

博士論文

真正な数学的活動を実現するための
哲学に関する研究

Research on the Philosophy for Realizing Authentic Mathematical Activities

申請者

上ヶ谷 友佑

2017年1月

目次

第0章	序論	1
1	本研究の背景	1
2	問題の所在	5
3	本研究の目的	7
4	本研究の方法	15
5	本論文の構成	19
6	本研究の意義と限界	19
7	第0章のまとめ	22
第1章	先行研究の概観	27
1	第1章の論点	27
2	哲学の役割	28
3	先行する哲学的研究	37
4	先行する哲学的研究の援用可能性	57
5	第1章のまとめ	60
第2章	数学的活動に関わる学習観	69
1	第2章の論点	69
2	ラディカル構成主義の基本概念	72
3	ラディカル構成主義の定式化	80
4	理論的枠組としてのラディカル構成主義の用途の分析	100
5	動機付けに関する仮定を導入したラディカル構成主義	109

6	第2章のまとめ	117
第3章	個人による数学的活動の本性	123
1	第3章の論点	123
2	数学的知識および数学的方法の社会・文化依存性	124
3	数学に固有な社会・文化的側面を特徴付けるためのアイデア	129
4	「必然性」の意味	132
5	「構造」の意味	134
6	「構造」の規定	141
7	性質の必然性の正当化における数学的構造の役割	142
8	第3章のまとめ	151
第4章	個人による数学的思考の記述モデル	155
1	第4章の論点	155
2	数学的思考の二重性	162
3	心的モデルに対する注意の移行としての数学的思考のモデル化：IDC モデルの提案	166
4	第4章のまとめ	177
第5章	集団による数学的活動の質	181
1	第5章の論点	181
2	ラカトシュの科学哲学	183
3	集団による数学的活動の質を捉えるための理論的枠組	187
4	サンプル分析のための事例	195
5	サンプル分析：理論的枠組を用いた数学的活動の質の記述	207
6	サンプル分析に対する考察	218
7	第5章のまとめ	234
第6章	数学の授業を設計するためのヒューリスティックス	239
1	理論的枠組とヒューリスティックス	240
2	教科書に基づく数学的活動の分析	244

3	全国学力・学習状況調査に基づく数学的活動の分析	254
4	本研究の提案する理論的枠組からの理論的帰結の分析	263
5	本研究が収集した経験的データから得られる示唆の分析	281
6	第6章のまとめ	292
第7章	結論	297
1	これまでのまとめ	297
2	真正な数学的活動を実現するための哲学の論究	302
3	今後の課題	313
	本論文の引用・参考文献	319
	謝辞	333

第 0 章

序論

本研究は、教室において「真正な数学的活動」(authentic mathematical activity) を実現するために必要な科学的基盤としての哲学を論究した研究である。本章では、本研究の背景を整理し、先行研究に見出される問題の所在を明確化するとともに、本研究の全体像について述べる。

1 本研究の背景

「真正性」(authenticity) とは、「本物 [real] であることや忠実 [true] であることに関する質」(Cambridge Dictionaries Online, n.d.-a, 括弧内原文) のことである。また、「数学とは、その大部分が自分自身や他者の物理的・精神的・数学的活動の反省である」(Freudenthal, 1981, pp. 141-142) と言われるように、数学を学ぶということは、まずもって、反省する価値のある良質な「数学的活動」を行うことから始まると言っても過言ではない。したがって、教室における「真正な数学的活動」の実現は、初等教育における数学的問題解決 (Lampert, 1990) から大学教育における定理の学習 (Larsen & Zandieh, 2007) に至るまで、長年に渡って数学教育研究の目標であり続けてきた。しかしながら、そうであるがゆえに、Weiss, Herbst, & Chen (2009) が、「誰が『非真正』な数学の擁護者として

知られることを望むだろうか？」(p. 276)と問うたくらい、「真正な数学的活動」とは、数学教育において無批判に受容されてきた理想形でもある。その上で彼らは、

何が「真正」な数学を「非真正」な数学から区別するのかについての合意がほとんどないように思われるし、後者よりも前者の出現を促進するために教師達にとって必要不可欠な資質が何であるかについてほとんど明らかにされていないように思われる。

(p. 290)

と結論付ける。本節では、本研究の背景として、この数学教育研究における「真正性」の多義性に焦点を当てよう。

Weiss, Herbst, & Chen (2009) は、数学の教師がどのように「真正な数学」を捉えているかを調査するにあたって、数学教育研究における「真正性」の多義性を指摘している。各研究論文の著者が明示的に「真正」という語を用いているとは限らないけれど、各研究論文の目標の中に暗黙的に位置づいているものも含めるならば、彼らによれば、数学教育研究における「真正性」の意味は、少なくとも4つあるという。

第一の意味は、「真正性」を、「扱われている数学的内容が、実世界 (World) の文脈に対して忠実である程度」として解釈する。例えば、分数の応用として、現実に書店で販売されている料理本を題材に、そこに書かれている「人参 $\frac{1}{2}$ 本」の意味を考察する活動は、この第一の意味において真正であると言えよう。この意味での真正性を目指す数学教育研究としては、例えば、日常的な題材に基づいて作られた数学の文章題が、その意図に反して、かえって真正性を低下させていることを指摘した Sethole (2005) や、現代社会における問題解決の意味の再考を迫り、より複雑な課題を通じた数学的理解の促進を提案した English (2010) などが挙げられよう。Weiss, Herbst, & Chen (2009) は、この意味での「真正な数学」を AM_w と表記する。

第二の意味は、「真正性」を、「扱われている数学的内容が学問領域 (Discipline) としての数学に対して忠実である程度」として解釈する。例えば、極限を「限りなく近づく」ではなく、 $\epsilon - \delta$ 論法を用いて指導することは、学問としての現代数学の内容に忠実であり、この第二の意味において真正である。この意味での真正性を目指す数学教育研究としては、例えば、Rowlands, Graham, & Berry (2011) が挙げられよう。彼らは、数学的真理が

人間精神や人間的営みと独立であることを主張し、数学がその社会的起源と分離できないとする数学教育の哲学的研究 (例えば, Ernest, 1998a) ^{*1} を強く批判する。これは、学問としての現代数学に忠実な数学観を守ろうとする議論であり、第二の意味での真正性を目指す考え方であると言えよう。Weiss, Herbst, & Chen (2009) は、この意味での「真正な数学」を AM_D と表記する。

第三の意味は、「真正性」を、「学習者の活動が専門家 (例えば, 数学者) の実践 (Practice) と類似している程度」として解釈する。Weiss, Herbst, & Chen (2009) は、この意味での「真正な数学」を AM_P と表記する。この意味における「真正性」は、さらに2つの観点に分けて論じることができる。

1つは、「真正性」を、学習者集団の活動が、専門家 (数学者) コミュニティの実践と類似している程度として解釈するものである。このアプローチは、多くの場合、数学史をベースとして数学者コミュニティの実践の様相を明らかにし、その様相を真正な数学的活動の典型例と見なす。このアプローチにおいては、『証明と論駁』という著書で有名な ラカトシュ (1980) による数理哲学が、とりわけよく引用されている。この文献において数学者達の実践は、厳然とした絶対確実な知の体系を産出する過程というよりはむしろ、人間による誤解や誤謬を含み得るヘーゲル流の弁証法的発展 (Ernest, 1998a) として記述される。実際、『証明と論駁』で描かれる数学的コミュニケーションの様相は、多くの数学教育研究において真正な数学的活動の典型として見なされており、真理の伝達を最重要課題とする伝統的な教授実践に対するアンチテーゼとして、どのようにして教室で『証明と論駁』を実現するかが議論されてきた (例えば, Lampert, 1990; Larsen & Zandieh, 2007; Sriraman & Mousoulides, 2014)。

もう1つは、一人ひとりの専門家 (数学者) が実態としてどんな活動を行っているかに焦点を当て、そこから示唆を得ようとするタイプの研究である。このアプローチは、数学者コミュニティというよりはむしろ、ある特定の数学者個人の活動の様相を事例的に分析し、そこから真正な数学的活動の典型例の構築を試みるものである。コミュニティにおける活動としての真正性を目指すアプローチが、教室における『証明と論駁』の実現という比較的単純な研究目標を志向しているのに対して、個人における活動としての真正性を目指すアプローチは、調査の観点をどのように絞るかによって多様な研究目標

^{*1} Ernest (1998a) の社会的構成主義については、第1章第3.5節で詳しく取り上げる

を志向する。例えば、発話思考法による数学者の学習方略の調査研究 (Wilkerson-Jerde & Wilensky, 2011), 視線追跡装置を用いた初学者と数学者の証明の読み方の比較研究 (Inglis & Alcock, 2012), 数学の研究論文の構成の分析研究 (袴田・寺垣内・影山, 2015) などが挙げられる。

第四の意味は、「真正性」を、「学習者の活動 (特に思考) が学習者 (Student) の経験から創出されている程度」として解釈する。これは、構成主義と呼ばれる立場で検討されている見方であり、「生徒の数学」 (students' mathematics) を捉えようとする考え方である (例えば, Steffe & Thompson, 2000a)。この文脈において、数学的な問題に取り組む際に学習者が生み出したアイディアは、たとえそれが直観による所産であろうと推論による所産であろうと、また、たとえそれが教科書の数学よりも制限されたアイディアであったり、逆に、教科書の数学よりも広いアイディアであったりしたとしても、すべて数学であると見なされる。これは、問題解決にあたって、今の社会に既に存在する「数学」を機械的・形式的に活用するよりも、自ら生み出した「数学」によって試行錯誤することが本物の数学であるとする見方である。Weiss, Herbst, & Chen (2009) は、この意味での「真正な数学」を AM_S と表記する。

これら4つの意味の違いは、「本物」感を何に求めているかの違いであると理解できる。すなわち、現実世界に対する本物感 (AM_W)、学問的内容に対する本物感 (AM_D)、専門家の活動に対する本物感 (AM_P)、学習者にとっての本物感 (AM_S) である。また、後の利便性を考慮して、これらの関係性を分類しておくならば、さらに次のように分けることができる。まず、 AM_W と AM_D は、扱われている数学的内容の真正性を問題にする観点であり、 AM_P と AM_S は、学習者の活動の様相の真正性を問題にする観点である。また、 AM_W , AM_D , AM_P は、学習者達が自分達の取り組んでいる内容や活動がどのような性質のものであると感じているかとは独立に、観察者から見て真正に見えるかどうか重要な観点であるのに対して、 AM_S のみ、学習者達から見てどのような性質のものであるかという点に力点を置く観点である。これらを整理すると、表1のようになる。

表1 「真正な数学」の多義性 (Weiss, Herbst, & Chen (2009) に基づく整理)

記号	説明	真正性の対象	真正性の視点
AM_W	扱われている数学的内容が現実世界の文脈に対して忠実である程度.	内容の真正性	観察者
AM_D	扱われている数学的内容が学問領域としての数学に対して忠実である程度.		
AM_P	学習者の活動が専門家 (例えば, 数学者) の実践と類似している程度.	活動の真正性	学習者
AM_S	学習者の活動 (特に思考) が学習者の経験から創出されている程度.		

2 問題の所在

前節で取り上げた, 4つの「真正な数学」は, いずれの真正性であっても, それぞれ異なる, 現代的な教育的価値を有している. このことは, どれが数学教育において目指すべき真正性なのかということよりは, それぞれをどのように実現するかということを議論すべきであることを意味する. 特に, この4つの分類は, 互いに排他的な分類ではないことから, 教室での学びを適切に組織することによって両立できる可能性がある. 例えば, 文章題の内容や文脈を適切に工夫すれば, 日常との関連性 (AM_W) を維持しながらも, 学習者に解決の必要性 (AM_S) を喚起させるとともに, 集団でそれを解決するに際し, 専門家のように振る舞わせる (AM_P) ことができるであろう. そして, このような過程を経て, 結果的に厳密な学問数学へ通ずる学び (AM_D) ができたならば, すべての「真正性」を充足できたこととなる. このことは, ある側面においては4つすべての真正性が, 互いに両立可能であることを示唆する.

しかしながら, その一方で, 表層的には両立可能である「真正性」も, いざ具体的に検討を始めると, 実際には両立が難しいことが予想される. 例えば, 学習者が自ら生み出したアイディアのみで問題解決を図る (AM_S) とすれば, その素人の振る舞いは専門家の振

る舞い (AM_P) のようには見えないであろうし、学習者の生み出したそのアイデアが、現実社会で役に立ったり (AM_W)、学問的に厳密な議論に耐え得たり (AM_D) するということも、起こりそうにない。つまり、何か1つの意味における真正性を重視し始めた途端、それを重視するあまり、他の真正性が犠牲になるということは想像に難くない。

かといって、4つの真正性をいずれか1つだけを単独で実現できたとしても、十分な教育的価値は期待できない。まずもって、教育が何らかの意味で学習者に作用することを目的とする営為であるならば、少なくとも、学習者の受け取り方を考慮した真正性が必要である。たとえ観察者の視点から「真正な数学」が実現しているように見えたとしても、学習者がその真正な数学の真価を適切に享受しているとは限らないからである。つまり、少なくとも AM_S の観点から真正性の実現できていなければ、たとえ他の真正性の実現できたとしても、数学教育として実質的な価値を持ち得ない。その意味で、 AM_S を欠いた真正性は、空虚になりかねない。

もちろん、 AM_S が最も重要な真正性であるかといえば、そうでもない。例えば、第二次世界大戦後に取られた生活単元学習が「這い回る経験主義」として揶揄されたことは広く知られるところであり、学習者にとっての本物感のみをとことん追究することが高い教育的効果をもたらすわけではない。

以上を踏まえると、数学教育における「真正性」を巡る議論の現状を、次のように整理することができる。すなわち、どの真正性とどの真正性がどのような条件の下で両立可能であり、また、どのような条件の下で両立不可能となるのか、という、複数の「真正性」間の関係が明らかになっておらず、単一の真正性の実現を目標とするあまり、他の真正性を犠牲にしてしまっている可能性がある。個別の研究としては、それぞれが目指す「真正性」の実現へ向けた知見の科学的累積が進んでいる一方で、数学教育研究コミュニティ全体としては、異なる「真正性」間の関係性を議論するための共通基盤や、異なる「真正性」を同時的に実現する方法について議論するための共通基盤を十分に有しているとは言えない状況にある。

このことは、数学教育を科学的に研究するという観点から見れば、単に用語の整備が不十分であるという問題に過ぎない。議論するために必要な共通の用語さえ定義されれば、その定義が具体的に何であったとしても、取り急ぎ、その定義に基づいた科学研究が実施可能となるであろう。しかしながら、数学教育として価値のある議論を現実的に行なう

ためには、真正性に関する用語が、どんな形で定義されていても良いというわけにはいかない。したがって、真正な数学的活動を議論するための科学的な共通基盤が不十分であるという問題は、数学教育の科学的研究に関する問題というよりはむしろ、どのような状態を、複数の真正性が同時に実現できているとみなすかという、数学教育の哲学に関わる問題である。つまり、数学教育研究コミュニティにおいて、真正な数学的活動を議論するための一貫した哲学が、まだ十分な形で確立されていない、ということ、問題として指摘することができるであろう。そして、真正な数学的活動を議論するための哲学の整備が十分でないということは、当然、一貫した視座から数学教育実践を計画し、実施するための哲学もまた、十分に整備されていないということの意味する。教室において真正な数学的活動を実現するためには、研究としても実践としても、哲学の確立が必要であると言える。

3 本研究の目的

前節では、数学教育研究コミュニティにおける現状として、教室において真正な数学的活動を実現するために必要な哲学が十分に確立されていない点を指摘した。本節では、その点を踏まえた本研究の目的について論じる。

3.1 研究目的

本研究は、次を研究目的として設定する。

【研究目的】 教室において真正な数学的活動を実現するために必要な哲学とは何かを
論究すること

その上で、次の2つを下位目的として設定する。

【下位目的 1】 教室において真正な数学的活動を実現するための研究に必要な科学的
基盤を明らかにすること

[下位目的 2] 教室において真正な数学的活動を実現するための授業設計ヒューリスティックを開発すること

ここで、教室において真正な数学的活動を実現するために必要な哲学とは、数学教育の研究者や数学教育の実践者といった、教室における真正な数学的活動の実現に関心を持つ者にとって必要な哲学を想定している。そうした哲学がどのような哲学であるかを論究するにあたって、上に挙げた2つを下位目的として設定することは重要である。

まず、真正な数学的活動についての研究を進めていくための基盤を整備せずに真正な数学的活動を実現するために必要な哲学を論じるということは、曖昧な用語や曖昧な概念を用いて哲学を論じるということになる。それゆえ、まずは研究をすすめるための基盤を準備する作業が必要であり、これを第一の下位目的として据えることは妥当である。

次に、真正な数学的活動を実現するために必要な哲学を論究するということは、いわば、真正な数学的活動を実現するための根本的な考え方を示すということにほかならないから、その考え方を具体化した1つの形態として、教室において真正な数学的活動を実現するための授業設計ヒューリスティックを開発するということは、有効な手段である。本章3.3節でも述べるように、ヒューリスティックとは、授業設計の指針となる方法知である。そのため、ヒューリスティックの開発を通じて、真正な数学的活動について集積された情報が、真正な数学的活動を実現するための哲学へと昇華される契機を得ることになる。

以下では、2つの下位目的それぞれについて詳述しよう。

3.2 下位目的 1

教室において真正な数学的活動を実現するために必要な哲学とは何かを論究する上で、真正な数学的活動を科学的に研究するための基盤を明確にすることは、前節までに指摘した事柄からの直接的な帰結である。

本研究は、この哲学の論究へ向け、「必要性」の観点から研究を進める。実際、たった1つの研究によって、必要十分な哲学を論究し切ることは不可能であろう。多数の研究による成果の累積なくして、必要十分な哲学の論究は不可能である。

そこで本研究は、特に活動の真正性を対象とする AM_S と AM_P を両立させるための科

学的研究を遂行していく上で必要となる科学的基盤の明確化を下位目的 1 に据え、そうした基盤の論究を試みる。AM_W や AM_D を脇に置き、この 2 観点に注力する理由は、以下の通りである。

