学位論文要旨

Multifractal rigidity for piecewise linear Markov maps

(区分的線型写像による力学系のマルチフラクタルの剛性)

中川勝國 (広島大学大学院理学研究科数学専攻)

「フラクタル」を特徴付ける自己相似性は，ある操作の繰り返しの極限として観測されることが多く，フラクタルの数学的研究では，写像の反復合成を扱う（離散）力学系の手法が威力を発揮する．

コンパクト距離空間 K と連続写像 $f : K \to K$ および K 上の f-不変 Borel 確率測度 μ より成る力学系を与える．μ の分布パターンの「複雑さ」を定量化することを考えよう．μ の点 $x \in K$ における**局所次元**とは，$B(x;r)$ を中心 x，半径 r の球とした時，$\mu(B(x;r)) \sim r^{\alpha} \quad (r \to 0)$ となる α のことを言う．局所次元の α-レベル集合の「大きさ」を α の関数として見たものは，μ の分布パターンの複雑さの定量化として自然である．「大きさ」として Hausdorff 次元を採用することにより得られる関数 $\mathcal{D}^{(K,f,\mu)}$ を**次元スペクトル**と言う：

$$\mathcal{D}^{(K,f,\mu)}(\alpha) := \dim_H\{x \in K \mid \mu(B(x;r)) \sim r^{\alpha} \ (r \to 0)\}.$$

マルチフラクタル解析では，次元スペクトルを熱力学関数によって表現する．拡大的可微分力学系における次元スペクトルのマルチフラクタル解析は，1990 年代に Pesin，Weiss たちにより確立された．彼らの結果は大まかには次のように述べられる：f を $\|df\| > 1$ かつ conformal な $C^{1+\epsilon}$ 級写像，K をそのリペラーとし，μ を Hölder 連続な $\phi : K \to \mathbb{R}$ の平衡測度とする．この時，$\mathcal{D}^{(K,f,\mu)}$ は，$P(q\phi + \beta(q)\log\|df\|) = 0$ で定まる $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の Legendre 変換と一致する．ここで，$P(\psi)$ は $\psi : K \to \mathbb{R}$ の位相的圧力．

熱力学関数 β の Legendre 変換として表すことで，次元スペクトルは力学系の情報を多く含むことが分かる．例えば，次元スペクトルの最大値は K の Hausdorff 次元と等しく，次元スペクトルと $y = x$ との接点は μ の情報次元と等しい．Barreira-Pesin-Schmeling (1997) は，次元スペクトルにより力学系を分類することを提案した．彼らは区分的線型写像のリペラーとその上の Markov 測度から成る力学系の分類を扱っており，主論文もそれを考察する．ただし，Markov 測度とは，確率行列で表されるポテンシャル ϕ の平衡測度を指す．

$N \geq 2$ として

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_N := \{(K,f,\mu) \mid\ & f \text{ は 1 次元の } N\text{-脚区分的線型写像，} K \text{ は } f \text{ のリペラー，}\\ & f : K \to K \text{ はフルシフトの記号力学系と位相共役，}\\ & \mu \text{ は Markov 測度 } \}\end{aligned}$$

とおく．$(K,f,\mu) \in \mathcal{H}_N$ に対しては，μ のポテンシャルを表す確率行列を P とし，i 番目の脚での $|f'|$ の逆数を r_i とする時，β は行列 $(P_{ij}^q r_j^{-\beta(q)})$ の最大固有値が 1 となることによって定められ，線型代数により扱える．

$\mathcal{H}_N$ の部分族 $\mathcal{H}$ に対して，その次元スペクトルの全体 $\mathcal{X}(\mathcal{H})=\{\mathcal{D}^{(K,f,\mu)}\mid (K,f,\mu)\in\mathcal{H}\}$ を考える．スペクトル $\mathcal{D}\in\mathcal{X}(\mathcal{H})$ が $\mathcal{H}$ に関し**剛性**を持つとは, $\mathcal{D}^{(K,f,\mu)}=\mathcal{D}^{(\widehat{K},\widehat{f},\widehat{\mu})}=\mathcal{D}$ なる任意の (K,f,μ), $(\widehat{K},\widehat{f},\widehat{\mu})\in\mathcal{H}$ に対し次が成立することを言う：

$$\text{同相写像 } \zeta\colon \widehat{K}\to K \text{ が存在し } f\circ\zeta=\zeta\circ\widehat{f},\ \widehat{\mu}=\mu\circ\zeta,\ |\widehat{f}'|=|f'|\circ\zeta.$$

