけではないが，決定されずに残った場合に対応するスペクトルが幸運にも Barreira-Saravia (2008)の結果にあらわれた剛性を持たないスペクトルと正に一致したというのが顛末である。なおベルヌイ測度に限定すると３脚の場合もすべてのスペクトルが剛性を持つと予想されていた。参考論文は，それを覆して剛性を持たないスペクトルの存在を指摘しただけでなく，剛性を持たないスペクトルを完全に特定したのである。いずれの論文においても，周期軌道を全て丁寧に調べる作業工程が必要であり，学位申請者の粘り強さを高く評価したい。

以上，審査の結果，本論文の著者は博士（理学）の学位を授与される十分な資格があるものと認める。

公表論文

Katsukuni Nakagawa;

Multifractal rigidity for piecewise linear Markov maps.

Stochastics and Dynamics, 17 (2017) 1750006

参考論文

Katsukuni Nakagawa;

A counterexample to the multifractal rigidity conjecture

of piecewise linear Markovmaps of the interval.

Dynamical Systems: An International Journal, 31 (2016) 466-482