まず、表 1 に整理した 4 つの「真正性」は、その教育的価値に関して単純に優劣をつけることはできない。しかしながら、教室において複数の意味での「真正な数学」を同時に実現する手立てとして、どの真正性に優先的に注目することが合理的であるか、これについては、ある程度、決めることができる。

第一に注目すべき真正性は、AM_S である。なぜなら、教育が何らかの意味で学習者に作用することを目的とする営為であるならば、少なくとも、学習者の受け取り方を考慮した真正性が必要であるからである。実際、たとえ観察者から見て「真正な数学」が実現されているように見えたとしても、学習者がその真正な数学の真価を適切に享受しているとは限らない。したがって、学習者視点での真正性を考慮する AM_S だけは、他の真正性の実現が求められる場合であっても、必ず同時に求められるべき真正性である。しかも、AM_S の観点から真正性が実現できなければ、たとえ他の真正性が実現できたとしても、数学教育として実質的な価値を持ち得ない。そのため、この AM_S の観点は、まずは最初に注目すべき観点であるといえる。

第二に注目すべき真正性は、AM_S と同じように「活動の真正性」に分類される AM_P である。数学教育研究の歴史を振り返ると、例えば、Confrey (1991) や Sfard (1991) のように、個人の発達 (個体発生) と学問の発展 (系統発生) がある側面において類似しているということ、すなわち、数学学習の過程が数学史と類似しているということに基づいて、数学学習の様相を捉えることが広く試みられてきた。これは、端的に言えば、AM_S と AM_P をほとんど同一視した見方であると言って差し支えないであろう。しかしながら、近年、Bråting & Pejlare (2015) が指摘しているように、そうした考え方は、各時代における数学者の能力を過小評価しているという見方もある。実際、発達途上の学習者が初めから専門家と同じように振る舞えるという保証はどこにもなく、学習者の活動が、初学者としての経験に基づいて創出されていればいるほど、それは洗練された専門家の活動とは異なる様相を示す可能性が高い。したがって、AM_S と AM_P を同時に実現するということが、どういふことであるのかを明確にしなければ、真正な数学的活動に関する建設的な議論は発展し得ない。

第三に、内容の真正性を対象とする AM_W と AM_D の観点について、これらは、相対的に注目度の低い真正性である、と言える。もちろん、そうした真正性を目指すことは、それ自体、十分に教育的価値のあることではある。しかしながら、数学教育研究が取り組むべき、数学教育実践が抱える真正性に関する問題として考えたとき、解決の優先度が高い問題は、 AM_S と AM_P である。その理由は、以下に示す近年の新しい学力観を構築する試みの中にも見て取ることができる。

これまでの数学教育研究では、数学的概念を形成したり数学的理解を深化させたりする過程として位置付けられていた数学的活動が、近年の議論においては、数学的活動それ自身を指導の対象とすべきであるとされつつある。すなわち、数学教育の力点が、数学的内容の指導から数学的方法の指導へと移行されつつある。こうした議論の例としては、例えば、数学化やモデル化といった方法の重要性が指摘されたり (阿部, 2008 ; 岩崎・阿部・山口, 2008), 数学を活用する力として、数学的なプロセスを中核に据えた学力観が検討されたりしている (清水, 2012, 2015)。また、この数学的方法への着目は、理念的なレベルのみに留まるものではない。例えば、平成 27 年度全国学力・学習状況調査の中学校数学 B 問題 2(3) では、連続 5 整数の和について成り立つ事柄を予想させる問題が出題されている (国立教育政策研究所, 2015, pp. 94-101)。この問題が、例えば、「与えられた命題を証明できるか」というような、命題を与えられるまでは証明をしなくても済むような、そういった受動的な数学的能力を評価しようとしているわけではない点は、重要である。そういった受動的な数学的能力を身に付けるだけでよいのであれば、「予想する」ことに関する能力は必ずしも重要ではない。このような能力は、数学的活動に積極的に取り組む過程で、自ら問いを立て、自ら解決していく上で必要になり得る能力である。したがって、この出題は、数学的活動それ自身が数学的方法として身につけているかどうか、具体的な評価問題のレベルで求められるようになってきた一例として捉えることができよう。

こうした指導内容の強調点の移行を背景に据えれば、扱っている数学的内容が現実生活に根ざしていようと学問数学に根ざしていようと、いずれにしても、数学教育として重要なことは、その内容を扱うための方法を指導することである。したがって、 AM_W と AM_D をどのようにして高めるかということ以上に、次の 2 つ、

- 学習者が扱われている数学的内容を本物感のある問題として受け止めることができ

ること (AM_S), および,

- そうした問題を専門家と同じように振る舞うことで解決する経験を積むということ (AM_P)

を数学教育の内部で両立させることで, 学習者が, 将来自らに降りかかる種々の問題を数学的に洗練された方法で解決していけるような力を身につけられるようにすることが, 数学教育研究の喫緊の課題であると言える. したがって, AM_S と AM_P を同時に実現するための科学的研究が, AM_W と AM_D の観点から見た真正性の科学的探究に先立って要請されるものと考えられる.

そこで, 4つの真正性の関係性を建設的に議論していくためにも, 本研究は, AM_S をベースとして AM_P を実現するために必要な哲学の論究を目指すこととする. 本研究では, その研究目的として, AM_S から AM_P までを射程として, その後に続くと考えられる AM_W と AM_D の観点との関連性については, 今後の課題とする.

3.3 下位目的 2

教室において真正な数学的活動を実現するために必要な哲学とは何かを論究するために, 本研究では, その下位目的 2 として, 教室において真正な数学的活動を実現するための授業設計ヒューリスティックスを開発することを据える. ヒューリスティックスとは, いわば, 「発見法」である. 授業設計のヒューリスティックスがどのようなものであるかは, ポリア (1954) の数学的問題解決のヒューリスティックスと類比的に捉えることで理解しやすくなるであろう. つまり, ヒューリスティックスとは, アルゴリズムとは異なり, その適用によって有限時間内における問題解決が 100% 保証される類の方法知ではないけれど, 問題解決の緒を探るために有用な, 試行錯誤のための方法知である. 例えば, 図を描くとか定義を確認するとかといったヒューリスティックスは, その方略を知っていたからといって 100% 問題が解けるようになるような性格の方法知ではないけれど, 問題解決者がそのヒューリスティックスを知っていたならば, 素朴な状態では検討しようと思わなかったかもしれないことにも着目する機会を広げ, 素朴な状態では闇雲な試行錯誤を繰り返して一向に前へ進まなかったかもしれない状況を打破する機会を提供し得る, という意味で, 問題解決に対して支援的な役割を果たし得る方法知である. 同じように, 本研

究が開発を試みるヒューリスティックスは、その方略が明らかになったからといって誰もが100%効果的な授業を設計できるようになるような性格の方法知ではないけれど、授業設計者がその方略を知っていたならば、素朴な状態では検討しようと思わなかったかもしれないことにも着目する機会を広げ、素朴な状態では闇雲な試行錯誤を繰り返して一向に前へ進まなかったかもしれない状況を打破する機会を提供し得る、という意味で、授業設計に対して支援的な役割を果たし得る方法知である。本研究は、こうしたヒューリスティックスの開発を試みる。

このように述べたとき、開発すべきは、授業設計のヒューリスティックスではなく、むしろ、授業方法や指導方法ではないか、という見方も生じることであろう。しかしながら、授業設計において、「この授業の型にはまっていれば、基本的に失敗はしない」というような、指導方法を定式化することは原理的に不可能である。これまでの数学教育研究においては、こうした安直な指導法研究に対する批判が繰り返されてきた(例えば、岩崎・大滝・新居, 2012, 平林, 2007)。そのような指導法の定式化が可能であるという仮定は、例えば、

- 学習者の能力や個性の多様性
- 学習者・教師間、あるいは、学習者間での相互作用の可能性

を暗黙的に無視しているように思われる。たとえ習熟度別の学習形態を取ったとしても、数学学習に関わる学習者の個性(授業への参加の仕方、教師とのコミュニケーションの仕方、概念の理解の仕方など)は、依然として極めて多様なままである。この多様性を無視し、学習者の均一性を仮定した授業方法は、たとえ確立できたとしても実用に耐え得る指導方法論にならないであろう。また、授業という場は、学習者が講義をただ眺めるだけの場ではないわけであるから、学習者・教師間、あるいは、学習者間においてコミュニケーションが生じる場である。そのため、学習者がどのように振る舞い得るかについての考察抜きに、真正な数学的活動の実現を語ることはできないであろう。このことを換言するならば、AM_Sの観点から見たとき、授業方法や指導方法という教師側の振る舞いのある種の原因として捉え、「ある授業方法や指導方法を採用したからこそ、学習者に効果的な学びをもたらすことができた」というタイプの主張が原理的に不可能であるということの意味する。あくまでも、数学的活動の真正性に対する決定的要因は、学習者の側にある。

とは言え、だからと言って、教師側の何らかの要素が、一切合切、学習者の学習成果に影響を与えていない、というわけでもない。学習者の多様性や学習者の関わるコミュニケーションの存在という現実を受け入れた上で、真正な数学的活動を実現するための指導計画を立案する際に決定的に重要となることは、どのような指導計画を立案するか(立案したプロダクト)ではなく、どのように指導計画を立案するか(立案するプロセス)、である。学習者の多様性や学習者の関わるコミュニケーションの存在を受け入れる場合、例えば、Simon (1995) が、「教授において唯一予測可能なことは、教室活動は予測した通りに進まないであろうということである」(p. 133)と述べているように、ともすれば、結局のところ、実際に授業に臨んでみなければ、教師がどう振る舞うべきかを定めることができない、という悲観的な捉えを導きかねない。しかしながら、上で引用した Simon (1995) の言葉の意義は、続く次の一文にこそ現れている。「教師は、指導の初期目標と指導計画をつくるけれど、一般的に、それは、ある特定の概念領域の学習の間、何度も(おそらくは連続的に)修正されなければならない」(p. 133)。つまり、指導計画の立案・指導の実践・指導結果の評価・指導計画の修正、そして新しい指導計画の立案という一連の流れは、不可避的に循環をなすこととなる。そして、この循環が適切に機能するためには、指導計画として、ある指導に対して起こり得る生徒の反応を事前に複数通り予想しておき、どのような反応が生じたかに応じて、次の指導を柔軟に変更できるように構えておくことである。

実際、教師は、授業中、学習者に対して、発問を投げ掛けたり、何らかの問題解決活動に取り組むよう指示したり、あるいは、自力解決が困難な生徒を支援したりするであろうけれど、そうした行為に対して、すべての学習者が一様な反応を示すわけではない。また、ある一人の学習者に何らかの働きかけをする場合を考えてみても、その学習者が既習事項についてどの程度習熟しているかについての教師の見込みが微妙にズレているだけで、その学習者は、教師の期待する反応を返さなくなるかもしれない。そのため、教師が、起こり得る生徒の反応を、実践前の計画段階でまったく予想しなかったり、少数通りしか予想していなかったりして、実践しながら行き当たりばったりで指導することになってしまふようでは、全体として一貫性を失った指導になりかねない。実際、授業の計画として学習指導案を作成する場合、教師の振る舞いに対して予想される児童・生徒の反応を記載することは、比較的一般的なことであると思われる。したがって、授業設計の段階においては、予想される学習者の反応を複数通り検討しておいて、その反応に合わせて、次にど

のような指導を行うのかを決めておく，ということが，授業計画を立案する際の重要な過程であると言えるであろう。しかしながら，重要な問題として，その予想される学習者の反応を，どのようにして予想することができるのか，また，その予想に対して次にどのような指導を検討することができるのかについての体系的な数学教育論は，管見の限り見当たらない。

授業設計論の一部として，予想される生徒の反応とそれに対する次の指導の在り方については，数学教育に固有の理論的考察が必要不可欠である。特に，

- どのような学習者が存在し得るかを教師が複数通り予測することを支援し，
- ある指導に対して，各学習者がどのように反応し得るかを教師が予測することを支援し，
- そして，その反応に合わせて，次に教師がどのように指導することができるかを示唆してくれる，

そういった理論が必要である。これは，学習者がどのように数学を理解している可能性があるかや，ある状況下で学習者がどのように思考する可能性があるかについて予測することに等しく，数学教育に固有な理論として確立されなければならない。このことを実現し得る理論が確立されたならば，その理論は，数学の授業設計に大きな示唆を与えることであろう。

このような観点に立ったとき，こうした授業設計のためのヒューリスティックスの開発は，いわゆる「指導方法の開発」に変わる重要な数学教育学的研究対象となり得る。新米教師であれベテラン教師であれ，どんな教師が実行しても等しく実践上の効果を得ることができる授業方法を開発することは不可能である。しかし，個々の教師が，それぞれの力量を基準として，その数学教育実践の質を相対的に向上させることを目指す，という状況下で，その教師の努力に対して支援的な役割を發揮し得る何らかの理論的構成物を開発することは，可能であると考えられる。それゆえ，本研究は，真正な数学的活動を， AM_S および AM_P の観点で実現するための，授業設計のヒューリスティックスの開発を目指す。

4 本研究の方法

本節では、前節で述べた本研究の目的を達成するための方法を述べる。本研究では、大きく分けて次の3つの方法を採用する。

[研究方法 1] 真正な数学的活動を議論するために必要な理論的枠組を定式化する

[研究方法 2] 定式化された理論的枠組を用いた4つの分析を実施し、授業設計のためのヒューリスティックスを定式化する

[研究方法 3] 定式化された理論的枠組と定式化されたヒューリスティックスから、真正な数学的活動を実現するための哲学を論じる

以下、これら3つの方法について概略を述べていくこととしよう。

4.1 研究方法 1

本研究の目的を達成するための第一の方法は、真正な数学的活動を議論するために必要な理論的枠組の定式化である。ここで、「理論的枠組の定式化」とは、「哲学」という相対的に概念的な体系よりも、「理論」という相対的に形式的な体系として整理する作業を指す。真正な数学的活動を研究するための科学的基盤は、その背景となる哲学を単に語るだけで固めることができるわけではない。そうした背景哲学を理論的枠組として定式化することで、その背景哲学の解釈に関して曖昧さを排除することが可能になると見込まれる。真正な数学的活動に関する背景哲学を単なる筆者の個人的思想に留めることなく、他者が活用可能な形式として定式化するこの作業は、本研究の成果が真正な数学的活動を科学的に探究するための基盤となるためにも、また、研究方法2としてヒューリスティックスを整備するためにも、重要な手続きとなるであろう。

このとき、真正な数学的活動についての新しい哲学の提案および理論的枠組の定式化は、次の4つの観点に基づいて実施する。

【観点 1】 数学的活動に関わる学習観

【観点 2】 個人による数学的活動の本性

【観点 3】 個人による数学的思考の記述モデル

【観点 4】 集団による数学的活動の質

第一に、真正な数学的活動を研究するための科学的基盤として、何を知識として捉えるのかという観点で、数学的活動に関わる学習観を検討する。個人がある数学的活動を通じて学び得ると考えられる知識は、数学的な命題や定理といった数学の内容に関する知識ばかりではない。数学的な問題解決に有効な方略や他者と数学的に議論する際の作法など、数学の方法に関する知識も多分に含まれていると考えられる。そこで、真正な数学的活動を議論するために必要な理論的枠組を定式化する上で、本研究は、まず、どのような知識観が必要であるかという観点で考察を進める。その上で、本研究では、真正な数学的活動を議論するために適切な知識観として、von Glasersfeld (1995b) のラディカル構成主義をその知識観の基礎としながらも、それをレイヴ & ウェンガー (1993) の正統的周辺参加論のアイデアを踏まえて特殊化した、新しい知識観を提案する。これは、主として AM_S の観点から知識を捉える作業となる。

第二に、真正な数学的活動を研究するための科学的基盤として、個人による数学的活動の本性をどのように特徴付けるか、という観点で検討する。学習者達が数学的問題に取り組んだり、数学的な内容について議論したりしさえすれば、学習者達の活動が真正な数学的活動になるのか、といえ、一般的に言って、その限りではないであろう。また、数学的活動を通じて価値のある数学的知識が学ばれ得ると期待されることから、数学的知識と数学的活動は密接に関連していると考えられる一方で、非数学的活動を通じて何らかの数学的知識が学ばれる可能性や、何らかの数学的活動を通じて非数学的知識が学ばれる可能性を否定することはできない。実際、一般的な学習論としては、教科内容に過剰に焦点化した議論が適切でないことを示唆する研究もある (例えば、レイヴ & ウェンガー, 1993; 佐藤, 1992)。これは、 AM_S の観点から知識を捉えた際の必然的な帰結である。しかしながら、本研究は、 AM_S と AM_P の両立を目指すものであるから、単に AM_S の観点から知識を捉えるだけでなく、 AM_P の観点からもまた知識を捉えなければならない。そのため、真正な数学的活動の哲学としては、観点 1 で議論した知識観を踏まえながらも、それとは

別途、数学的活動観もまた議論しなければならない。これは、個人が実践する活動の中にどのような特徴が見出されれば特に数学的活動であると見なすことができるのかという、数学教育研究に固有な議論となるであろう。

第三に、真正な数学的活動を研究するための科学的基盤として、個人の数学的思考をどのように記述するか、という観点で検討する。現実の学習者は、数学的に洗練された思考を常に展開できるわけではないから、真正な数学的活動を研究するためには、そうした点も踏まえて、学習者がどのような数学的思考を展開し得るかを表現する方法が必要である。そこで、観点1および観点2で議論した知識観や数学的活動観を反映した表現方法で、なおかつ、学習者が数学的に洗練されていない思考を展開し得る可能性を踏まえた表現方法を、新しい理論的枠組として定式化する。