先行研究で，$N=2$ の場合に次が証明されている：

定理 A (Barreira-Pesin-Schmeling (1997))**.** $\mathcal{H}=\{(K,f,\mu)\in\mathcal{H}_2|\mu$ は Bernoulli 測度 $\}$ とする．任意の $\mathcal{D}\in\mathcal{X}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ に関し剛性を持つ.

定理 B (Barreira-Saravia (2008))**.** $r\in(0,1)$ とする．$\mathcal{H}=\{(K,f,\mu)\in\mathcal{H}_2\,||f'|=1/r\}$ とする時, $\mathcal{D}\in\mathcal{X}(\mathcal{H})$ が $\mathcal{H}$ に関し剛性を持つための必要十分条件は, いかなる $\lambda\in(0,1/2)$ に対しても，$\mathcal{D}$ が次の関数の Legendre 変換と一致**しない**ことである：

$$\mathbb{R}\ni q\mapsto \log_r(\lambda^q+(1-\lambda)^q)\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

定理 A，定理 B はともに $\mathcal{H}_2$ の部分族についてのものである．主論文の結果は，$\mathcal{H}$ が $\mathcal{H}_2$ それ自身である場合に剛性を持つスペクトルの完全な特徴づけを与える．

主定理. $\mathcal{D}\in\mathcal{X}(\mathcal{H}_2)$ とする．$\mathcal{D}$ が $\mathcal{H}_2$ に関し剛性を持つための必要十分条件は，いかなる $\lambda\in(0,1/2)$ と $r\in(0,1)$ に対しても，$\mathcal{D}$ が (1) の Legendre 変換と一致**しない**ことである．

主定理の証明は主論文の第 5 章で行われる．次元スペクトルが両端点で 0 となる時，スペクトルは**非退化**であると言う (Schmeling (1999))．スペクトルが退化する (=非退化ではない) 場合には，次元スペクトルから (f,μ) を陽に復元できて剛性問題は易しい (主論文 Lemma 5.1)．ところが，退化するケースは例外的であり，多くのスペクトルは非退化である (Schmeling (1999)，主論文 Corollary 4.2)．非退化な場合には，(f,μ) を陽に復元するのは難しく，剛性問題は非自明なものとなる．

第 4 章ではまず,「β の Legendre 変換=次元スペクトル」の公式が端点においても成立することを示す (主論文 Proposition 4.2)．この事実自体はより一般の力学系に対しても予想されているが，主論文で扱うケースに限っても，証明されたのは初である．Proposition 4.2 により，スペクトルの端点での振る舞いが，β の零温度極限，すなわち，$q\to\pm\infty$ の時の $\beta(q)$ の挙動と結び付けられる．零温度極限との結びつきを用いると，スペクトルの非退化性の必要十分条件を，端点を実現する周期軌道の分布の言葉で書くことができる (主論文 Theorem 4.1)．第 4 章の結果は N に依らない．

非退化な場合には，β を定める行列 $(P_{ij}^q r_j^{-\beta(q)})$ の各成分は，ある指数関数と $q\to\pm\infty$ において漸近的に等しい (主論文 Lemma 4.3)．スペクトルを共有する 2 つの力学系の関係を，この指数関数の底の比較から導こうというのが証明の方針である．スペクトルを，その端点を実現する周期軌道の分布で分類した時，上述の方針が機能しないものが，まさに (1) の Legendre 変換と対応することが示され，主定理が証明される．主定理の証明では $N=2$ であることが本質的である．

定理 A は多くの数学者によって $N\geq 3$ でも成立すると予想されたが，未解決であった．参考論文では，$N=3$ の場合で成立しない例を挙げ，さらにその例が唯一のものであることを示している．ここでも，$N\geq 3$ で初めて非退化なスペクトルが現れるために，非退化性に注目することが本質的である．