博士論文

真正な数学的活動を実現するための哲学に関する研究

Research on the Philosophy for Realizing Authentic Mathematical Activities

博士論文 要旨

申請者

広島大学 教育学研究科 文化教育開発専攻
学生番号 D125913

上ヶ谷 友佑

2017 年 1 月

1 序章

「真正性」(authenticity) とは,「本物 (real) であることや忠実 (true) であることに関する質」(Cambridge Dictionaries Online, n.d., 括弧内原文) のことであり，教室における「真正な数学的活動」の実現は，初等教育における数学的問題解決 (Lampert, 1990) から大学教育における定理の学習 (Larsen & Zandieh, 2007) に至るまで，長年に渡って数学教育研究の目標であり続けてきた．しかしながら，そうであるがゆえに，Weiss, Herbst, & Chen (2009) が,「誰が『非真正』な数学の擁護者として知られることを望むだろうか？」(p. 276) と問うたくらい,「真正な数学的活動」とは，数学教育において無批判に受容されてきた理想形でもある．また，真正性という概念は，多義的な概念でもある．Weiss, Herbst, & Chen (2009) は，数学教育研究において「真正性」という語が少なくとも 4 つの意味で用いられてきた点を指摘する (表 1).

4 つの真正性は，いずれも，それぞれ異なる教育的価値を有しているが，複数の真正性を同時に実現することは難しいと予想され，異なる「真正性」の同時的な実現を議論するための共通基盤は，まだ十分に確立されていない．これは，真正な数学的活動を実現するための数学教育を科学的に研究するための，一貫性を持った哲学が不十分であるということを意味する．

そこで本研究は，次を研究目的として設定する．

[研究目的] 教室において真正な数学的活動を実現するために必要な哲学とは何かを論究すること

その上で，次の 2 つを下位目的として設定する．

[下位目的 1] 教室において真正な数学的活動を実現するための研究に必要な科学的基盤を明らかにすること

[下位目的 2] 教室において真正な数学的活動を実現するための授業設計ヒューリスティックスを開発すること

下位目的 1 を達成するための方法は，真正な数学的活動を議論するために必要な理論的枠組の定式化である．ここで,「理論的枠組の定式化」とは,「哲学」という相対的に概念的な体系よりも,「理論」という相対的に形式的な体系として整理する作業を指す．この定式化は，次の 4 つの観点に基づいて実施する．

[観点 1] 数学的活動に関わる学習観

表 1: 「真正な数学」の多義性 (Weiss, Herbst, & Chen (2009) に基づく整理)

記号	説明	真正性の対象	真正性の視点
AM_W	扱われている数学的内容が現実世界の文脈に対して忠実である程度.	内容の真正性	観察者
AM_D	扱われている数学的内容が学問領域としての数学に対して忠実である程度.		
AM_P	学習者の活動が専門家 (例えば，数学者) の実践と類似している程度.	活動の真正性	
AM_S	学習者の活動 (特に思考) が学習者の経験から創出されている程度.		学習者

[観点 2] 個人による数学的活動の本性

[観点 3] 数学的思考の記述モデル

[観点 4] 集団による数学的活動の質

この下位目的 2 を達成するための方法は，第一の方法において定式化された理論的枠組を用いて，数学の授業を設計するためのヒューリスティックス (アルゴリズムではないために成功が保証されるわけではないけれど，一定程度の成功が期待できる方法知) を開発することである．ヒューリスティックスを開発するにあたっては，定式化された理論的枠組を用いて，次の 4 点を実施する．

- 教科書に基づく数学的活動の分析
- 全国学力・学習状況調査に基づく数学的活動の分析
- 本研究の提案する理論的枠組からの理論的帰結の分析
- 集団による数学的活動の分析

これらの分析から，数学の授業を設計するためのヒューリスティックスを導出する．

最後に，2 つの下位目的を追究した成果にもどついて，真正な数学的活動を実現するための哲学を論究する．したがって，本研究では，大きく分けて次の 3 つの方法を採用することとなる．