第四に、真正な数学的活動を研究するための科学的基盤として、集団による数学的活動の質をどのように特徴付けるか、という観点で検討する。観点3で議論した理論的枠組によって学習者個人の数学的思考の特徴を捉えることができるようになるけれども、教室における数学的活動とは、しばしば集団において展開される活動であるから、集団において数学的活動を論じることができるようにするために、その理論的枠組を準備しておくことが必要となる。特に、学習者達は、プロの数学者集団と同じようには議論できないことが見込まれるから、我々は、科学的基盤として、集団での活動として、素朴な数学的活動と洗練された数学的活動の両方を記述することができ、なおかつ、素朴な数学的活動と洗練された数学的活動の関係性について調査できるようにするための、理論的枠組が必要である。

本研究の目的との対応を考えたとき、研究の下位目的1は、この研究方法1によって実質的に達成されることとなる。すなわち、この過程を経て考案される理論的枠組が、真正な数学的活動を実現するための研究にとって必要な科学的基盤となる。しかしながら、こうした理論的枠組を、建設的な科学研究を実施するために有用な一種の道具としてみなせば、研究方法1の実施だけでは、実際の応用例を伴わずして、道具を開発したことになってしまう。それはいわば、「理論上、機能する」と見込まれる道具であるに過ぎない。そこで、本研究の開発した理論的枠組を実際に応用することで、その価値を確認する作業が必要となる。それが、研究方法2である。

4.2 研究方法 2

本研究の目標を達成するための第二の方法は、第一の方法において定式化された理論的枠組を用いて、数学の授業を設計するためのヒューリスティックスを開発することである。ヒューリスティックスを開発するにあたっては、定式化された理論的枠組を用いて、次の4点を実施する。

- 教科書に基づく数学的活動の分析
- 全国学力・学習状況調査に基づく数学的活動の分析
- 本研究の提案する理論的枠組からの理論的帰結の分析
- 本研究が収集した経験的データから得られる示唆の分析

これらの分析および開発から、数学の授業を設計するためのヒューリスティックスを導出する。

上記の4点目は、ヒューリスティックス開発にとって必要十分な項目を列挙したものではない。つまり、完全なヒューリスティックスを導出するために十分な分析を尽くしたわけでもなければ、最低限必要な項目を列挙できたとも考えられない。ここでは、研究方法1によって定式化された理論的枠組の活用事例を、4通りの形で示したに過ぎない。ヒューリスティックスとは、方法知の集積であるから、そもそも完全な集積を実現できるようなものでもなければ、重要なヒューリスティックスだけを取り出してコンパクトにまとめられるようなものでもない。そうしたヒューリスティックスの本性は、研究方法3として数学的活動を実現するための哲学を論究するための前提ともなる。

4.3 研究方法 3

本研究の目的を達成するための第三の方法は、研究方法1で提案した理論的枠組と、研究方法2で定式化したヒューリスティックスの2つをその基礎として、教室において数学的活動を実現するための哲学について論究する。研究方法1を通じて得られる理論的枠組は、研究を実施するための基盤となるものである。研究方法2を通じて得られるヒューリスティックスは、実際にそうした研究を実施することを通じて得られる示唆を、具体的に授業設計時に考慮可能な形として整理したものである。研究方法3では、こうした研究の

基盤と授業設計の基盤を総合することによって、本研究の結論として、真正な数学的活動を実現するための哲学を抽出する。

5 本論文の構成

本論文の構成は、図 1 および 図 2 のように図示することができる。まず、本研究の方法が、本論文の各章とどのように対応するかについて、図 1 に示した。第 2 章～第 5 章までが研究方法 1 の 4 つの各観点に、第 6 章が研究方法 2 に、そして、第 7 章が研究方法 3 に対応する。また、本論文の各章が論理的にどのように接続されているかについて、図 2 に示した。具体的には、まず、次章第 1 章では、科学的研究の基礎として哲学を理論的枠組として定式化することの必要性を論じた。第 2 章と第 3 章では、その必要性に則って、本研究が特に着目する 2 つの真正性 AM_P および AM_S を、本研究の目的に沿うよう、それぞれ理論的枠組として定式化する。続く第 4 章と第 5 章においては、第 2 章と第 3 章の成果を踏まえながら、2 つの真正性 AM_P および AM_S を同時に捉え得るモデルを理論的枠組として定式化する。この定式化は、個人による数学的思考と集団による数学的活動の両方について行なう。第 6 章では、ここまで構築した理論的枠組から導出される数学の授業を設計するためのヒューリスティックスを定式化する。最後に、第 7 章では、本研究の結論として、ヒューリスティックスの定式化過程から得られる真正な数学的活動の哲学を論じる。

6 本研究の意義と限界

本研究は、今後の数学教育研究及び数学教育実践に貢献し得る研究である。具体的には、次の 2 つの点で意義を有する。

第一に、本研究は、真正な数学的活動を検討するための科学的基盤の確立に貢献する。

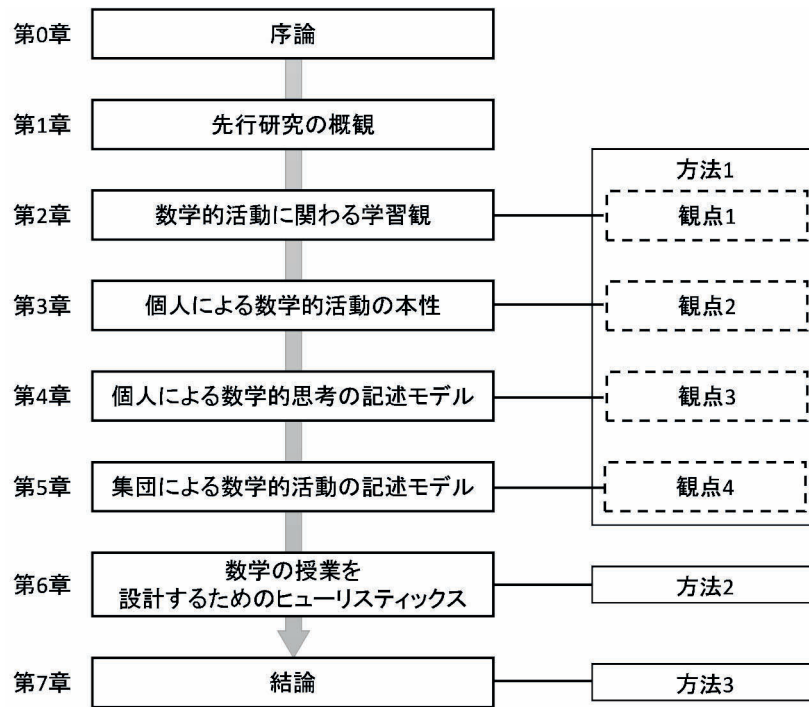


図1 各章と本研究の方法との対応

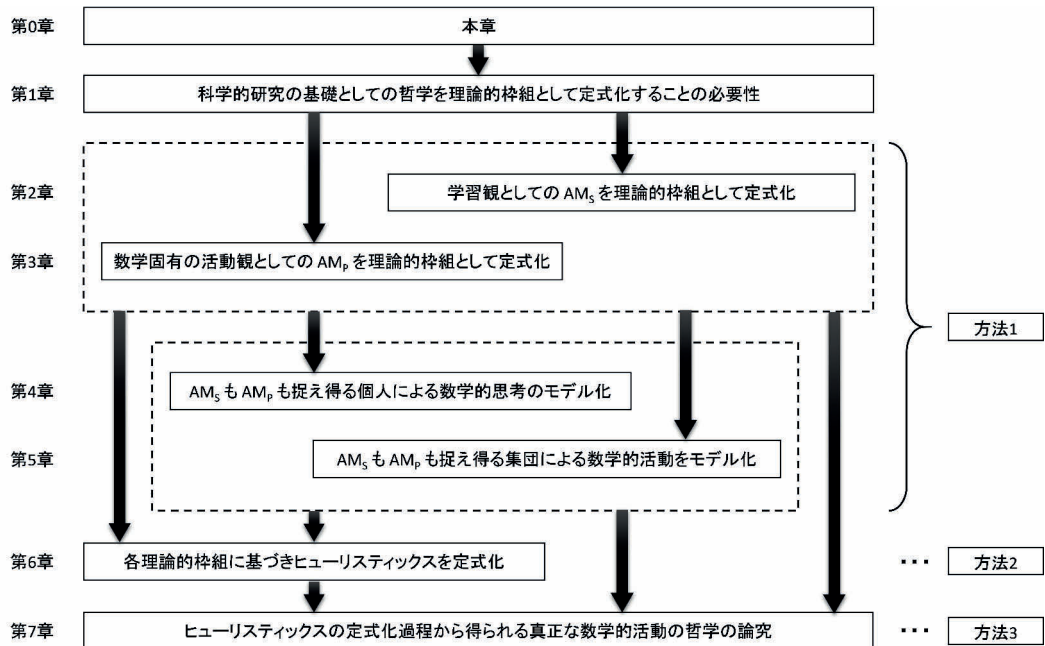


図2 本論文の論理的構造

AM_S と AM_P の観点に制約されているとは言え、ここまで問題提起してきたように、実践上、衝突し得るこの2つの真正性を両立させるためのヒューリスティックスを開発することは、曖昧な言葉遣い、曖昧な価値観、曖昧な物の見方のままでは達成し得ず、自ずから、その科学的基盤を整備することが必要となる。この点は、真正な数学的活動について建設的な科学的知見を積み重ねていく上で意義ある成果になると言える。

第二に、ポリア (1954) のヒューリスティックスが、我々の数学的問題解決に対して大きな示唆を与えたように、本研究が開発を試みるヒューリスティックスもまた、我々の数学教育学的問題解決に対して大きな示唆を与え得ることが期待される。特に、本研究は、昨今の数学教師教育の議論と軌を一にする、新しい研究の方向性である。先にも述べたように、どんな教師が実行しても相応の成果を挙げることのできる「指導方法」のパッケージの開発は不可能であると考えられており、重要なことは、むしろ、将来のカリキュラム改訂に耐え得る教師の育成であるとされる。例えば、岩崎他 (2012) では、そうした「耐カリキュラム性教師」の必要条件として、学習指導要領といった大枠のカリキュラムから、教室で具体的にどのような学習目標を立て、どのように授業を実施するかを検討するための、「理論」を駆使する力が指摘されている (p. 28)。本研究は、これまで行われてきた数学教育研究の理論をその背景に据えながら授業設計のヒューリスティックスの開発を試みるものであるから、ここで開発されるヒューリスティックスは、1つの、数学教育理論の駆使の仕方を示すものとなるであろう。

一方、本研究の開発対象はヒューリスティックスであるため、本研究は、そのことに起因するある種の限界もまた有している。具体的には、真正な数学的活動を実現するための授業設計のヒューリスティックスが開発されたとしても、数学教師ならば誰でも直ちに真正な数学的活動を実現できるようになるというわけではない、ということである。この限界は、ヒューリスティックスに代わる真正な数学的活動を実現するためのアルゴリズムを開発し得ないと見込まれる以上、避けられない問題である。ポリア (1954) のヒューリスティックスの場合で言えば、それを直接指導したとしても、学習者が直ちに数学的問題解決を効果的に達成できるようになるわけではないということが知られており (Kantowski, 1977)、本研究の開発するヒューリスティックスに関しても、同種の問題が生じると見込まれる。逆に言えば、本研究の開発するヒューリスティックスが極めて有望なヒューリスティックスであると示されたならば、例えば、新米の数学教師がそのヒューリスティック

スを獲得するためにはどのような教育が必要であるかという、数学の教師教育の問題が生じると言える。しかしながら、本研究の射程には、この教師教育の問題までは含まれていない。1つの研究で、ヒューリスティックスの開発と教師教育の検討の両方を達成することは不可能であるから、この点に本研究の限界があると言えよう。

7 第0章のまとめ

本章では、主として本研究の背景・目的・方法・意義を述べた。本節では、これらを改めてまとめておこう。

本章第1節および第2節においては、本研究の背景と先行研究における問題の所在を指摘した。教室における真正な数学的活動の実現は、数学教育研究における大きな関心事であるが、その実、これまでの数学教育研究においては、どんな数学的活動が真正な数学的活動と呼べるのかについて、十分な合意がないままに研究が進められてきた。このような状況は、数学教育研究コミュニティ全体でその研究知見の共有と科学的な累積を図る際の障害となり得るであろう。この問題は、この研究課題を議論するための基盤が十分に確立されていないことに起因していると言える。

そこで本章第3節では、まずは表1における「活動の真正性」に焦点を当て、学習者の活動が数学者の本物の活動と類似しているか (AM_P) と学習者の活動(思考)が学習者の経験から創出されているか (AM_S) という2つの観点から、研究目的として次を提案した。

[研究目的] 教室において真正な数学的活動を実現するために必要な哲学とは何かを
論究すること

その上で、本研究の下位目的を次のように設定した。

[下位目的 1] 教室において真正な数学的活動を実現するための研究に必要な科学的
基盤を明らかにすること

[下位目的 2] 教室において真正な数学的活動を実現するための授業設計ヒューリス

ティックスを開発すること

本章第4節では、上記の2つの目的を果たすための3つの研究方法を示した。

[研究方法 1] 真正な数学的活動を議論するために必要な理論的枠組を定式化する
(第2章～第5章)

[研究方法 2] 定式化された理論的枠組を用いた4つの分析を実施し、授業設計のためのヒューリスティックスを定式化する (第6章)

[研究方法 3] 定式化された理論的枠組と定式化されたヒューリスティックスから、真正な数学的活動を実現するための哲学を論じる (第7章)

研究方法1については、さらに次の2つに分けることができる。

- 先行する哲学的研究の概観 (第1章)
- 本研究に必要な理論的枠組の定式化 (第2章～第5章)

特に、理論的枠組の定式化については、次の4つの観点について定式化を試みる。

[観点 1] 数学的活動に関わる学習観 (第2章)

[観点 2] 個人による数学的活動の本性 (第3章)

[観点 3] 個人による数学的思考の記述モデル (第4章)

[観点 4] 集団による数学的活動の質 (第5章)

本章第5節では、本論文の構成と本研究の目的・方法との対応について整理した。また、本章第6節では、本研究の意義として次の2つを指摘した。

[意義 1] 真正な数学的活動を検討するための科学的基盤の確立に貢献すること。

[意義 2] 耐カリキュラム性教師 (curriculum-proof teacher) が数学の授業を設計するために使用する数学教育理論の1つの形として、数学の授業設計ヒューリスティックスを理論的枠組として示すこと。

以上が、本研究の背景・目的・方法・意義となる。続く第1章では、まずは先行研究の概観から始めることとしよう。

第0章の引用・参考文献

- 阿部好貴 (2008). 「数学的リテラシー育成の方向性に関する一考察」. 『科学教育研究』, 32(4), 406-413.
- Bråting, K., & Pejlare, J. (2015). On the relations between historical epistemology and students' conceptual developments in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 89(2), 251-265.
- Cambridge Dictionaries Online (n.d.-a). Authenticity. Retrieved from <http://dictionary.cambridge.org/dictionary/british/authenticity>
- Confrey, J. (1991). Learning to Listen: A Student's Understanding of Powers of Ten. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 111-138). Springer Netherlands.
- English, L. D. (2010). Promoting student understanding through complex learning. In P. Brosnan, D. B. Erchick, & L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 33-42). Ohio.
- Ernest, P. (1998a). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. SUNY Press.
- Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 133-150.
- 袴田綾斗・寺垣内政一・影山和也 (2015). 「数学者による活動分析：数学科教師教育への示唆を目指して」. 『学習システム研究』, 2, 66-73.
- 平林一栄 (2007). 「数学教育学の居場所 (niche): 新しい認識論の視点から」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, 88, 39-47.
- Inglis, M., & Alcock, L. (2012). Expert and Novice Approaches to Reading Mathematical Proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(4), 358-390.
- 岩崎秀樹・阿部好貴・山口武志 (2008). 「知識基盤社会における数学的リテラシーの課

- 題と展望」. 『科学教育研究』, 32(4), 366-377.
- 岩崎秀樹・大滝孝治・新居広平 (2012). 「数学教育における目的・目標論再考」. 日本数学教育学会誌『数学教育』, 94(11), 26-29.
- Kantowski, M. G. (1977). Processes Involved in Mathematical Problem Solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8(3), 163-180.
- 国立教育政策研究所 (2015). 『平成 27 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 (中学校 数学)』. Retrieved from <http://www.nier.go.jp/15chousa/15kaisetu.htm>
- ラカトシュ I. (1980). 『数学的発見の論理：証明と論駁』 (ウォラル J. & ザハール E. 編, 佐々木力 訳). 共立出版.
- Lampert, M. (1990). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal*, 27(1), 29-63.
- Larsen, S., & Zandieh, M. (2007). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 205-216
- レイヴ, J., & ウェンガー, E. (1993). 『状況に埋め込まれた学習：正統的周辺参加』 (佐伯胖 訳). 産業図書.
- ポリア, G. (1954). 『いかにして問題をとくか』 (柿内賢信 訳). 丸善出版.
- Rowlands, S., Graham, T., & Berry, J. (2011). Problems with Fallibilism as a Philosophy of Mathematics Education. *Science & Education*, 20(7-8), 625-654.
- 佐藤学 (1992). 「「パンドラの箱」を開く＝「授業研究」批判」. 『教育学年報 1 教育研究の現在』 (pp. 63-88). 世織書房.
- Sethole, G. (2005). From the everyday, through the inauthentic, to mathematics: Reflection on the process of teaching from contexts. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 169-175). Melbourne.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.
- 清水美憲 (2012). 「評価問題作成における数学的なプロセスへの焦点化：全国学力・学

- 習状況調査 (中学校数学) の動向と課題」. 日本数学教育学会誌『数学教育』, 94(9), 30-33.
- 清水美憲 (2015). 「数学教育カリキュラムにおける「数学的方法」の位置」. 日本数学教育学会『第3回春期研究大会論文集』 (pp. 173-178).
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Sriraman, B., & Mousoulides, N. (2014). Quasi-empirical Reasoning (Lakatos). In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 511-513). Springer Netherlands.
- Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000a). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 267-306). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Von Glasersfeld, E. (1995b). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. The Flamer Press.
- Weiss, M., Herbst, P., & Chen, C. (2009). Teachers' perspectives on "authentic mathematics" and the two-column proof form. *Educational Studies in Mathematics*, 70(3), 275-293.
- Wilkerson-Jerde, M. H., & Wilensky, U. J. (2011). How do mathematicians learn math?: resources and acts for constructing and understanding mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 78(1), 21-43.

第 1 章

先行研究の概観

本章では、数学教育研究において先行する哲学的研究を概観する。これは、第 2 章から第 5 章にかけて、研究方法 1，すなわち、真正な数学的活動を議論するために必要な理論的枠組の定式化を建設的に実施するための前段階に位置付く。

1 第 1 章の論点

本章では、方法 1 の前段階として、次の 3 点を議論する。

[論点 1] 哲学的研究の役割

[論点 2] 先行研究における哲学

[論点 3] 先行する哲学の援用可能性

まず、第一の論点は、数学教育研究における哲学の必要性である。第 0 章第 2 節では、真正な数学的活動に関する数学教育研究の課題として、数学教育研究コミュニティにおいて真正な数学的活動を建設的に議論し、その研究知見の共有と科学的な累積を実現するための共通基盤を欠いている現状を指摘した。そして、真正な数学的活動に関する科学研究を遂行するための共通基盤を構築するためには、哲学が必要であるとした。しかしなが

ら、具体的に哲学がどのようにしてその共通基盤の構築に貢献し得るのかについては、現状、明確かつ自明な答えが得られているとは言い難い状況である。そこで本章第2節では、まずは一般論として、数学教育研究における哲学の役割を明確化するとともに、その必要性を指摘する。この考察は、真正な数学的活動を議論するための哲学が不明確であるという本研究の課題意識の妥当性を基礎付ける考察となるであろう。

第二の論点は、真正な数学的活動に関する先行研究において、これまでどのような哲学がどのような役割を果たしてきたのか、という点である。第一の論点で明らかにした哲学の役割が、数学教育研究において一般に果たすことが期待される役割であるとしても、数学教育における先行する哲学的研究が、実際にそうした役割を果たしてきたかどうかは、別途、検証が必要な問題である。そこで、第二の論点として、真正な数学的活動を議論するための観点として、とりわけ欠かすことのできない AM_S の観点の基礎となる構成主義研究に焦点を絞り、構成主義研究における哲学的研究の貢献を具体的に示していくこととする。

第三の論点は、そうした先行する哲学的研究のそれぞれと、本研究の目的との整合性である。すなわち、これまでの哲学的研究の中から適切なものを1つ選び出し、それを意識的に援用することで、真正な数学的活動の哲学とすることができるかどうかを議論する。この考察を通じて、本研究の基礎となる哲学は、ラディカル構成主義をその一部として含む必要があるということが指摘されるであろう。

2 哲学の役割

本節では、真正な数学的活動に関する科学的研究を遂行するにあたって哲学が果たす役割について明らかにする。哲学の役割を理解するということは、多かれ少なかれ哲学とは何であるかを理解することを含意するから、本節では、哲学とは何かを紐解く試みとして、哲学辞典(1971c)の「哲学」の頁をめくるところから始めよう。

2.1 哲学対科学

哲学辞典 (1971c) では、哲学と科学を対比することで、哲学とは何かという根源的な問いに答える試みがなされている。哲学と科学をそれぞれ端的に特徴付けるならば、哲学は分裂的性格を有する一方で、科学は統一的性格を有するという。

哲学の理論とその歴史を通じる最大の特色は、哲学が理論的にはいかなる統一ももたず、歴史的には専門領域を順次実証科学にうばわれていくという事実である。この事実は、哲学の学問的意義と社会的存在理由をうたがわせるほど深刻である。

(哲学辞典, 1971c, p. 973)

例えば、世界の成り立ちを知ろうとする哲学は、自然科学として分化していったし、人間の心を理解しようとする哲学は、心理学として分化していった。いずれの場合においても、その専門領域において、哲学が科学に先行して発生したにもかかわらず、哲学の思弁的な論証スタイルと決別する形で、次第に、実証科学がその専門領域において成功を収めるようになっていった。

このような歴史的経緯を模範にするとすれば、哲学というのは、せいぜい前科学としての役割しか持たない、という解釈もなし得る。しかしながら、哲学辞典 (1971c) は、哲学が科学と比較して分裂的傾向を示さざるを得ない理由を、次のように説明する。

科学を支配する統一的傾向は、科学が社会的現実と肯定的に関係することから生じ、哲学を支配する分裂的傾向は、哲学が社会的現実と否定的に関係することから生じるのである。科学は社会的現実の既存のわくから生じる必要に仕えることを任務とし、人類の生活を現存の組織のなかで豊かにすることを目的としている。科学の統一を保証する没価値的性格は、現状のまま社会に仕えること、政府や産業の必要をみたすことを暗黙に意味する。実証科学間の問題帰属や境界設定あるいは変更は、ほとんど現存の社会から発生する具体的必要によって決定されるのである。だからおのおの実証科学は、特殊な部分的問題を直接、あるいは間接に社会のわくから課せられることによって、全体としてはかえって統一的傾向を示しうるのに反し、哲学は専門的問題領域をもたず、現存の社会的現実から部分的問題をあずけら

れるのではなく、この社会的現実を全面的に問題としなければならないために、かえって全体としては分裂的傾向を示さざるを得ないのである。

(哲学辞典, 1971c, p. 974)

すなわち、科学とは、自身の専門的問題領域と非専門的問題領域の間に明確な境界線を設定することによって、その専門的問題領域内における統一的な問題解決能力を獲得する一方で、その境界設定の根拠を現行の社会的価値観に依存することで、その境界設定の妥当性の問題を棚上げにする。一方の哲学は、その境界設定の妥当性を含めて、社会的現実と全面的に向き合う態度を取る学問である。つまり、哲学は、「そもそもそれでいいのか？」という類の問いを発し得る学問である。例えば、学問に対する本来の社会的欲求が、たとえ「安全で倫理的な範囲内で恩恵を受けたい」という形であったとしても、「安全で倫理的な範囲内で」という前提条件は、しばしば暗黙的である。そのため、科学が、社会に対して「恩恵を受けたい」という部分にのみ呼応してしまい、専門的問題領域をそれに特化した形で設定してしまうならば、その科学によってもたらされる成果は、安全性や倫理性を欠いた運用がなされ得る。この状況に対して、アンチテーゼを提出し得るのが、「その科学技術の応用は安全なのか？あるいは、倫理に反しないか？」といった問いを発し得る哲学である。哲学は、このような問いを通じて、完成しつつある科学を破綻に導き得る。それどころか、哲学に対しても「そもそもそれでいいのか？」と疑問を投げ掛け、破綻に導き得るのもまた、他でもない、哲学自身なのである。このように、哲学は、その特性上、科学とは対照的に分裂的傾向を示さざるを得ないのである。

哲学辞典(1971c)は、次のように続ける。

したがって実証科学のなかに哲学にみられるごとき根本的分裂が発生してくるといふ事実は、現存の社会的現実が危機にひんし、科学の問題解決能力が社会的現実から生じるわくを乗り越えはじめていることを物語り、科学が哲学化していくことを意味する。これに反して、哲学が専門的問題に活動を限定し、統一的傾向を示すといふ事実は、哲学が現存の社会的現実から生じるわくのなかに編入されることを物語り、哲学が科学化していくことを意味している。

(哲学辞典, 1971c, p. 974)

つまり、科学が自らの専門的問題領域の境界設定に疑問を持ち始めるとき、そこには哲学が芽生えるし、哲学が自らの専門的問題領域に境界を設定し始めるとき、そこには科学が芽生えるのである。

科学が、科学の殻に閉じこもることは、次の意味で危険性をはらむ。

自己の科学的専門の限界のほかになにが存在するかに盲目であるという理由から、最良の善意は結果においてその正反対に転化しかねないのである。〔中略〕専門的実証科学がかかる状況进行处理するためには、自己の思惟をいっそう深め、いっそう広め、かくして自分自身が哲学にならなければならない。なぜなら哲学こそは、科学の使う根本概念や社会生活の形式や通俗的思考様式や支配的慣習をそのまま承認することを許さず、現存の社会組織がその成員に浸透させる観念や活動に自分を忘れることを許さず、かえってかかる観念や行動の一面性、部分性をあきらかにすることをその任務としているからである。

(哲学辞典, 1971c, p. 975)

この議論を真正な数学的活動論と接続するならば、今、我々は、真正な数学的活動論として哲学が芽生えるべき瞬間に直面していると言えよう。表1に整理した4つの「真正な数学」は、これまで、各々の真正性を目指すために科学化を突き進めてきたかもしれないが、これら4つの真正性が、時として互いに衝突し得るという現実直面した今、真正な数学的活動に関する専門的問題領域の境界設定を問い直すべきときが来ていると言ってよいであろう。科学の枠に留まり続けようとする限り、この根源的反省はなし得ない。

2.2 哲学対思想

哲学辞典(1971c)が、科学との対比の下で「哲学」の意味を論じるのに対して、哲学・思想辞典(1998)は、思想との対比の下で「哲学」の意味を論じる。

哲学を広く〈人生観〉(Lebensanschauung)および〈世界観〉(Weltanschauung)の全般にわたる諸思想の意と解すれば、それが古くから東洋でもインド・中国・日本において仏教・儒教・道教その他の諸思潮となって展開されてきたことは言うまでもない。けれども現代においては、とりわけ西洋哲学に由来する厳格な論理性におい

て追究される、統一的全体的な人生観・世界観の〈理論的基礎〉の知的探究が、哲学の根本性格を成すものと世界各国で考えられていることは、間違いのないところであろう。

したがって、いかに人生観・世界観が広く宗教・芸術・道徳等のうちで表明されるにはしても、やはり哲学は、たんなる宗教的〈信仰〉や、芸術的〈直観〉や、道徳的〈行為〉と異なり、あくまで首尾一貫した〈論理〉的探究の態度によって、できるだけ広く文化・学問・科学・歴史・社会の諸領域をも巻き込みつつ、人間と世界のあり方をその根本から統一的全体的に省みる人生観・世界観の〈理論的基礎〉の知的探究であると言わねばならない。哲学は事柄をその根本から本質的に考察する知的探究をその特色とするのである。

(p. 1119)

また、哲学辞典(1971a)の「思想」の頁には、次のような説明がある。

「思想」という用語は、日本において、とくに第2次世界大戦後の日本において、広く一般に使われているものであるが、皮肉なことに、哲学、思想の用語中もっとも曖昧なものの一つにさえなっている。それは簡単にいうなら、用語の厳密さを欠いたムード的使い方の結果であるとすることができよう

[中略]

日本語の「思想」に対応する英独仏語として、*thought*, *Denken*, *pensée* と *idea*, *Idee*, *idée* との2系列をあげたが、この2系列のそれぞれの内部においてさえ、各国語によってかなりのニュアンスの相違をもっている。しかし、それはさておいても、日本語の「思想」がこの二つの系列の両方にまたがっていることに注意しておく必要がある。すなわち、簡単にいって前者は個人的色彩がつよく、後者は客体化されたものとしての色彩がつよい。日本語の「思想」はこの二つの要素を共に、しかし曖昧に含んでいるところに、便利さと曖昧さがある。

[中略]

「哲学」は事物(自然, 人間, 社会)についての、より論理化され概念化された原理

的な考察であるが、多分に形相的 (フォーマル) に、また抽象的にならざるをえない。これに対して「思想」はもっと素材 (マテリアル) に即し、そこにあるさまざまな問題を思いめぐらすもの (および思いめぐらされたもの) である

(哲学辞典, 1971a, pp. 588-589)

日本語において、「哲学」と「思想」という言葉の境界は曖昧であり、大雑把に言えば、相対的に脱個人化されたものを「哲学」、相対的に個人化されたものを「思想」と呼ぶ傾向にあることが伺える。

一方、英語においては、しばしば相対的に個人的なものに対しても “philosophy” の語をあてるようである。科学と対比される「哲学」が、広大な学問領域の総称として理解し得る用語であるのに対して、この意味での「哲学」は、1つ1つの「哲学」を数えることができるため、学問領域の名辞として扱われる無冠詞の “philosophy” ではなく、可算名詞の “philosophy” である。

ある哲学は、あなたが特定の状況や人生においてどのように振る舞うべきかについて持っている信念でもある

(Cambridge Dictionaries Online, n.d.-f)

日本語においても、「成功の哲学」や「人生の哲学」といった言い回しをする場合は、多くの場合、学問領域としての哲学ではなく、この意味での「哲学」である。すなわち、それは、ある特定の個人が特定の状況でどのように振る舞うかについての、行動原理や行動規範を示している。このように、「哲学」という用語は、「思想」と同じように、相対的に個人的な行動原理や行動規範の総称としても用いられる。

このような個人の思想・哲学は、数学教育研究の文脈においても、しばしば注目される。例えば、平林 (2000, 2007) は、日本の数学教育実践や数学教育学の思想性の希薄さに警鐘を鳴らした。これは、背景に思想・哲学を踏まえていない実践発表・研究発表が、体系的に未整理状態の単なる体験発表に陥る危険性を指摘したものである。また、Thompson (1984) は、事例研究を通じて、数学教師の数学観や数学に関する信念や好み、その教師の指導実践に与える影響を指摘し、序論にて引用した Weiss, Herbst, & Chen (2009) の調査研究も、各数学教師が持つ「真正な数学」に対する捉え方が実践に影響を与え得ること

を示している。もちろん、現実には、思想・哲学と呼べるほど体系的な数学観や数学に関する信念を有している教師ばかりではないかもしれないけれど、Ernest (1994a) は、それらも広く思想・哲学と捉えることで、教師の信念・教科書・カリキュラムなどに潜在する哲学と数学教育の実践との間の繋がりを指摘し、研究領域として、数学教育の哲学が必要であると述べる。

平林 (2007) は、もし数学教育研究が思想・哲学を欠き、実践上の効果を短絡的に狙うようであれば、単なる「応用心理学」に陥ってしまうことを指摘する。これは、数学教育研究の領域固有性が失われることに対して鳴らされた警鐘である。つまり、何が数学教育研究を数学教育研究たらしめるのかという問題である。この問題は、国際的にも長年に渡って議論されてきた問題である (例えば、Sierpiska & Kilpatrick, 1998 や Wittmann, 1995)。

ここで重要なことは、数学の教育過程だからこそ、あるいは、数学の学習過程だからこそ生じ得る現象の分析であったり、数学教育で実施するからこそ価値があると認められる実践的提案であったりしなければ、そうした研究を数学教育研究と呼ぶ必要がないということである。そうした研究は、どのような過程が数学の教育の過程か、あるいは、数学の学習の過程か、その本性をどのように捉えるかについて明確化しなければならない。つまり、数学教育研究が数学教育であるためには、数学という営みをどのように捉えるかについての思想・哲学が必要なのである。

前小節で述べたように、科学と比較したときの哲学の役割は、数学教育の科学的探究に対する根源的反省にある。同様に考えるならば、思想と比較した時の哲学の役割は、思想の脱個人化にあると言えるであろう。

中島 (2001) は、哲学が何であるか述べるのが困難であるとした上で、少なくとも哲学は思想ではないという。そして、次のように述べた。

哲学の大きな特徴は、足元にころがっている単純なこと—そのテーマはおのずから決まってくるのですが—に対して、誰でもどの時代でも真剣に考え抜けば同じ疑問に行き着くという信念のもとに、徹底的な懐疑を遂行することです。思想はこの一つの信念を捨てて、むしろ時間・空間・物体などという膨大な信念を受け容れることである

つまり、この規定に従えば、哲学は、少なくとも膨大な信念を受け入れることではない。中島(2001)のこの捉え方は、上で確認した思想と哲学の意味、すなわち、相対的に個人化されたものと相対的に脱個人化されたもの、という捉え方と整合的であろう。思想が相対的に個人化されたものである以上、その思想の妥当性の基準は、その思想の内部にしか持ち得ない。他の思想と比較して「過激である」という言い回しは成立し得るが、他の思想と比較して「間違っている」と言える性質のものではない。したがって、ある思想家の思想を学ぶということは、その思想家の膨大な信念を無批判に受容することを意味する。対して、哲学は相対的に脱個人化されたものであるから、その哲学の妥当性は、他の哲学と比較しながら議論することができる。これは、ある哲学者の哲学を学ぶということが、他の哲学者の哲学や他ならぬ自分自身の哲学、あるいは、自分自身の経験と比較しながら、その哲学者の信念を批判的に吟味する過程を含み得ることを示唆している。そして、その批判の矛先は、当然、そうした批判的考察を展開する自分自身にへも向けられ得る。

ここに、思想と哲学の決定的違いが見出される。すなわち、思想は原理的に論駁不可能であり、哲学は原理的に論駁可能である。実際には、論駁されない哲学の構築を企図するわけであって、この原理的な論駁可能性とは、簡単に論駁可能であることを意味するわけではない。哲学が原理的に論駁可能であるとは、哲学が万人に対して開かれており、万人がその哲学の論駁を試みる資格を有している、という意味である。そして、この「万人」には、その哲学の提唱者その人自身も含まれている。つまり、哲学は、物事の見方・考え方の決定に影響を持ちながらも、その見方・考え方によって捉えられた物事だけでなく、その見方・考え方それ自身をも議論の対象とし得る自己言及的な性格を有するのである。

だからこそ、哲学は、思想と比較して、脱個人化を志向している、と言える。哲学的な知見が、この世の真理であるのか、あるいは、客観的に共有され得る信念であるのかはわからない。ある哲学は、考察した本人に限って受容される個人的信念に過ぎないかもしれない。しかし、結果的にその哲学が個人的信念に過ぎないものとして終わってしまうとしても、なぜその哲学が個人的信念で終わるといふ未来を迎え得るのかと言えば、それは、哲学が他者による原理的な論駁可能性に開かれているからである。論駁された結果、「その哲学は個人的信念に過ぎない」と決着するのである。実際に大勢の人間に共有されるかどうかはわからないけれど、それでも、大勢の人間が批判可能なように、自分自身の脱個人化を志向する—それが哲学の役割である。