[研究方法 1] 真正な数学的活動を議論するために必要な理論的枠組を定式化する

[研究方法 2] 定式化された理論的枠組を用いた 4 つの分析を実施し，授業設計のためのヒューリスティックスを定式化する

[研究方法 3] 定式化された理論的枠組と定式化されたヒューリスティックスから，真正な数学的活動を実現するための哲学を論じる

本論文の構造は，図 1 の通りである．各章が各研究方法と対応している．また，本論文の論理的構造は，図 2 の通りである．

2 先行研究の概観

本章では，まず，哲学の役割を論じた．哲学辞典 (1971) は，哲学と科学の対比から哲学とは何かを論じている．例えば，人の心についての哲学が心理学へと移行したように，科学とは，哲学の問題領域を厳密に設定することで確実な問題解決を試みる営みである．それに対して，哲学は，科学の問題領域を再び問い直す特性がある．また，哲学・思想辞典 (1998) や 中島 (2001) は，哲学と思想を対比する．それらの議論に基づけば,「哲学」と「思想」という言葉の境界は曖昧であり，大雑把に言えば，相対的に脱個人化されたものを「哲学」，相対的に個人化されたものを「思想」と呼ぶ傾向にあることが伺える．まとめると，哲学とは，脱個人化を志向した絶えざる根源的反省であると考えられる．

次いで，数学教育研究における先行する哲学研究として，ラディカル構成主義研究 (von Glasersfeld, 1995) に注目した．これは，すべての認識やすべての知識は主観的であるとする哲学である．

本研究は，特に根強い反論を続けた Goldin (2003, 2014) の指摘を踏まえ，健全な真理観を維持したまま構成主義研究を実施する方法を示した．

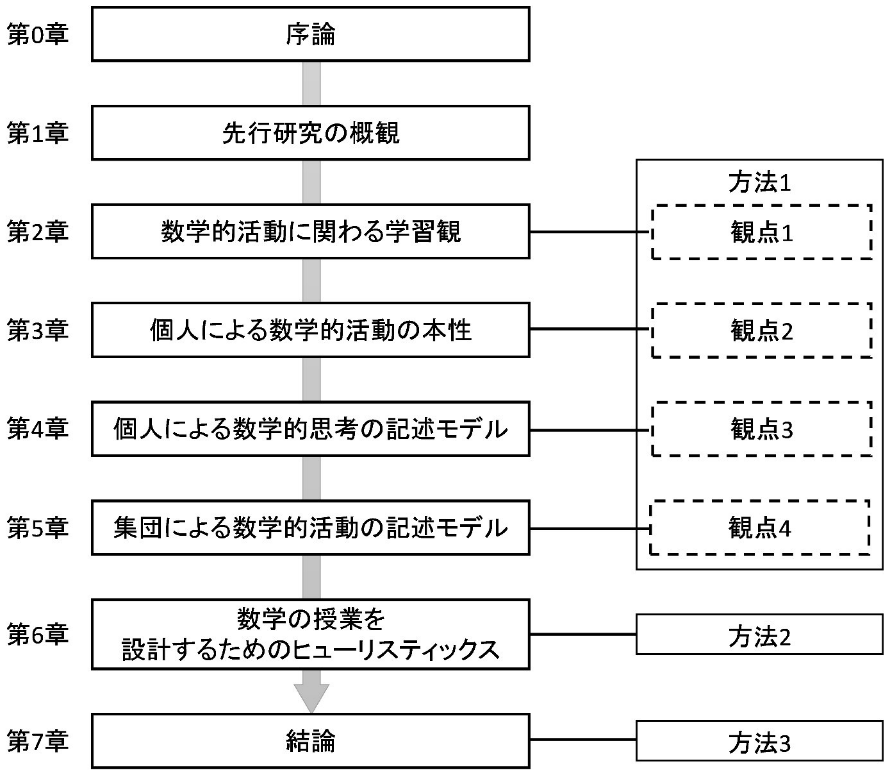

図 1: 各章と研究方法の対応

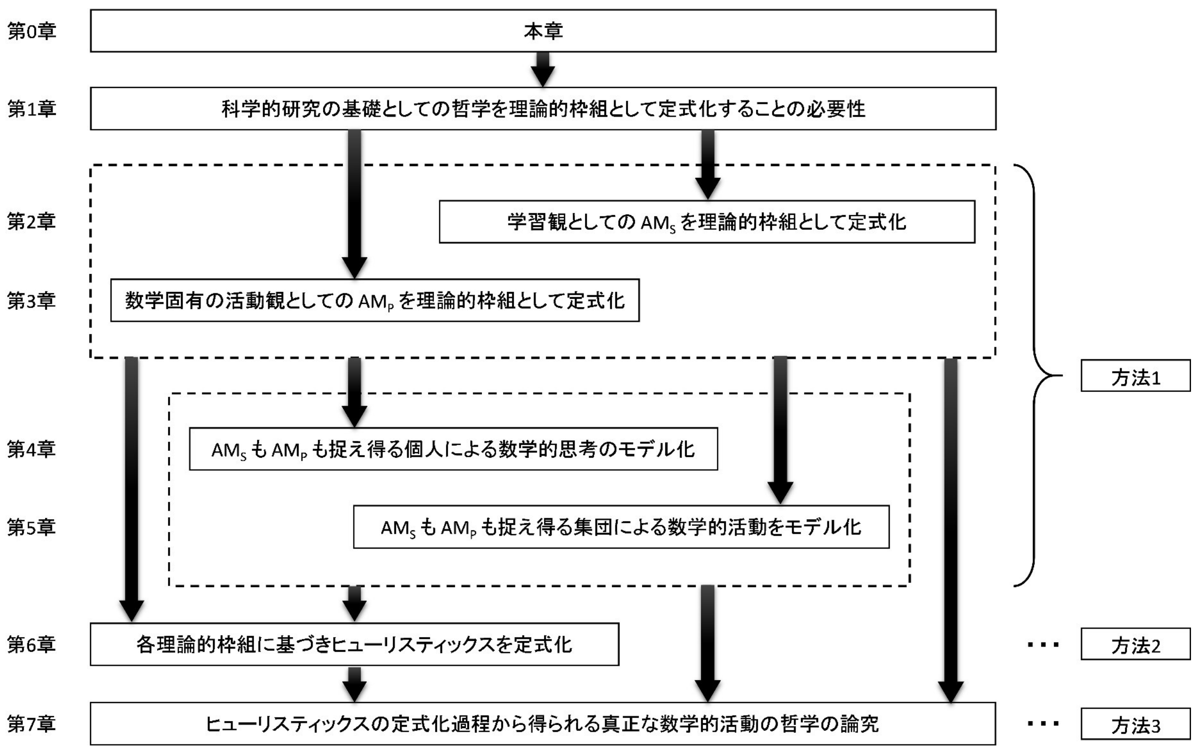

図 2: 本論文の論理的構造

3 数学的活動に関わる学習観

本章では，ラディカル構成主義の道具としての機能と限界を明確にするため，まず，ラディカル構成主義の基本概念を概観した．ラディカル構成主義は，真理や客観という概念に関心を持たない代わりに，「生存可能性」(viability) という概念に注目する．これは，ある文脈においてある知識を使用する傾向性に関する概念である．学習者がどんな知識を用いて問題を解こうとしているかを分析するにあたっては，その知識が真か偽かということが問題になるわけではない．ライル (1987) の分類に基づけば，ラディカル構成主義における「知識」とは，内容知ではなく方法知である．どんな知識も，ラディカル構成主義は，方法知とみなす．その上で，ラディカル構成主義は,「行為シェム」という概念を用いる．行為シェムは，方法知の一種であり，状況の知覚・活動・予期された結果の 3 要素からなる (von Glasersfeld, 1995, p. 65)．つまり,「ある状況においてある活動を行えば，ある結果が得られると期待される」という型の方法知である．