2.3 根源的反省の2つの側面

哲学とは何か—この問いに答えることは困難を極める。しかしながら、ここまで述べてきたように、哲学を科学および思想と対比しながら論じることによって、本節においては、哲学の役割を、少なくとも2つ、明らかにすることができた。第一に、哲学は、科学の専門的問題領域の境界設定に対する根源的反省という役割を担う。第二に、哲学は、自分自身の脱個人化の志向という役割を担う。

先に、哲学の分裂的傾向性を論じたが、哲学は、思想と比較した場合においても、その分裂的傾向性を示す。つまり、哲学は、批判的吟味を経て論駁され得るのである。「数学教育の科学的探究を実施するためには、今改めて真正な数学的活動に関する専門的問題領域の境界設定を問い直すべきである」というとき、この問い直しは、ただ一度限り行われれば十分なものではない。問い直しを経て再設定された境界は、再設定された瞬間、新しい思想として凝固し得る。しかし、重要なことは、その新しい思想的境界を遵守することではなくて、境界が何度再設定されても、その境界を絶えず哲学として根源的に反省し続けることと、そうして反省し続ける際に参照される、自身の哲学それ自体をも、より一層の脱個人化を志向し、より一層の批判的検証にさらしていかなければならない、ということである。

したがって、真正な数学的活動の議論においても、数学という営みをどのように捉えるかについての、脱個人化を志向した絶えざる根源的反省が伴わなければならない。真正な数学的活動論は、今、この視座の下で議論されなければならない。しかしながら、現実の数学教育研究の流れの中で、個別具体の哲学的研究が、その役割をどのように果たしてきたかは明らかではない。そこで次節では、この点に注目して、先行する哲学的研究を概観していこう。

3 先行する哲学的研究

ここまで述べてきたように、一般論として、哲学には、専門的問題領域の境界設定を問い直し、脱個人化を志向する根源的反省としての役割が期待される。しかしながら、現実の数学教育研究の流れの中で、個別具体の哲学的研究が、その役割をどのように果たしてきたかは明らかではない。そこで、本節では、先行する数学教育研究の哲学的領域として、構成主義研究を概観することとしよう。第0章第3節で述べたように、真正な数学的活動を議論する上では、少なくとも AM_5 の観点を欠かすことができない。そのため、この AM_5 の観点の基礎となる構成主義研究が、実際にどのような根源的反省をもたらしてきたか、また、その結果として、どのような新しい専門的問題領域を確立してきたかを明らかにしなければならない。

本節では、構成主義に関わる一連の哲学的研究を、

- 構成主義に至るまで
- ラディカル構成主義
- 社会的構成主義 1 (協定的構成主義)
- 社会的構成主義 2 (Piaget-based social constructivism)
- 社会的構成主義 3 (Vygotsky-based social constructivism)
- 無主義

の6つに区分して検討していく。そして、それぞれの区分において、その哲学が数学教育研究に対してもたらした根源的反省と、新しく示した研究の方向性を示していくこととしよう。

3.1 構成主義に至るまで：ミスコンセプション研究

数学教育研究においては、かつて、構成主義という哲学的立場に基づいた議論が盛んに行われていた (例えば、Confrey & Kazak, 2006 参照)。現在では、素朴なままの構成主義

の議論というのは、必ずしも多くないが、数学教育研究において数学の本性を議論する上で、多大な影響力を与えてきた立場の1つである。

Confrey & Kazak (2006)によれば、構成主義の歴史的ルーツは、次の3つの研究伝統に求めることができる (pp. 306-309).

- 問題解決研究
- ミスコンセプション研究
- Piaget の発生的認識論研究

構成主義が哲学的に成熟した経緯としては、発達心理学者 Piaget の発生的認識論の再解釈に依るところが大きく、第三のルーツの影響が大きいと考えられるけれど、数学教育研究において構成主義が受容された経緯としては、第二のルーツ、ミスコンセプション研究の伝統の影響が大きいと考えられる。そこで、以下では、ミスコンセプション研究の伝統を概観しよう。

数学教育研究において、「コンセプション」(conception)という語は、「概念」(concept)という語と対比的に使用される。これらの使い分けは、Sfard (1991)による説明—コンセプションとは、概念の主観的対応物である (p. 3)—というものが最もわかりやすいであろう。数学的概念の学習過程は、その概念を獲得したか否かという全か無か (all or nothing) の発想で語れるものではない。学習者の実態に鑑みれば、各学習者は、その概念の正確なコピーを頭の中に形成しているというよりは、自らが理解した限りの情報に基づいて概念的な構成物を主観的に頭の中に形成していると考えられる。その主観的構成物が、本来の概念とどの程度よく対応しているかは、各々の学習者次第であり、その意味で「主観的」である。数学教育においては、こうした構成物を、コンセプションと呼んできた。

「コンセプション」をこの意味で用いるとき、ミスコンセプションとは、端的に言えば、誤ったコンセプションである。ミスコンセプションは、学習者の誤りが、ランダムではなく、しばしば系統的であるという事実から注目が始まった (Nesher, 1987 参照)。例えば、小数の大小に関するミスコンセプションとして、 $0.4 < 0.234$ というように、文字列として長い小数の方が大きい小数であると考えてしまうミスコンセプションが知られている (Nesher, 1987, p. 35)。一貫して文字列として長い小数の方が大きい小数として選ばれる傾向にあることから、この現象は、その学習者が単に小数の大小関係を理解していない、

ということでは説明がつかず、小数に関して、誤った概念化をしてしまっている、すなわち、ミスコンセプションを形成していると考えの方が自然である*1。

数学教育研究においては、ミスコンセプション研究が進められる中で、このミスコンセプションが、単なる誤解ではなく、教育上、価値のある誤解であるという認識が生まれた。例えば、今述べた小数の大小に関するミスコンセプションは、その起源が、自然数で成り立っていた事柄の過剰一般化であると考えられる。つまり、自然数においては、文字列として長い数の方が大きい数であるという性質が成り立つので、小数の大小に関してミスコンセプションを抱えている学習者は、その性質を過剰一般化して、小数にまで適用してしまっていることが示唆された (Nesher, 1987, pp. 35-36)。数学的態度としては、既有知識を拡張的に使用する際は、その妥当性を検証してから使用されるべきかもしれないが、学習者が、自らの既有知識がより広い範囲でも成立するかもしれないと期待することそれ自体は、必ずしも悪いことではない。ミスコンセプションというのは、その学習者が、新しく直面した問題的状况を解決しようという試みに過ぎないのである (Confrey, 1987, p. 100)。そういった意味で、誤りを犯したりミスコンセプションを形成したりしながら、正しい理解へと漸近的に接近していくというのが、「学習」の本来の姿なのであって、「これらの誤りを歓迎していこう」(Nesher, 1987, p. 39) という主張がなされるようになった。

しかしながら、この考え方は、必ずしも教育的な問題の直接的な解決をもたらさなかった。特に、ミスコンセプションを克服するための指導法に関する議論においては、ミスコンセプションを正しいコンセプションで置換するように試みる指導が、必ずしも上手く機能しないということが明らかになった (Smith, diSessa, & Roschelle, 1994, pp. 153-154)。また、ミスコンセプションには、一時的にそれを克服したとしても、またすぐに戻ってしまうという「弾性」(resilience) と呼ばれる特性が散見されることも知られている (Confrey, 1987, p. 82; 大滝, 2012, p. 115)。ミスコンセプションの弾性が観察される理由として、学習者が数学や数学的知識に対して暗黙的に有する前提の存在が指摘されているように (大滝, 2012, p. 116)、ミスコンセプションを正しいコンセプションで置換できるという発想は、学習者の頭の中が白紙であるという「タブラ・ラサ」モデルと類似の発想である

*1 ただし、個別の事例について、このような学習者の系統的な誤りが、問題解決上の手続きを単に誤って覚えてしまっているだけなのか、ミスコンセプションとして概念化して獲得してしまっているのかが、研究方法論上、適切に区別可能であるかどうかは、慎重な検討が必要である (Confrey & Lipton, 1985 参照)。

(Smith, diSessa, & Roschelle, 1994, p. 153). そのため、学習者の既有コンセプションがその後の学習に及ぼす影響を、より一層、考慮した検討が必要となった。

以上より、ミスコンセプション研究は、数学教育研究に対して次のような根源的反省をもたらしたと言えよう。

- 数学的概念の学習は、その概念を獲得したか否かという全か無かの発想で捉えられない。
- たとえミスコンセプションであったとしても、教育上、価値のある誤解であることがある。
- ミスコンセプションが正しいコンセプションによって置換できるという発想はタブ・ラサの発想であり、現実的に上手く機能しない発想である。

そして、次の方向性を打ち出したと言える。

- 数学教育研究は、学習者の既有コンセプションがその後の学習に及ぼす影響を検討していく必要がある。

3.2 ラディカル構成主義

ここまでに整理したミスコンセプション研究の帰結は、学習者は学習者なりに合理的に学習しているのだということを積極的に受容する考え方を産み出した。特に、ミスコンセプションというのは、その学習者が、新しく直面した問題的状况を解決しようという試みに過ぎない (Confrey, 1987, p. 100) わけであるから、学習者にとって見れば、それは、「ミス」ではない (Confrey, 1991, p. 121)。実際、数学の歴史的発展が、証明と論駁の絶えざる繰り返しであるというラカトシュ (1980) の可謬主義哲学を踏まえると、どんなに自分が正しいと思った結論でさえ、自分の誤解の上に構築された結論である可能性を常に疑うことができる。この基準を数学教育研究者自身にも課すならば、自分の導いた結論が学習者の導いた結論と異なっていたとしても、学習者の結論の方が正しい結論である可能性を常に疑うことができ、「ミス」コンセプションという表現が成立しなくなる。このような状況において、ただ1つ言えることは、学習者が、何がしかのコンセプションを形成している、ということのみである。この考え方は、数学教育研究において続く構成主義研究に

おける柱となる。

とりわけ、von Glasersfeld (1995b) が提唱するラディカル構成主義 (radical constructivism) は、数学教育研究における構成主義の展開に大きな影響を与えた。ラディカル構成主義とは、Piaget の発生的認識論の再解釈を通じて形成された、人間のあらゆる認識が主観的であるとする、「知ること」に関する 1 つの哲学的アプローチである。Von Glasersfeld 自身の記述で、ラディカル構成主義の原理を最も端的に表したものは、以下のものである^{*2}。

1. 知識とは、受動的に受け取られるものではなく、認識主体によって積極的に構築されるものである。
2. 認識の機能とは適応であり、経験的世界の組織を提供するものであって、存在論的実在の発見を提供するものではない。

(von Glasersfeld, 1989, p. 162)

一般的には、上記の第一原理のみを受容する立場を、素朴な構成主義 (trivial constructivism) と呼び、両方を受容する立場をラディカル構成主義と呼ぶ。

ラディカル構成主義においては、学習者の振る舞いが、すべて環境への適応であると見なされる。そのため、ラディカル構成主義は、知識の客観的な真偽ではなく、知識の生存可能性 (viability) を重視する。ある認識主体にとってある知識が生存可能であるとは、その知識が、その主体がその知識を用いる「目的的文脈や記述的文脈に当てはまる [fit]」(von Glasersfeld, 1995b, p. 14, 括弧内原語) 場合のことである。簡潔に言えば、学習者が、ある状況において、ある知識が役に立ちそうだと思うのであれば、その知識は、その学習者にとってその状況において生存可能である、と評価される。その知識が、真であるか偽であるかということは、問題にならない^{*3}。

生存可能性への着目は、ラディカル構成主義が、知識に関する「道具主義」(von Glasersfeld, 1995b, p. 22) であることを意味する。つまり、「認識を順応の道具 [instrument]、す

^{*2} 同様の整理が、Kilpatrick (1987) や小山 (1989) によってもなされている。

^{*3} ラディカル構成主義に沿って考える限り、数学的知識の真偽に関する問題のような、認識論の標準的な問いに対して、答えを与えることができないだけでなく、そもそもそうした問いを立てることさえできない。こうした特徴は、Noddings (1990) によって、「ポスト認識論」(post-epistemology) であるとして指摘されている。

なわち、我々の経験世界に我々自身を適応させるための道具〔tool〕(p. 14, 括弧内原語)として見なす立場である。

ラディカル構成主義がこのような極端な考えを採用する1つの理由は、効果的な指導法の直接的な探究が必ずしも上手くいかず、まずは、「学習者の数学的な本物感〔reality〕とそれらを変化させる内的メカニズムを理解することに集中する」(Thompson, 2014, p. 98, 括弧内原語)という思いがあるからである。学習者が何らかの意思決定をするにあたって何らかの知識を使用する、という場合、必ずしも、その知識の客観的な妥当性が保証されているとは限らないであろう。たとえ不確かであっても、学習者なりにその知識の使用が効果的であると思えるようであれば、その知識が実際には妥当であろうとなかろうと、その知識は、使用される、と考えられる。新たな問題に直面したときで、しかも、意思決定にかけられる時間があまりないような状況ならば、なおさら、その傾向は強まるであろう。そのように考えることで、ラディカル構成主義は、「観察される者 [= 学習者] に共感する〔empathize〕」(Thompson (2000), p. 298, [] 内筆者・[] 内原語)ことを目指すのである。

ただし、ラディカル構成主義は、絶対的な数学的概念の存在を仮定しないし一方、概念構成の過程には、ある種のパターンが存在するというのもまた仮定する立場である。例えば、Ulrich, Tillema, Hackenberg, & Norton (2014)では、その具体例として、「1つのみの複合ユニットのモデル」(only one composite unit model)と「2つの複合ユニットのモデル」(two composite unit model)について議論している。これは、A～Nの14文字で作ることのできるパスワードの総数(ただし、同じ文字を二度使用してよい)を問う問題に取り組む学習者の思考パターンのモデルとして提案されるものである。前者は、頭の中で14文字の集合を1つしかイメージしていないがゆえに、適切に総数を求めることができない者の思考パターンを表しており、後者は、頭の中で14文字の集合を2つイメージしているがゆえに、適切に14×14によって総数を求めることができる者の思考パターンを表している。

その上で、ラディカル構成主義から数学教育へ提出される示唆として、von Glasersfeld (1989)は、次のように指導(teaching)と訓練(training)を区別する。

理解の生成を目指す教育的手続き(「指導」と)、単に行為の反復を目指す教育的手続き(「訓練」)の間には、根本的な区別があるであろう

(p. 163).

また、von Glasersfeld (1983) は、数学を「指導」するために、教師が、学習者の現在位置と、そこからどのような道筋で概念構成をしていくかを把握することが必要である点を指摘する*4。したがって、学習者のあり得る思考パターンを精査し、それを実践に還元していくことが、ラディカル構成主義に基づいた数学教育研究であると言えるであろう。

以上より、ラディカル構成主義は、次のような根源的反省をもたらしてきたと言える。

- ラカトシュ (1980) の可謬主義的数学観を背景に据えれば、数学といえど絶対的な正しさを保証することができない。つまり、数学教育は、学習者の形成するコンセプトの正否を評価する絶対的な基準を持ち得ない。
- 絶対的な基準を持ち得ないならば、学習者の視点から見れば、学習者が産み出したものは、すべて正統な活動の所産として認められ得る。

そして、次の方向性を打ち出したと言えよう。

- 学習者の数学的思考にはある種のパターンが存在し、そのパターンを考慮することで、学習者のよりよい学びの実現を研究していく必要がある。

しかしながら、どんな学習者の振る舞いも正統なものとして認めていくラディカル構成の考え方は、これまでの数学教育研究において、数々の批判にさらされてきた。主たる批判としては、例えば、次のようなものを挙げることができよう。

1. ラディカル構成主義の支持は、客観的真理の探究を放棄せざるを得なくなり (Kilpatrick, 1987)、教育の原理としては無責任である (Wheeler, 1987)。
2. von Glasersfeld の数学的概念の構成に関する議論においては、個々人の活動が文化的に状況に埋め込まれているということが、暗黙的に仮定されている (Cobb, 1994, p. 16)。
3. ラディカル構成主義の見方は、価値観に関する社会的基礎の確立を困難にしてし

*4 もちろん、これは、1983年の段階での示唆である。ややもすれば、このことは、現代においては常識的な数学教育観であるかもしれないが、それは、30年の時を経てもなお構成主義の影響が強いことを示していると言えよう。

まっている (Ernest, 2010, p. 42).

そこで、数学教育研究においては、上記のようなラディカル構成主義の限界を克服しようとする動きが現れた。特に、上記の3点の批判に対応して、大きく分けて次の3つの立場が現れた。

1. ラディカル構成主義の考え方を踏襲しながら、数学的知識の客観性を確立しようとする考え方
2. 社会・文化的視座との相補性を主張する考え方
3. 社会が個人に先立つという新しい形を提示することで、根本的にラディカル構成主義を放棄する考え方

一般的に、これらは広い意味で社会的構成主義 (social constructivism, あるいは, socio-constructivism) と呼ばれている。次小節では、これらの社会的構成主義を3つに分けて見ていこう。

3.3 社会的構成主義 1 (協定的構成主義)

第一の社会的構成主義は、中原 (1995b) によって提唱された協定的構成主義とも呼ばれる立場である。これは、ラディカル構成主義の知識観を反省し、数学学習における社会の役割の重要性により焦点化しているという意味で、広く社会的構成主義の一種と捉えることができるであろう (中原, 1994 参照)。

数学の知識観に関して、この立場が特徴的な点は、数学的知識の客観性を普遍妥当性と主観独立性の2つに分けて捉える点にある (中原, 1995b, p. 64)。構成したものを協定し、協定してさらに構成する、という数学の歴史的展開を踏まえることで、この立場において、数学とは、主観独立性という意味での客観性を有するとされる (中原, 1995b, pp. 70-74)。例えば、数学史上、平行四辺形という概念が、非ユークリッド幾何が登場する前と後で変化したように、数学的概念は、「時代に依存しており、時を越えた普遍性があるわけではない」 (p. 65)。これは、数学的知識が、普遍妥当性という意味での客観性を備えていないことを意味する。一方、ユークリッド幾何と非ユークリッド幾何で平行四辺形の性質が異なるとは言え、公理系・推論規則・定義をコミュニティ内で明確に協定した上で

ならば、ある数学的対象のある性質が「その公理系における証明か否かの判断は、主観独立的になされることになる」(p. 66)。これは、ある命題が数学的知識であるか否かが、コミュニティの個々人の主観に依存することなく決定可能であるという意味で、数学的知識が客観性を備えていることを意味する。そして、このように数学を捉えることで、中原(1995b)は、ラディカル構成主義の基本原則を尊重しながらも、この主観独立性をもって数学的知識の準客観性を主張する(p. 74)。

要約すれば、中原(1995b)の数学の認識論は、「〔個人的〕構成と〔社会的〕協定という一見対立するものを相補的に位置づけている」(p. 74, 括弧内は筆者による補足)。もしラディカル構成主義の主張する知識構成の主観性を全面的に強調するならば、数学教育が学習者に対して何を提供しようとも、その提供が意味のあるものであるかは結局のところ学習者に依存してしまうという結論にしかなり得ず、数学教育が、教育として一切の責任を持ってないことにもなってしまういかねない。しかしながら、その点、中原(1995b)の協定的構成主義は、個人的構成と社会的協定を相補的に捉えることで、ラディカル構成主義が主張するような、学習が全面的に主観に依存しているという悲観的な仮説を克服し、数学教育の責任の所在を、「授業においては協定に至るまでの場、すなわち、子どもによる数学的知識の構成を可能とする場をいかにして設定するか」(pp. 76-77)という形で明確化した立場であると言えるであろう。

以上より、協定的構成主義は、数学教育研究に対して次のような根源的反省をもたらしたと言える。

- 可謬主義的数学観を背景に据えつつも、客観性の基準を完全に放棄しなければならないわけではない。協定によって、少なくとも暫定的には準客観的な数学の体系を作ることができる。つまり、学習者が産み出したもののうち、協定を経て準客観性を確立したものが、正統な数学的知識である。

そして、次の方向性を打ち出したと言える。

- 数学教育研究は、協定に至るまでの、子どもによる数学的知識の構成の場をいかに設定するかを研究していく必要がある。

3.4 社会的構成主義 2 (Piaget-based social constructivism)

第二の社会的構成主義は、その主たる立場をラディカル構成主義に位置付けながらも、社会・文化的な視座との相補性を主張する立場である(例えば, Cobb, 1994; Yackel & Cobb, 1996). ラディカル構成主義でありながら「社会」に注目し、しかも、個人と社会の相補性を主張するという点で、中原(1995b)の協定的構成主義と似ているようにも思われるが、Cobbらの社会的構成主義と中原の協定的構成主義では、「社会」の捉え方が微妙に異なっている。Cobb(1994)のアプローチの独自性は、ラディカル構成主義を、社会・文化的な視座として、状況論と呼ばれるアプローチと相補的に捉える点にある。この立場は、Piagetの再解釈に基づくラディカル構成主義をその根底に有しているという意味で、Piagetベースの社会的構成主義として、しばしば特徴付けられる(Ernest, 1994b).

数学教育研究において、特に影響力の大きな状況論的な考え方は、レイヴ & ウェンガー(1993)の正統的周辺参加論であろう。正統的周辺参加論とは、「学習を分析的にみる一つの見方であり、学習というものを理解する一つの方法である」(p. 17)。学習は、知識が個人に内化される過程としてではなく、「実践的共同体への参加の度合の増加」(p. 25)として見なされる。正統的周辺参加とは、ある実践的共同体における新参加者が徐々に古参加者へと変容していく過程である。正統的周辺参加論が「学習と意図的教授とを根本的に区別する」(p. 17)という点は、この理論を数学教育へ適用する際に最も強調されるべき点であろう。教育のカリキュラムと学習のカリキュラムは異なるとも言われる(pp. 78-80)。学習者の置かれている状況が、学習者をどのような実践に対する古参加者への変容を促しているのかは、教師が意図的に教えようとしていることとは別の問題である。例えば、教師は数学的概念を教えようとしているのかもしれないが、学習者の置かれている状況によっては、学習者は、教師に褒められる人やテストで良い点を取ることができる人になろうとしているだけかもしれない、数学的概念を柔軟に扱える人になろうとしているわけではないかもしれない、と考えるのである。その意味で、レイヴ & ウェンガー(1993)の書名にもなっているように、学習は状況に埋め込まれている(situated learning)とされる。

この理論では、非正統的周辺参加という状態は存在し得ず(p. 10)、実践的共同体内におけるある個人のアイデンティティが、したがって、全人格がどのように変容するかが問題とされる。この理論に基づけば、数学学習によって構成されるものは数学的対象だけでは

ない。何が構成されるかは、何を教えようとしたかに依存するとは限らないのである。ある授業で教師が教えた数学的対象について、たとえそのときは学習者が構成できなかったとしても、学習者はその授業において何らかのアイデンティティの変容を起こしているのである。このことは、たとえ1回で目標の対象を構成できなかったとしても、繰り返し同様の指導を受ければ、いつかは対象が構成できるようになる、という考え方が楽観的であることを示唆する。

より具体的に、Yackel & Cobb (1996) は、数学の教室コミュニティを取り巻く文化的規範として、社会的規範 (social norm) と社会数学的規範 (sociomathematical norm) の2種類の区別を指摘する。社会的規範とは、授業中に大人しく座って話が聞けるとか、先生に質問されたら積極的に手を挙げるができるとかといった、一般的な優れた学習者像の特徴のことである。一方、社会数学的規範とは、計算を素早く正確にこなすことができるとか、証明を書く際に仮定を明示的に書くことができるとかといった、数学に特有の優れた学習者像の特徴のことである。社会的規範も社会数学的規範も、教師と学習者の相互構成によって形成される数学の教室コミュニティにおける活動の規則性のことである (Cobb, Stephan, McClain, & Gravemeijer, 2001) *5。

社会数学的規範が、「数学的」といいながらも、あくまでも、そのコミュニティにおいて社会的に要請される作法のようなものであるということには注意が必要である。つまり、仮に、ある学習者がこの作法を逸脱しているからといって、そのことが、その学習者が何らかの数学的対象に関してミスコンセプションを有していることを意味するわけではない。例えば、三角形の合同に関する証明を書く際に仮定を明示的に書けない学習者がいたとしても、そのことが、三角形の概念や合同の概念に関してミスコンセプションを有しているというわけではないであろう*6。

*5 明文化されている規範もあれば、不文律としての規範もあるであろうけれど、Piaget ベースの社会的構成主義においては、活動の規則性として経験的に観察されるものを規範と呼ぶようである (Cobb et al., 2001)。つまり、教師が言葉で学習者達に明示的に要請していたとしても、実際に学習者達の行動に反映されていなければ、それは社会的規範や社会数学的規範ではない。

*6 ただし、「証明」概念に関してミスコンセプションを有している、とは言えるかもしれない。「三角形」や「合同」といった概念が、数学という学問が取り扱う対象に関する概念であるとすれば、「証明」という概念は、数学という学問の方法に関する概念である。近年では、「証明」という方法に関する概念は、それが明瞭に定義可能な概念ではないことから、何が証明らしさ (proof-like) で、何が証明らしくなさ (non-proof-like) であるかを文化化 (enculturation) に基づいて学ぶことが最善であろうという指摘がある (Weber, 2014, pp. 12-13)。このことは、数学学習が状況に埋め込まれていなければ、数学の方法に関する学びが成立しないということを示唆しており、数学教育研究において状況論を考慮することの必要性がう

Yackel & Cobb (1996) が指摘するところによれば、このような社会数学的規範は、初めから固定されたものとして教室に存在しているのではない。社会数学的規範とは、学習者達が、教室における教師と相互作用しながら、あるいは、学習者同士で相互作用しながら発展させるものであり、ともすれば、間接的な形で発展させるものである。例えば、Yackel & Cobb (1996) では、ある学習者が正しい答えを述べたにもかかわらず、教師が他の学習者にそれが正しいかどうかと問いかけたがゆえに、答えを述べた学習者が、自分の述べた答えが間違っていたのだと認識してしまった、という事例が紹介されている (p. 468)。これは、教師が直接「間違っている」と指摘したわけではないにもかかわらず、他の生徒に妥当性を問うという教師の振る舞いの意味を、学習者が主体的に解釈し、意味付けた結果として生じた学習である。その学習者の解答の妥当性の基準は、「数学的推論というよりはむしろ、社会的状況に対する彼女の解釈」(p. 468)にある。そして、この事例においては、その後、その学習者は、教師から、何が正しいかに基づいて答えの正しさを判断するよう指導される (pp. 468-469)。授業においては、こうして新しい社会数学的規範が構成されていく。教室環境における数学の質の確立は、教師の振る舞いにかかっているのである (p. 475)。

このような事例が示唆することは、学習者の認識が、状況に埋め込まれているということである。学習者は、常に数学的対象とのみ向き合っただけで学習を進めているとは限らない。その意味で、von Glasersfeld のラディカル構成主義は、数学的対象と理想的に向き合っている状況を暗黙的に仮定してしまっている。ただし、Cobb (1994) によれば、逆もまた然りであり、状況論的な見方は、個人が主体的に環境に適応しようとしていることを仮定してしまっており、そのため、ラディカル構成主義と社会・文化的視座を明確に有する状況論との相補的な見方が必要なのである。特に、Cobb (2007) によれば、ラディカル構成主義も状況論も、どちらも授業や教授実験をデザインするための道具に過ぎず、役に立つときに役に立つ理論を使用することが重要であるという。

以上より、Piaget ベースの社会的構成主義は、次のような根源的反省をもたらしたと言えよう。

- 個々人が自律的につくりあげたもののみが正統な知識となるわけではない。正統な

数学的知識とは、学習者と教師、あるいは、学習者同士の相互作用を経て発展させられる、その教室コミュニティの社会数学的規範に依存している。

- ラディカル構成主義は、学習者の数学的思考のパターンを調査するにあたって、学習者が数学的対象と理想的に向き合っている状況を暗黙的に仮定してしまっている。
- 純粋な状況論は、個人が主体的に環境に適応しようとしていることを暗黙的に仮定してしまっている。

そして、次のような方向性を打ち出したと言えよう。

- ラディカル構成主義も状況論も、それぞれ現実を過度に理想化した暗黙的な仮定を有しているので、授業や教授実験をデザインするための道具として、それらを相補的に併用した研究が必要である。

3.5 社会的構成主義 3 (Vygotsky-based social constructivism)

第三の社会的構成主義は、Ernest (1998a) によって提唱された社会的構成主義である。これは、Piaget の発生的認識論から決別し、完全に Vygotsky の社会・文化的な心理学をその根底に据える哲学的立場である。本研究では、これを Vygotsky ベースの社会的構成主義と呼ぶことにしよう。

Ernest (1998a) の立場は、より具体的に言えば、Wittgenstein の「言語ゲーム」および「生活形式」(forms of life) のアイデアに基づく規約主義 (conventionalism) の一種である。この考え方は、コミュニティにおいて共通の前提や作法といったものが、そのコミュニティの中に、明示的あるいは暗黙的な形で、社会・文化的に埋め込まれていると見なすとともに、その前提や作法が規約となり、数学的知識の客観性が、社会的交渉を経て公的に受容され、保証されるという意味で、確立されるとする考え方である。つまり、「客観性」という言葉の素朴な意味を放棄し、完全に再定義することによって、人間の数学という営みの全体像の説明を試みる。特に、その社会的交渉の過程は、ラカトシュ (1980) によって示された証明と論駁を通じた数学的発見の過程を一般化した形で説明される。

Ernest (1998a) がこのような形で数学的知識の客観性の問題を解消しようとした1つの理由は、伝統的な数理哲学における規範的アプローチの限界と、その後の、記述的アプローチの台頭に関連している。

論理主義、形式主義、直観主義といった数学の絶対主義哲学は、数学の本性についての 規範的説明 を与えようと試みる。そのような説明は、プログラムに従ったものであり、数学の本性についての適切な 記述的説明 を与えることよりもむしろ、数学がどのように理解されるべきかを制定するものである。それゆえ、それらの哲学は、数学がどのようなべきかについてその哲学が有するビジョンを満たすことを期待する中で、ありのままの数学を説明することに失敗している。

(pp. 50-51, 強調原文)

ただし、Ernest (1998a) は、確実な数学の基礎を構築しようとする絶対主義の企てには限界があることを指摘しつつも、可謬主義的な見方が正しいということを決して主張しない。可謬主義と絶対主義との対立は、数理哲学の中心的な論点であると述べるとともに、数学の可謬主義が、絶対主義と並んで、批判的検討と考察のために認められるべきアプローチであると主張する (p. 56)。その上で、Ernest は、数学がどうあるべきかではなく、現にどうであるかを説明するために、社会的構成主義を主張するのである。

Ernest (1998a) の社会的構成主義の核は、個人的知識と社会的知識、あるいは、主観的知識と客観的知識というものを、等しく重み付けしている点にある (p. 241)。そして、学問数学における数学の発展と学校数学における数学の学習が、相互依存的なものとして捉えられる (p. 242)。学問から学校への影響は、学問の領域で生み出され、保証されたテキストは、学校の領域のために、選択され、再文脈化される、という形で現れる (p. 242)。逆に、学校から学問への影響は、次の引用のように語られる。

数学の主観的知識は、学校の文脈において、テキストに表現された客観的知識の内面化され再構成されたバージョンの知識として獲得される。この知識は、潜在的に独特ではあるけれど、それは、他者(最も明白なのは、教師)との会話や個人的相互作用といった手段によって、社会的な期待に適応するように生まれる。学校の領域で生まれ、発達させられ、保証 [certified] された個人的知識は、個々人を伴って伝

わっていく。ただし、ここでいう個々人というのは、どこかの領域(ここでは議論されない他の領域も含む)において様々な方法で、その個人的知識を使用する者達である。学問の文脈において、彼らは、新しい知識を生み出したり、知識に追加されたつもりになっているものに対する批評家として振る舞ったりし得る。学校の文脈において、彼らは、指導の、あるいは評価の会話において、学習者と相互作用する。

(p. 244, 括弧内原語)

このようにして、学問数学(客観的知識構成の場)と学校数学(主観的知識構成の場)は、相互依存的なサイクルを形成しているという。このサイクルは、どこからでも記述することはできる(p. 242)が、決定的に重要なことは、たとえその記述を個人から始めるにしても、その個人に先立って、その個人が所属する社会に、その社会の生活形式に沿って正統化^{*7}された客観的知識が存在するということであり、たとえその記述を社会から始めるにしても、その社会に先立って、その社会において活動する個人が構成し、公表した主観的知識が存在するということである。この見方は、個人と社会の間で一方から他方へ何か伝わるということが無矛盾に説明する数理哲学である。

この点に関連して、Ernest (1994b) は、ラディカル構成主義の上に社会的構成主義を築くのは困難であると主張する(p. 309)。その大きな理由の1つは、個人と社会を相補的に見るということが、個人的領域と社会的領域が分離されているということ、とりわけ、学習者達が共有する生活様式としての基盤の存在可能性を考慮しないことを含意する点にある。

この批判は、協定的構成主義に対しても、Piaget ベースの社会的構成主義に対しても当てはまる。協定的構成主義が示したように、明示的な交渉を経た公理・定義・推論規則と

^{*7} Vygotsky ベースの社会的構成主義を理解するにあたっては、正統化(legitimize)と正当化(justify)を同一視するということが重要であろう。本来、前者は、「何かを適法、あるいは、受容可能にすること」(Cambridge Dictionaries Online, n.d.-c)であり、後者は、「何かに対して良い理由を与えること、あるいは、良い理由となること」(Cambridge Dictionaries Online, n.d.-b)である。社会的構成主義において、「客観的である」ということは、コミュニティにおいて正統性を得ているということである。そして、このことは、同時に、その知識がコミュニティにおいて正当化されていることを意味する。素朴な意味で「客観的である」という言葉を使用する場合は、コミュニティにおいて正統であるか否か、つまり、コミュニティの構成員が承認するか否かとは無関係に、正当な理由が存在する、という意味で用いることもあるかもしれないが、社会的構成主義においては、そのような使い方をしない。

いった規約によって結論が主観独立的に保証されると考えるにしても、Piaget ベースの社会的構成主義が示したように、教室における社会的規範や社会数学的規範が教師と学習者達の相互構成によって形成されると考えるにしても、どちらの見方も、個人から社会へという一方向的な説明のみが試みられている。つまり、社会的知識の起源を個人的知識によって説明しようという方向性を見出すことができるけれど、その逆、社会的知識から個人的知識へという方向性は見出されない。協定的構成主義にしても Piaget ベースの社会的構成主義にしても、いずれにせよ、その根底に Piaget 流の学習観が埋め込まれている限り、社会的知識が個人的知識として内面化していくのではなくて、あくまでも、個人的知識とは個人が個人の力で構成したものがすべてであるから、社会的知識から個人的知識へという説明の方向性はある得ないのである。これでは、社会的知識が再生産され、継承していく過程を説明し得ないため、上述の Ernest (1994b) の批判が台頭することとなるのである。

Lerman (1996) は、ラディカル構成主義それ単体では一貫性を保つことはできるが、Cobb (1994) のようなラディカル構成主義と状況論の相補性を主張する立場は、一貫性を失っていると指摘する。その大きな理由は、個人的知識を個人が個人の力で構成したものとして見なすならば、その構成に社会が影響を与えるかどうかは結局のところ不明であり、社会的状況を説明変数に加える必要がない、という点にある。そのため、Ernest (1998a) の社会的構成主義は、Piaget をその基礎に残していた Ernest (1991) から、修正が施されている (Ernest, 1994b)。これは、数学的知識の発展を、すべて状況論で説明する企てとして理解することができるであろう。この見方であれば、個人の基礎には言語ゲームと生活形式という社会が、社会の基礎には文化的実践の参加者達という個人が存在するという、相互依存的な現実を上手く描写することができる。