次いで，本研究がラディカル構成主義をどのように補うべきかを検討した．本研究は，ラディカル構成主義の修正案として,「動機付けに関する仮定を導入したラディカル構成主義」(Radical Constructivism with Motivational Assumptions; 以下，RCMA と略記) を提案した．具体的には，オリジナルのラディカル構成主義が，あらゆる学習者が学習者なりに最大限合理的に振る舞っているということを仮定したのに対して，RCMA は， あらゆる学習者が, 共同体の一部となるためにに，学習者なりに最大限合理的に振る舞っていると仮定する．このように仮定することで，学習者の行動目的が明確となり，授業設計の前段階において，あり得る学習者の行動を検討しやすくなる．

4 個人による数学的活動の本性

本章では，数学に固有の活動観を明確にするため，特に Tall らが提案している理論的枠組に通底するクリスタリン・コンセプト (crystalline concept) というアイディア (Tall, 2011 参照) に注目する．まったく同じ結論を得る正当化方法であっても，数学的構造に基づいた説明をする場合，ある言明が真であるのは偶然ではなく，必然である．それに対して，数学的構造に基づかず，すべての対象を調査することによって，あるいは，統計的に十分な量の対象を調査することによってその対象に関する結論を正当化する場合は，あくまでも偶然的に真であることがわかるのみである．こうした対比から，数学的活動の本性 (AM_P の意味での真正な数学的活動) とは，数学的構造に基づく必然性の追究にあると言える．

5 個人による数学的思考の記述モデル

本章では，授業中の学習者の数学的認識の深まりについての予測である「仮説的学習軌道」(Simon, 1995) をよりよく表現するための新しい理論的枠組 IDC モデルを提案した．ある種の数学的思考は，具体モデルの生成と記述モデルの生成という 2 方向によって規定することができる．本研究では，具体化 (Instantiation) と記述 (Description) の連鎖 (Chain) によって心的モデルを捉えようとするこのモデルを，IDC モデルと呼ぶ．IDC モデルの使用は，次の 2 つの利点を有する．第一に，IDC モデルの表現方法は，数学的対象の定義や数学の公理系の表現方法と同じ表現方法であるため，認識させたい数学的対象と認識している数学的対象を同じ表現形式の上で議論することができるようになる．第二に，心的モデルの変更という心の働きが，Mason (1989) の言う「注意の移行」というアイディ

アをその基礎として，統一的に説明されることである．IDC モデルを用いれば，心的モデルというつかみどころのない対象を，学習者がどんな条件に注意を払っているかという観点で表現することができる．

6 集団による数学的活動の質

本章では，集団による数学的活動を記述するための代替的な理論的枠組として，ラカトシュ (1986) の科学哲学，すなわち，科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組を提案する．これは，ラカトシュ (1986) の「科学的研究プログラム」というアイディアと，第 2 章で定式化した行為シェムというアイディアの同型性に着目し，具体的には，行為シェムにも科学的研究プログラムと同様に固い核と防御帯が付随していると考える枠組である．本章では特に，この理論的枠組を用いたサンプル分析を示し，枠組の有用性を例証した．

サンプル分析には，某国立大学附属高等学校において実施された授業でのエピソードが用いられた．2^{54} の各位の桁をできるだけ精緻に求めるという課題において，グループで解法を議論させたところ，男子 (Ike, Ham) が常用対数の使用を主張したのに対して，女子 (Hor) は，直接的な手計算を主張した．

6	Ike	たぶん，常用対数表使うことになる
8	Ham	はーい，じゃあまず常用対数を取ろう．

男子は，自分達のアプローチが限界を迎えるまでは，女子のアプローチが現実的なアプローチではないとして興味を持たなかったが，自分達のアプローチが限界を迎えるに至って，女子の手計算の進捗に興味を持ち始めるようになった．

93	Ike	… え，みんなガチで計算しとるん？
94	Hor	ガチで計算しとる．
95	Ike	マジで？

科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組に基づくと，学習者達は，自らの行為シェムに基づいてアプローチを選択していると考えられる．しかし，この期待感は，ラディカル構成主義が主張するように，極めて主観的な理由で構成されているようであった．男子達は，直前まで学習していた内容が常用対数であったことを理由に，女子達は，男子達のアプローチが複雑すぎることを理由に，それぞれのアプローチに期待感を持っていたようであった．これは，固い核が任意に構成され得るという科学的研究プログラムの方法論の特徴と類似している．そして，その期待感は，たとえ自分達のアプローチが多少上手く行かない場面に遭遇したとしても棄却されなかった．細かいアプローチを修正することによって，最初の期待感は男女ともに維持し続けているようであった．