したがって、この Vygotsky ベースの社会的構成主義は、数学教育研究に対して次のような根源的反省をもたらしたと言えよう。

- その根底に Piaget 流の学習観が埋め込まれている限り、社会的状況が個人の知識構成に与える影響を捉えることはできない。
- それまでの社会的構成主義では、社会的知識が再生産され、継承していく過程を説明し得ない。

その上で、次のような方向性を打ち出したと言える。

- 個人の基礎には言語ゲームと生活形式という社会が、社会の基礎には文化的実践の参加者達という個人が存在するという、相互依存的な現実を記述するという方向性を指し示した。

3.6 無主義 (No-ism)

無主義 (No-ism) とは、Goldin (2014) によって示された、数学教育研究において多様な「主義」が存在することに対する批判である。Goldin は、これまでも再三に渡って、種々の構成主義がイデオロギー的に偏向している旨を指摘してきた (例えば、Goldin, 1990, 2001, 2003, 2014)。Goldin (2014) の主張は、端的に言えば、経験的事実を分析するにあたって、ラディカル構成主義や社会的構成主義といった「主義」は不要であるどころか、その分析の可能性を制限してしまいかねないというものである。

ここまで概観してきたように、数学教育研究における多様な「主義」は、素朴な意味での「客観的真理」の追究可能性を放棄し、しばしば、社会的協定によって「客観性」を再定義する。Goldin (2003) は、そのような立場は、超相対主義 (ultrarelativism) であるとして意義を唱える。特に、超相対主義が反証不可能である点に批判的である。

〔超相対主義〕は、(科学的主張と異なり) ア・プリアリな断言であって、証拠や推論によって反証不可能である。それらは、自然の過程の予測や制御を達成する際の科学の力に対して 説明的ではない。それらは、生徒達や研究者達に対して、「真理」や「妥当性」の意味について、科学者達が理解しているのと同じようには示さない。そのような「超相対主義者」の哲学的立場の反証不可能性は、究極的には、それらに対する「合理的」異論を棄却することに依存している。それは、合理性それ自身を、単に、ある任意な社会的に構成されたディスコースの体系と見なすことによつてなされている。

(p. 182, [] 内筆者・強調原文)

つまり、超相対主義は、その支持者達によって正しいと信じ込まれている哲学的前提を有しており、かつ、社会的に協定された判断であれば、それは妥当性を有する、と見なす

ことで、自分達の前提を妥当なものに見なしてしまっている、というのである*8。

Goldin (2003) が、ラディカル構成主義や社会的構成主義を単に「相対主義」(relativism) と呼ばず、「超相対主義」と呼ぶのは、ある意味で、Goldin (2003) 自身が「相対主義」だからであると考えられる。実際、Goldin (2003) は、科学的真理の相対性のある意味で認識している。少し長いですが、重要な部分なので、以下に引用しよう。

[科学的方法] は、「絶対的真理」と「確実な知識」の主張を導かない—実際、ある重要な意味において、科学的真理は、本質的に暫定的で、常に近似的である。何より、科学的理論と科学的理論から導かれる諸仮説は、原理的かつ実践的に、反証可能である。しかし、科学的方法は、客観性・予測の妥当性・検証可能性・応用可能性の領域・経験的真理について、保証された主張と、まさに関係している。科学の実践は、ある「現実世界」について、(証拠・実験・合理的推論に基づいて)保証された結論に到達することに関係している。その「現実世界」とは、人間の存在に先行し、部分的に理解されたり不完全に理解されたりしている物理的構造・化学的構造・生物学的構造から構成され、部分的に理解されたり不完全に理解されたりしている物理的法則に沿って機能しているものである。

それゆえ、我々は、例えば、古典的ニュートン力学のような、より初期の理論が、低速で移動する巨視的物体の観察結果に対する定量的に良い説明を、どのようにして与えるのかを理解することができる—古典的ニュートン力学は、(客観的に)相対的で、量子力学的な我々の宇宙において「偽」であるということが、20世紀初頭以降、知られている力学である。その理論は、ある特定の観察領域において、妥当な精密近似のままである。

(p. 180, [] 内筆者・強調原文)

上の引用が示すように、Goldin (2003) は、人間の存在に先行する何らかの「世界」の存

*8 近年の数学教育研究においては、各々の研究が多かれ少なかれイデオロギーに依存しているということは、Goldin (2003) によって超相対主義と呼ばれる立場の研究者の間でも、しばしば議論になるところである(例えば、Cobb, 2007; JRME Equity Special Issue Editorial Panel, 2013; Martin, Gholson, & Leonard, 2010)。そのため、これは極めて的を射た批判であると言えよう。ただし、超相対主義と呼ばれる研究者の間では、必ずしもこの批判が問題とはなっていない。おそらく、その理由は至極単純で、超相対主義者達にとっては、Goldin (2003) の立場さえ、唯一絶対の立場ではなく、数あるイデオロギーの1つに過ぎないからであろう。超相対主義者達は、異なるイデオロギーの下で異なる理論が成立することを問題視しないため、Goldin (2003) が自分達と異なる立場であることも問題視しないものと考えられる。

在を明確に仮定し、科学理論を、適用範囲が明確に制限された近似的に真な知の体系、として捉えている。そして、その上で、科学的方法・科学的実践によって、そのような知の体系の産出が可能であると考えている。

Goldin (2003) のこの科学観は、その数学観とも極めて類比的である。Goldin (2003) は、ある命題が真であることと証明可能であることの区別を強調しながら、次のように述べる。

数学的知識は、公理系に相対的な定理の客観的真理を基本的に一部として含んでいる。ここで私は、「客観的」という語を、一度用語と記号が定義され、公理と推論規則が同意されたならば、よく述べられた予想の正しさは、(それらが事実として定理であるかどうか、あるいは、偽であるかどうか、はたまた、決定し得ないかどうかにかかわらず) 論理的な意味で 確立されている というアイデアを表現するために用いている。それはもはや、個人的好みや個人の解釈、社会的規約、交渉、あるいは、主観的コンセプションの問題ではない。

(p. 187, 強調原文)

この見解は、まったくもってして健全な数学観であると考えられるし、完全に正しい。数学を厳密に展開するための道具立てがすべて揃ったあとであるならば、ある言明の真偽(あるいは、その決定不可能性)が個人や社会の好みや慣習によって左右されるということはありません。

しかし、その一方で、Goldin (2003) は、次のようにも述べている。

数学教育において、代替的コンセプションと ミスコンセプションを区別することは本質的である。前者の用語は、その生徒が非標準的な規約を暗黙的に採用したり、教師によって期待される前提とは異なる前提に結論を(妥当に)位置付けたり、教師によって期待されるパターンとは異なる数学的なパターンを記述したり、ある数学的結論に到達するための非標準的な方法を(妥当に)使用したり、あるいは、教師によって期待されたり教科書によって記述されたりする直観(概念的またはイメージ的な表象)とは異なる直観をその状況に位置付けたりする状況を、適切に指示し得る。そのコンセプションは、数学的に妥当であり得るが、いくつかの点で期待さ

れるコンセプションではない—それは、たとえそれが交渉された数学的な前提や規約の文脈において「生存可能」でないとしても、誠実な代替物である。後者の用語は、生徒が論理的誤りを犯したり、内的に不整合な規約を採用したり、(それが真であり得なくなるように)あるパターンのある性質を誤って知覚したり、数学的関係を非妥当に表象したり、あるいは、数学的結論に到達するための正しくなかったり、論理的に不適切であったり、応用不可能な方法を用いたりする状況を指示する—それは、そのコンセプションがその個人にとって心理的に「生存可能」である場合でさえ、そうである。

(pp. 187-188)

ここで注目したいことは、Goldin (2003) による「生存可能」という用語の使用である。Goldin (2003) の主張は、数学的な真偽と個人的な生存可能性の有無は、独立の問題である、という点にある。これまでの数学教育研究の中には、ともすれば、言明の真偽と生存可能性を混同して議論を進めてきた研究もあるのかもしれない。そうであるからこそ、Goldin (2003) のような批判論文が存在する。しかしながら、奇しくも Goldin (2003) が正しく指摘するように、言明の真偽とその生存可能性は、まったく無関係の問題である。

したがって、Goldin (2003, 2014) の無主義は、(筆者以外に Goldin の研究をこのように評価する見解は、寡聞にして知らないが) 数学教育研究に対して次のような根源的反省をもたらしたと考えることができる。

- 数学的な言明の真偽 (あるいは、その決定不可能性) と個人的な生存可能性は独立の問題である。すなわち、数学的に真である知識が生存不可能であったり、数学的に偽である知識が生存可能であったり、様々な可能性があり得る。

しかしながら、そうであるからこそ、Goldin (2003) によるラディカル構成主義に対する批判は、これまた逆説的ではあるが、意味をなさない。数学的な真偽と生存可能性は別の問題であるから、数学的な真偽が客観的に決まっていると考えることと、個人の知識の生存可能性を数学教育の研究対象として取り扱うことは、一切矛盾しない。我々は、Goldin (2003) の提唱する健全な数学観を維持したまま、構成主義の哲学を採用することができる。構成主義を名乗る一部の研究が、仮に Goldin (2003) の数学観と対立するよう

な主張をしていたとしても、それは、構成主義の本来の問題ではない。なぜなら、構成主義の採用する仮定には、Goldin (2003) の数学観を否定する力も肯定する力もないからである。数学の用語を用いて比喩的に述べるとすれば、構成主義の公理系において、Goldin (2003) の数学観は真偽決定不能である。

4 先行する哲学的研究の援用可能性

ここまで真正な数学的活動を実現するための哲学を模索し、先行する哲学的研究として AM_S の観点の基礎となる構成主義研究を概観してきた。本節では、前節で取り上げた各哲学が本研究の目的に沿うものであるかどうか吟味していこう。

まず、ミスコンセプション研究は、「タブラ・ラサ」モデルを否定し、数学教育の研究者が「学習者なりの考え方」の存在を明確に認識する契機となった研究であったと言える。この意味で、 AM_S の観点での真正性を考えるにあたっては、ミスコンセプション研究が示す哲学というのは、最低限考慮されなければならない。

次に、ラディカル構成主義研究は、ミスコンセプション研究よりも一層 AM_S の観点を明確に打ち出す哲学である。ミスコンセプション研究が、「ミス」の基準を標準的な数学の体系に求めたことは、その状況における標準的な数学の体系の優位性を暗黙的に仮定しており、一貫して AM_S の観点を貫く哲学とは言い難い。一方、ラディカル構成主義が、標準的な数学の体系の優位性さえ積極的に疑いの対象と見なすことで、学習者の生み出した数学をすべて正統な数学であると見なしたことは、学習者のあらゆる活動の所産を、徹底して AM_S の観点から解釈するような姿勢であると捉えることができる。

本研究の目的にとって、この徹底した姿勢は必要不可欠である。数学教育を通じて学習者に学んで欲しい数学的知識には、数学的定理・数学的方法・数学的な考え方・数学的価値など、数学に関連した多様な内容が含まれる。こうした目標に対して、これらの内容を、形式的にでも良いから、できる限り多くのことを学習者に指導すべきだと考える見方（例えば、 AM_D の観点）もあれば、そういった形式的な学習に時間を費やすくらいであれば、有意味な形で、できる限り多くのことを学習者に指導するために時間を費やすべきだ

と考える見方(これが AM_S の観点に相当する)もあるであろう。現実的な指導実践としては、今挙げた両極端のどちらか一方に振り切った見方ができる場合ばかりではないであろうけれど、そういう実践的な折り合いをつけるための哲学(今挙げなかった AM_P や AM_W を含め、4つの真正性についてどのように折り合いをつけるかを考える哲学)というのは、一段階高い水準で要求される哲学なのであって、今、この水準において議論すべき哲学ではない。そうした一段階高い水準の議論を行うためには、その議論の基盤となる情報が中途半端なものとならないように、まずは、徹底して AM_S の観点が追究可能な哲学を準備しなければならない。そういう意味で、 AM_S の観点を追究するためには、ミスコンセプション研究の哲学に留まらず、ラディカル構成主義の哲学まで徹底化することが必要であると言える。

このラディカル構成主義の哲学を基盤として考えたとき、協定的構成主義は、ラディカル構成主義の欠点を補うために、その主たる視点を社会的合意に移行してしまったという点で、 AM_S の観点を追究には適さない。合意に至れないなら至れないで、個々人がどのように考えていたがゆえに合意に至れなかったのか、合意に至れたとしたら至れたで、個々人がどのように考えていたがゆえに合意に至れたのか(学習者全員が細部にまで渡って同じ理由で同じ結論を支持しているとは限らない)を追究するのが AM_S の考え方だからである。協定的構成主義においては、個人の認識の問題から、集団での合意の問題へと議論が移行する際に、「社会」という要素が現れる。これは、「個人」と「社会」という2つの要素によって数学教育の現象を説明しようとする一種の二元論である。 AM_S の観点を追究するにあたっては、徹底的に個人がどう世界を見ているかの理解に努めなければならないから、「個人」一元論でなければならない。

Piaget ベースの社会的構成主義は、協定的構成主義と同様にラディカル構成主義を基盤としているが、ラディカル構成主義の欠点を補うために、状況論を相補的に捉えてしまったという点で、 AM_S の観点を追究には適さない。数学教育研究として、あるいは、授業実践をデザインするための道具として、教室を支配する社会的規範や社会数学的規範を調査することに意義があるとしても、その教室にいるすべての学習者が、その教室を支配する社会的規範や社会数学的規範として単一かつ同一の規範の存在を認識しているとは限らない。例えば、同じ教室内に、初見の定理は証明しないと気が済まない学習者と、とにかくその定理の用途さえわかれば十分だと思う学習者が、両方存在するかもしれない。ある

いは、別の例を挙げれば、ある教室には、学習者によって、価値付けに差が出るような規範(ある学習者にとっては重要であるが、別のある学習者にとっては重要でないような規範)があるかもしれない。例えば、数学の理解の仕方1つとっても、ある学習者は直観的に納得することが重要だと考え、また別の学習者は形式的に隙のない論証で納得できれば、直観的な不思議さは不問に付すかもしれない。これらの可能性は、現実的に想像に難くない状況である。もちろん、多かれ少なかれ状況論の影響を受けた数学教育研究が明らかにした最大の成果は、数学の学習過程が、研究の初期段階に想定されていたよりもずっと、社会・文化的なバイアスが大きくかかっている過程であるということであり、それはそれで有益な物の見方を提供してきたと考えられる。しかしながら、ある教室内にいる2人の学習者達にとって、その教室内の社会や文化が同じものに見えている保証はどこにもなく、状況論の仮定をそのままラディカル構成主義と併用することは、AM_Sの観点を追究するには、いささか強すぎる制約であると言える。これもまた、「個人」と「社会」を二元論で捉えていることによって生じる問題である。

Vygotsky ベースの社会的構成主義も、「個人」と「社会」の二元論であるという点で、本研究の目的には沿わない。Vygotsky ベースの社会的構成主義は、個人と社会が相互依存的な循環をなしていると見なすことから、どちらか一方の要素にすべてを還元することができない。確かに包括的な哲学としては、個人が獲得する言語というものに、そもそも社会の影響が介在していると捉える方が、より現実に忠実な記述的哲学なのかもしれない。しかしながら、そうした記述は、数学教育を取り巻く個人と社会が織りなすシステムを、その外側から俯瞰した際に描き出される記述であり、学習者が感じている本物感、すなわち、AM_Sの観点から、数学の学習を描き出した記述ではないのである。

最後に、無主義は、数学者が持ち得るような数学観であるという意味で、最も健全な哲学であり、数学教育研究において欠かすことのできない立場である。しかしながら、それは、数学に従事する者が、十分な専門的教育を積み重ねた専門家であるがゆえに成立し得る数学観である。AM_Sの観点を追究するにあたっては、まだ何が健全な数学であるかを学んでいる途中の学習者にでさえ適用可能な数学観でなければならず、無主義が主張する数学観を最終到達点として、そうした数学観ができあがるまでの「数学」を捉える哲学でなければならない。そのため、本研究においては、無主義の哲学をそのまま採用することはできない。むしろ、この立場は、数学教育において学習者に獲得させるべき数学観の1

つとして、つまり、数学教育における一種の目標として、捉えることが適切であると考えられる。そういう意味で、さしあたって AM_S の観点を議論する上で必要な哲学ではない、と言えよう。

以上より、ここまでの検討で指摘できることは、本研究の目的に適う哲学が、その必要条件として、ラディカル構成主義をその基礎に含まなければならない、ということである。ここで取り上げた3つの社会的構成主義は、それぞれの関心に合わせてラディカル構成主義の不備を同定し、新しい価値のある哲学を提供した。それらは、それまでの哲学的研究に埋め込まれていた何らかの暗黙的な限界を炙り出し、根源的反省を通じて、新しい方向性を示してきた。つまり、これらの根源的反省は、専門的問題領域の境界設定を問い直してきたと言えよう。しかしながら、それらはいずれも、「個人」と「社会」の二元論を採用してしまっており、 AM_S の観点からの議論を下支えする哲学として適切ではない。そのため、我々は、本研究において、ラディカル構成主義をその基礎とすべきである。

もちろん、ラディカル構成主義を基礎に据えさえすれば、本研究の目的にとってそれで十分なのか、と言え、それは検証が必要な問題である。単にラディカル構成主義を援用するだけでなく、積極的により詳細な科学的基盤の開発を試みることには、数学教育研究として価値があるであろう。1つの研究で十分な基盤の開発を試みることは困難であるが、できるだけ精緻に、必要な基盤の開発は目指されて然るべきであろう。そこで、次章以降では、本章での議論を踏まえて、第0章第4節で示した研究方法1に着手する。

5 第1章のまとめ

本章では、真正な数学的活動を捉えるための理論的枠組を定式化するという本研究の下位目的1を達成する第一段階として、真正な数学的活動に関連する先行研究の中から、特に哲学的な研究を取り上げ、概観した。

まず、第2節では、哲学と科学、および、哲学と思想をそれぞれ対比することを通じて、哲学の役割を同定するための考察を行った。その結果、専門的問題領域の境界設定を問い直し、脱個人化を志向する根源的反省という哲学の役割を同定し、真正な数学的活動の議