以上，一事例ではあるが，行為シェムと同時に，科学的研究プログラムの固い核や防御帯に相当するものを観察することができた．固い核や防御帯の様相がわかれば，前進性によって質を評価することができるようになるので，集団による数学的活動の質について経験的情報を収集する際は，固い核や防御帯の様相についても情報を収集する必要があると言えよう．

7　数学の授業を設計するためのヒューリスティックス

本章では，研究方法 2 として，4 つの分析を実施した．

第一に，教科書が示唆する数学的活動案が，どのような学習軌道に通じていると考えられるかを検討した．第 3 章や第 4 章において参考にした Tall (2011) のクリスタリン・コンセプト論 (特に，その一部であるプロセプト論) に基づくと，手続きを過度に強調する学習は，数学的に柔軟な思考の発達を阻害すると考えられる．また，RCMA に基づくと，あらゆる学習者は，共同体の一部となるために，学習者なりに最大限合理的に振る舞っていると見なされる．こうした視座に基づくと，数学的に柔軟な思考に基づいて問題解決する能力を育むためには，個人による試行錯誤の過程が必要不可欠であることが示唆された．

第二に，全国学力・学習状況調査の解説が示唆する数学的活動案が，どのような学習軌道に通じていると考えられるかを検討した．ここでは特に，国立教育政策研究所 (2015) が「予想する」ことに関して示した学習活動案に注目した．この提案を，本研究では 2 通りに解釈して分析した．RCMA に基づくと，あらゆる学習者は，共同体の一部となるために，学習者なりに最大限合理的に振る舞っていると見なされる．活動案 1 を通じて育まれ得る学習者は，教師が予想しようと問いかけた状況下において予想しようとする学習者であった．一方，活動案 2 を通じて育まれ得る学習者は，教師の問いかけに答えるために，自発的に予想をしようとする学習者であった．このことは,「予想する」行為が新しく生存可能になるためには，学習活動の目的は,「予想する」ことそれ自体ではあり得ない，ということを示唆する．

第三に，Aizikovitsh-Udi, Clarke, & Star (2013) に倣い,「発問」(question) と「発問行為」(questioning) を区別した上で，発問行為を設計するための理論的枠組を考案した．具体的には，ラディカル構成主義における主要なテキスト分析方法論の 1 つである「概念的分析」(Thompson, 2000) を，発問行為を設計するために以下のように活用できる．

1. 目標となる方法知の設定
2. 基準学習軌道の検討
3. 基準学習軌道上の要支援箇所の特定
4. 教科書の読解を通じた仮説的学習軌道の検討
5. 具体的な発問行為の検討

まず，仮説的学習軌道が IDC モデルによって表現できたならば，Mason (1989) に基づいて,「注意の移行」を支援するという形で，支援方法を検討することができるようになる．そのため，どんな発問行為がどんな条件への注目を促すかが検討しやすくなる．また，どんな発問行為が有望であるかについて案が生まれれば，RCMA に基づいて，その発問行為が学習者に対してどのような影響を及ぼし得るかを検討することができる．この過程を整理することで，本研究が示した IDC モデルと RCMA は，それぞれ，概念的分析を実施する際の補助的なツールとして機能する理論的枠組であるということが指摘された．

第四に，本研究が収集した経験的データに基づいて，数学の授業において，仮にグループ活動を実施したとしたならば，どのような点に留意することが必要であるかについての示唆を分析し，整理した．結果，まず，固い核と防御帯の境界線は曖昧であることが示唆された．このことは，固い核としてこだわってさえいれば有効に機能したであろうアイディアが，偶然的な理由で，防御帯と

して捨てられてしまう可能性があることを示唆する．また，数学に限って言えば，教師のアプローチとしては，学習者の思考を促進した後に，学習者が自ら判断して行った思考の正当性を追認してやるという形が望ましいと示唆された．

以上のように得られた本章の知見を授業設計のためのヒューリスティックスとして整理すると，その主たるものは，以下のような理論的枠組として示すことができる．

- その数学的活動は，個人による試行錯誤の過程を含み得るか？
- その数学的活動は，試行錯誤を通じて，1 つ以上の答えの候補を自分の力で発見できたと感じられるような過程を含み得るか？
- その数学の授業は,「数学的活動を通じて」と称しながらも，単に他者から示唆された答えの候補の妥当性を確認するだけの活動になっていないか？
- その数学的活動は，その活動目的が，新しく学習する数学的な方法知の使用それ自体になってしまっていないか？
- その数学的活動は，新しく学習する数学的な方法知の使用が，その活動目的を合理的に達成するための自然な方法として位置付き得る活動であるか？
- その数学的活動において，学習者を支援するための発問行為を設計したか？
  - その数学的活動において起こり得る学習軌道の 1 つとして，学習目標となる方法知の使用を含む仮説的学習軌道を，基準学習軌道として考案し，それを IDC モデルによって表現したか？
  - IDC モデルによって表現された基準学習軌道を,「注意の移行」という観点から精査し，要支援箇所を特定したか？
  - 教科書の読解を通じて仮説的学習軌道を構成し，基準学習軌道と比較したか？
  - 教師による発問行為の後，学習者が自らの置かれた社会的状況をどのように解釈するかを RCMA を用いて推定し，その発問行為の妥当性を評価したか？
- その数学的活動における支援の在り方として， 学習者の意思決定を教師がそれとなく追認するために，学習者のどんな意思決定を追認するか？

8　結論

最後に，結論として本研究のここまでの成果を整理した上で，真正な数学的活動を実現するための哲学を，AM_S および AM_P の両立という観点から論究した．

まず，真正な数学的活動を実現するためには,「学習者第一／専門性第二」の哲学が必要である．頭の中で展開される数学的思考は，熟達者のやり方を見よう見真似で簡単に模倣できるような性質のものではない．そのため，数学の学習とは，熟達者の振る舞いを模倣することから始めて，徐々にその合理性に気付いていく過程ではなく，学習者なりに合理的に振る舞う中で少しずつ実践される数学的思考が，熟達者によって追認されるという過程である．

次に，学習者第一と専門性第二という弁別は，局所的プラグマティズムと大局的プラグマティズムという弁別によって，より具体的に特徴付けることができる．学習者は，局所的に (短期的に) 上

手くいく思考しか実施できない可能性があり，大局的に (長期的に) 上手くいく思考を身に着けなければならない．真正な数学的活動を実現するための哲学は，RCMA によって学習者の局所的プラグマティズムを捉えようとする学習者観を持ちながらも，数学的構造に基づく必然性の追究という大局的プラグマティズムを指導目標に据えるような数学観を持たなければならない．

上述のような，真正な数学的活動を実現するための哲学の研究成果は，真正な数学的活動を実現するためのヒューリスティックスでなければならない．真正な数学的活動を実現するための，完全に科学的に妥当な授業方法は，開発が困難であるため，それに代わるものとして，ヒューリスティックスが注目されるべきである．数学の教師という専門職は，次にどのように振る舞うかを考え続けなければいけない仕事であるという意味で，教師の思考力が問われる職業である．このような職業を支援するために必要なものは，授業方法論ではなく，授業設計・授業実践のヒューリスティックスである．

このようなヒューリスティックスは，一般的な学習者がどういう傾向を有するかということではなくて，具体的な学習者がどういう傾向を有したか，から得られる．真正な数学的活動に関する全称命題は，現実的に意味のある命題を得ることが原理的に困難であると考えられるから，真正な数学的活動を実現するためには，単一の事例を通じて得られる示唆を最大限導出するとともに，その示唆から，次のどんな数学的活動が起こり得るかという可能性を考える努力をしなければならないのである．すなわち，真正な数学的活動を実現するための数学教育研究は，全称命題から確実な指導を導き出そうとする哲学ではなくて，存在命題からどんな指導が有望であるかについての可能性を導き出そうとする哲学でなければならない．

まとめると，真正な数学的活動を実現するための哲学は,「学習者第一／専門性第二」の哲学であり，局所的プラグマティズムと大局的プラグマティズムを両方考える哲学であり，ヒューリスティックスの開発を軸に据え，存在命題とそこから示唆される次の可能性を追究する哲学である．これが，真正な数学的活動を実現するための哲学である．

本研究における今後の課題は，次の 4 点を挙げることができる．第一に，本研究は，真正な数学的活動を実現するための哲学を論究することに軸足を置いたため，その一環として導出した授業設計のヒューリスティックスについては，その哲学の具体化の一例として示されるに留まっている．第二に，本研究の成果が数学教師教育の実践やカリキュラム構成にどのように影響を与え得るものであるのかについては，十分に考察されていない．第三に，他の真正性との関連性の検討が不十分である．第四に，本研究の成果が，数学教師教育のみならず，そもそもの数学教育実践にどのような影響を与え得るものかは検証されていない．Herbst (2010) は，構成主義の考え方からの類推で，数学の教師も自身の価値観に基づいて最大限合理的に振る舞っていると考えるべきである，と主張する．本研究の成果が実践の改善にとって有望であったとしても，数学の教師によって無批判に受容されるものではあり得ない．そこでは，さらなる批判と創造が引き起こされるものと予想され，そうした影響については，今後の課題である．

本論文の主要引用・参考文献

Aizikovitsh-Udi, E., Clarke, D., & Star, J. (2013). Good questions or good questioning: An essential issue for effective teaching. In B. Ubuz, ?. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.2908-2916). Antalya.

Cambridge Dictionaries Online (n.d.). authenticity. Retrieved from `http://dictionary.cambridge.org/dictionary/british/authenticity`

Goldin, G. A. (2003). Developing complex understandings: On the relation of mathematics education research to mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(2-3), 171-202.

Goldin, G. A. (2014). A Fine Conceptual Analysis Needs No "Ism." *Constructivist Foundations*, *9*(3), 376-377.

Herbst, P. (2010). Practical rationality and the justification for actions in mathematics teaching. In *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. VI, pp. 46-54). Columbus.

国立教育政策研究所 (2015). 『平成 27 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 (中学校 数学)』. Retrieved from `http://www.nier.go.jp/15chousa/15kaisetu.htm`

ラカトシュ I. (1986). 『方法の擁護：科学的研究プログラムの方法論』(村上陽一郎・井山弘幸・小林傳司・横山輝雄 訳). 新曜社.

Lampert, M. (1990). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29-63.

Larsen, S., & Zandieh, M. (2007). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 205-216

Mason, J. (1989). Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 2-8.

中島義道 (2001). 『哲学の教科書』. 講談社.

ライル, G. (1987). 『心の概念』(坂本百大・宮下治子・服部裕幸 訳). みすず書房.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Tall, D. (2011). Crystalline concepts in long-term mathematical invention and discovery. *For the Learning of Mathematics*, *31*(1), 3-8.

哲学辞典 (1971). 「哲学」. 『哲学辞典』 (pp. 973-976). 平凡社.

哲学・思想辞典 (1998). 「哲学」. 廣松渉・子安宣邦・三島憲一・宮本久雄・佐々木力・野家啓一・末木文美士 (編), 『哲学・思想辞典』 (pp. 1119-1120). 岩波書店.

Thompson, P. W. (2000). Radical Constructivism: Reflections and Directions. In L. P. Steffe & P. W. Thompson (Eds.), *Radical Constructivism in action: Building on the Pioneering Work of Ernst von Glasersfeld* (pp. 291-315). Routledge.

Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. The Flamer Press.

Weiss, M., Herbst, P., & Chen, C. (2009). Teachers' perspectives on "authentic mathematics" and the two-column proof form. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(3), 275-293.