論においても、数学という営みをどのように捉えるかについての、脱個人化を志向した絶えざる根源的反省が必要であるということを指摘した。

次に、第3節では、真正な数学的活動の議論に関連する哲学的研究として、特に AM_S の観点の基礎となる構成主義研究において、数学という営みをどのように捉えるかについて、どのような根源的反省がもたらされてきたか、また、その反省に基づいて、どのような研究の方向性が提示されてきたかを整理した。そこでは、

- ミスコンセプション研究
- ラディカル構成主義
- 社会的構成主義 1 (協定的構成主義)
- 社会的構成主義 2 (Piaget ベースの社会的構成主義)
- 社会的構成主義 3 (Vygotsky ベースの社会的構成主義)
- 無主義

の6つに区分して概観した。

最後に、第4節では、上記の6つの哲学が、それぞれ本研究の目的に沿うかどうかを検討した。結果として、ミスコンセプション研究の哲学、および、それをさらに徹底したラディカル構成主義の哲学が、本研究の目的に沿う哲学の必要条件であることを示し、ラディカル構成主義が本研究の基礎となるべき哲学であることを指摘した。ラディカル構成主義の特徴を今一度まとめるとすれば、ラディカル構成主義とは、

- 学習者が産み出したものは、学習者の視点から見れば、すべて正統な活動の所産であると見なし得る

と仮定することで、数学教育研究者が、

- 学習者が何に本物感を見出しているのか

を推定することを支援する哲学である。

また、他の哲学については、いずれも本研究にとって適切な哲学ではないことを合わせて指摘した。具体的には、3つの社会的構成主義はいずれも、ラディカル構成主義が成し得なかったことを達成しようとする価値のある哲学ではあるけれど、それらは、少なくとも

も本研究の目的の下では、過剰な制約として働く可能性が指摘された。そして、無主義については、プロの数学者による数学的活動を説明するにあたっては、健全な数学観を提供する哲学ではあるけれど、初学者による数学的活動を説明するにあたっては、必ずしも十分とは言えないことが指摘された。

このように、本節においては、ラディカル構成主義の必要性が指摘されたが、この哲学が AM_5 の観点を追究するにあたって十分に有用な哲学であるかについては、まだ議論の余地がある。この点については、ラディカル構成主義に特に焦点を当て、より精緻に、ラディカル構成主義の役割と限界を明確化することによって、初めて議論することが可能となるであろう。

これまでの数学教育研究においては、哲学を、より正確に、かつ、より一貫した方法で使用するために、しばしばそうした哲学を「理論的枠組」として定式化する試みがなされてきた。次章以降では、ラディカル構成主義の役割をより精緻に明確化するために、ラディカル構成主義における哲学的用語が、観察される事象を分析するための理論的枠組として機能するように、定式化していこう。

第1章の引用・参考文献

- Cambridge Dictionaries Online (n.d.-b). Justify. Retrieved from <http://dictionary.cambridge.org/dictionary/english/justify>
- Cambridge Dictionaries Online (n.d.-c). Legitimize. Retrieved from <http://dictionary.cambridge.org/dictionary/english/legitimize>
- Cambridge Dictionaries Online (n.d.-f). Philosophy. Retrieved from <http://dictionary.cambridge.org/dictionary/english/philosophy>
- Cobb, P. (1994). Where Is the Mind? Constructivist and Sociocultural Perspectives on Mathematical Development. *Educational Researcher*, 23(7), 13-20.
- Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work: Coping with multiple theoretical perspective. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of*

- the National Council of Teachers of Mathematics*(Vol. 1, pp. 3-38). Information Age Publishing.
- Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in Classroom Mathematical Practices. *Journal of the Learning Sciences*, 10(1-2), 113-163.
- Confrey, J. (1987). "Misconceptions" across Subject Matters : Science, Mathematics and Programming. In J. D. Novak (Ed.), *Proceedings of The Second International Seminar: Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics* (Vol. 1, pp. 80-106). New York.
- Confrey, J. (1991). Learning to Listen: A Student' s Understanding of Powers of Ten. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 111-138). Springer Netherlands.
- Confrey, J., & Kazak, S. (2006). A thirty-year reflection on constructivism in mathematics education in PME. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 305-345). Rotterdam: Sense Publishers.
- Confrey, J., & Lipton, A. (1985). Misconceptions Research and the Clinical Interview. In S. K. Damarin & M. Shelton (Eds.), *Proceedings of the Seventh Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 38-43). Ohio.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Falmer Press.
- Ernest, P. (1994a). Introduction. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics, Education, and Philosophy: An International Perspective* (pp. 1-8). Psychology Press.
- Ernest, P. (1994b). What is social constructivism in the psychology of mathematics education? In J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. II, pp. 304-311). Lisbon.
- Ernest, P. (1998a). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. SUNY Press.
- Ernest, P. (2010). Reflections on theories of learning. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education* (pp. 39-47). Springer.

- Goldin, G. A. (1990). Epistemology, constructivism, and discovery learning in mathematics. In R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics (Journal for Research in Mathematics Education. Monograph Vol. 4)* (pp. 31-47). National Council of Teachers of Mathematics.
- Goldin, G. A. (2001). Counting on the metaphorical. *Nature*, 413, 18-19.
- Goldin, G. A. (2003). Developing complex understandings: On the relation of mathematics education research to mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 54(2-3), 171-202.
- Goldin, G. A. (2014). A Fine Conceptual Analysis Needs No “Ism.” *Constructivist Foundations*, 9(3), 376-377.
- 平林一栄 (2000). 「数学教育における構成主義の素性——とくに急進的構成主義について」. 『近畿数学教育学会会誌』, 13, 46-61.
- 平林一栄 (2007). 「数学教育学の居場所 (niche): 新しい認識論の視点から」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, 88, 39-47.
- JRME Equity Special Issue Editorial Panel (2013). Positioning Oneself in Mathematics Education Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(1), 11-22.
- Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics education. In J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-27). Montreal, Canada.
- 小山正孝 (1989). 「数学教育における構成主義の哲学的及び認識論的側面について」. 日本数学教育学会『数学教育論文発表会論文集』, 22, 257-262.
- ラカトシュ I. (1980). 『数学的発見の論理：証明と論駁』(ウォラル J. & ザハール E. 編, 佐々木力 訳). 共立出版.
- レイヴ, J., & ウェンガー, E. (1993). 『状況に埋め込まれた学習：正統的周辺参加』(佐伯胖 訳). 産業図書.
- Lerman, S. (1996). Intersubjectivity in mathematics learning: A challenge to the radical constructivist paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 133-150.

- Martin, D. B., Gholson, M. L., & Leonard, J. (2010). Mathematics as gatekeeper: Power and privilege in the production of knowledge. *Journal of Urban Mathematics Education*, 3(2), 12-24.
- 中原忠男 (1994). 「数学教育における構成主義の展開：急進的構成主義から社会的構成主義へ」. 日本数学教育学会誌『数学教育』, 76(11), 302-311.
- 中原忠男 (1995b). 『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』. 聖文社.
- 中島義道 (2001). 『哲学の教科書』. 講談社.
- Nesher, P. (1987). Towards an instructional theory: the role of student's misconceptions. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 33-40.
- Noddings, N. (1990). Constructivism in mathematics education. In R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics (Journal for Research in Mathematics Education. Monograph Vol. 4)* (pp. 7-18). National Council of Teachers of Mathematics.
- 大滝孝治 (2012). 「数学的ミスコンセプションの弾性に関する一考察：〈小数の法則〉に焦点をあてて」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 18(2), 115-121.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.
- Sierpinska, A., & Kilpatrick, J. (1998). Continuing the Search. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 527-548). Springer Netherlands.
- Smith, J. P., diSessa, A. A., & Roschelle, J. (1994). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences*, 3(2), 115-163.
- 哲学辞典 (1971a). 「思想」. 『哲学辞典』 (pp. 588-589). 平凡社.
- 哲学辞典 (1971c). 「哲学」. 『哲学辞典』 (pp. 973-976). 平凡社.
- 哲学・思想辞典 (1998). 「哲学」. 廣松渉・子安宣邦・三島憲一・宮本久雄・佐々木力・野家啓一・末木文美士 (編), 『哲学・思想辞典』 (pp. 1119-1120). 岩波書店.
- Thompson, A. G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and

- mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15(2), 105-127.
- Thompson, P. W. (2000). Radical Constructivism: Reflections and Directions. In L. P. Steffe & P. W. Thompson (Eds.), *Radical Constructivism in action: Building on the Pioneering Work of Ernst von Glasersfeld* (pp. 291-315). Routledge.
- Thompson, P. W. (2014). Constructivism in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 96-102). Springer Netherlands.
- Ulrich, C., Tillema, E. S., Hackenberg, A. J., & Norton, A. (2014). Constructivist Model Building: Empirical Examples From Mathematics Education. *Constructivist Foundations*, 9(3), 328-339.
- Von Glasersfeld, E. (1983). Learning as constructive activity. In J. C. Bergeron & N. Herscovics (Eds.), *Proceedings of the 5th Annual Meeting of the North American Group of Psychology in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 41-101). Montreal, Canada.
- Von Glasersfeld, E. (1989). Constructivism in Education. In T. Husén & T. N. Postlethwaite (Eds.), *The International Encyclopedia of Education: Research and Studies. Supplementary volume* (pp. 162-163). Pergamon Press.
- Von Glasersfeld, E. (1995b). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. The Flamer Press.
- Weber, K. (2014). What is a proof? A linguistic answer to an educational question. *Proceedings of the 17th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1-13.
- Weiss, M., Herbst, P., & Chen, C. (2009). Teachers' perspectives on "authentic mathematics" and the two-column proof form. *Educational Studies in Mathematics*, 70(3), 275-293.
- Wheeler, D. (1987). The world of mathematics: Dream, myth or reality? In J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 55-66). Montreal, Canada.
- Wittmann, E. C. (1995). Mathematics education as a "design science." *Educational Studies*

in Mathematics, 29(4), 355-374.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.

第 2 章

数学的活動に関わる学習観

本章では、第 1 章での議論を踏まえて、本研究における研究方法 1，すなわち、真正な数学的活動を議論するために必要な理論的枠組の定式化に取り組む。特に本章では、研究方法 1 の第一の着眼点として、真正な数学的活動を議論する際に有用な学習観を理論的枠組として定式化することを試みる。

1 第 2 章の論点

前章では、ラディカル構成主義を、他の哲学的研究と比較するために必要な範囲において概観し、本研究におけるラディカル構成主義の必要性を論じた。しかしながら、本章において、ラディカル構成主義に加えて、さらに何が必要であるかを議論するにあたっては、次に挙げる 2 つの理由により、ラディカル構成主義の中心的概念をより精緻に取り上げるとともに、ラディカル構成主義という哲学に含まれる学習観を、理論的枠組として定式化する必要があるであろう。

その第一の理由は、ラディカル構成主義の中心的概念が、定式化されていない素朴なままでは、必ずしもその取り扱いが容易ではない点にある。ここまでに述べたように、ラディカル構成主義は、数学教育研究の歴史上、様々な批判を浴びてきた哲学であるが、そ

うした批判は、ある意味で、ラディカル構成主義の中心的概念の理解しにくさが背景にあったとも言えよう。換言すれば、現在までのところ、ラディカル構成主義はあくまでも哲学に過ぎなかった、ということなのかもしれない。哲学というものが、個人の世界の解釈の仕方に直接的な影響を及ぼすものであるとすれば、解釈に一貫性を保つため、ある個人が複数の哲学を同時に保持するということは相当に困難である。ラディカル構成主義は、それまで常識的に考えられてきた数学の真理観を、ある意味で放棄するという点で過激であるから、ある個人がラディカル構成主義に出会ったからといって、その個人がそれまで持っていた哲学を放棄し、ラディカル構成主義に乗り換えるということが、そう簡単に起こるものであるとは考え難い。しかし、ここで一步引いて、哲学を、個人の世界の解釈の仕方に影響を及ぼすものではなく、世界の解釈の仕方を一貫させるための道具であると捉えよう。心の底からラディカル構成主義を自身の数学教育の哲学として据えることに対しては、当然、抵抗感があるであろうし、あって然るべきであるが、ラディカル構成主義を、ある特定の目的の達成を支援する「理論的枠組」という道具であると見なせば、その場合は、個人がラディカル構成主義という極端な哲学に感じ得る心理的な抵抗の有無というのは、もはや瑣末な問題であり、ただ、道具としてそれが有用であると感じられるかどうかだけが問題となる。真正な数学的活動を議論するための科学的基盤として重要なことは、まさにこの点に尽きる。個人的な思想に基づくバイアスを取り除き、研究ツールとして威力を発揮できるようにするために、ラディカル構成主義を理論的枠組として定式化する試みが必要である。

もう1つ、そうした定式化が必要である第二の理由は、ラディカル構成主義が哲学であるがゆえに、完結した体系をなしてしまっているという点にある。このことは、ラディカル構成主義が外的基準によって反証不可能であることを意味している。事実、何らかの観点でラディカル構成主義という哲学に不備が見つかったとしても、その不備がラディカル構成主義の内的整合性の崩れでない限り、ラディカル構成主義に対する反駁として有効であるとは限らない。

例えば、Ernest (2012) は、ラディカル構成主義が倫理的ではないという点を批判する。より具体的には、

1. 倫理的な研究とは、人間を社会性のある生き物と見なすとともに、

2. 「他者」をモノとしては扱わず、我々の期待によって制限されない権利を有している
と見なすことが必要なのであるが、
3. ラディカル構成主義は、「他者」を認知的エイリアンであるかのごとく捉えている

ということで、非倫理的なのだという (pp. 13-14). このことは、要するに、ラディカル構成主義が、人間を科学的にコントロールし得る存在として捉えている点に問題がある、という主張であろう。しかしながら、このことは、ラディカル構成主義に対する有効な反駁になるわけではない。なぜなら、ラディカル構成主義が、Ernest (2012) の倫理観に適合しない哲学であるならば、それは逆に言えば、Ernest (2012) の倫理観は、ラディカル構成主義を用いることで反省の対象としていくことができる可能性があるということであり、むしろ、ラディカル構成主義に役割をもたらし得るという事態を生じさせるからである*¹。

実際、「倫理」という言葉を持ち出された瞬間、非倫理的な研究はすべて不適切な研究であるかのような印象を受けてしまうけれど、Ernest (2012) の倫理観が唯一絶対の倫理観であるとは限らない。第1章第2節で明らかにしたように、哲学には、現実社会に対するアンチテーゼを提出する役割があるから、当然、Ernest (2012) の倫理観に対してもアンチテーゼが提出され得る。このアンチテーゼが提出される可能性は、Ernest (2012) の倫理観が Ernest (2012) の個人的考えに依拠しているから提出され得るわけではなくて、それがどんなに社会的に受容されている倫理観であったとしても、同じように提出され得る。たとえ受容されていたとしても、それにかかわる問題解決が上手く行かなくなり始めたとき、それを反省の対象としていくのが、哲学の役割だからである。

要するに、お互いに批判し合う関係にある哲学同士というのは、お互いをお互いに反省の対象とすることで、相互発展の可能性を秘めた哲学同士である。もちろん、社会の大勢が結果的にそのどちらの哲学を受容する傾向にあるか、という問題は、当然、社会的な意思決定の問題として別途存在するけれど、多数決によって選択された結果が正しい哲学の資格を得るわけではない。このように考えれば、一般に、ラディカル構成主義に限らず、およそ哲学という学問は、内部矛盾が見つからない限り、根本的には反証不可能である。

*¹ なお、筆者のラディカル構成主義に対する見立てに従えば、この Ernest (2012) のラディカル構成主義の捉えは、表層的であり、そもそも正しくない。しかし、仮にこれが妥当な捉えであり、かつ、ラディカル構成主義がこの基準の下で実際に非倫理的であったとしても、この Ernest (2012) の批判は、本文中に示した理由により、ラディカル構成主義に対する有効な反駁になっているわけではない。

それゆえ、ラディカル構成主義も哲学の1つとして、反証不可能である。

しかしながら、ラディカル構成主義が反証不可能な完結した体系を有しているということが、数学教育研究にとって有用であるか、といえ、それはまた別の問題である。例えば、あらゆる認識が主観的であると仮定するラディカル構成主義の下では、学習者のどんな振る舞いも、主観的認知の帰結であるとして説明できてしまうけれど、そのような説明が、実質的に何かの役に立つのか、といえ、決して役に立つとは言えないであろう。ラディカル構成主義は、哲学であるがゆえに、人間の認識に関わるどんな状況においても何がしかの説明を与える役割を果たし得るが、そうである一方で、ラディカル構成主義に基づく説明が、いつも数学教育研究者や数学教育実践者に対して有益な説明を与えるわけではない。ラディカル構成主義は、仮定の少ない、比較的シンプルな哲学であるため、単にラディカル構成主義に基づいて何がしかを説明するだけでは、その事例から、具体的かつ詳細な情報を引き出すことはできないのである。そのため、ラディカル構成主義を定式化することで、ラディカル構成主義がいつどんな場面で有効に機能する哲学であるのかを明確にしておくことは重要であろう。

さて、以上を踏まえ、本章の論点に戻ろう。本章の論点は、本研究が期待するような理論となるために、何がラディカル構成主義に不足しているのか、この点を明らかにすることである。ラディカル構成主義は、これまで、

1. 曖昧さをはらんで述べられがちであったし、
2. いつも数学教育研究者や数学教育実践者に対して有益な説明を与える哲学であるわけではなかった

ため、道具として、きちんと定式化されている必要がある。

2 ラディカル構成主義の基本概念

ラディカル構成主義とは、より詳細に述べるならば、次の4点を仮定する「知ること」についての哲学である。

P1-a 知識とは，感覚器官を通じたりコミュニケーションを経由したりして受動的に受け取られるものではない。

P1-b 知識とは，認識主体によって積極的に構築されるものである。

P2-a 認識の機能とは，生物学的な意味で順応することであり，適応〔fit〕や生存可能性へと向かう傾向を持つものである。

P2-b 認識とは，主体の経験世界を組織することに役立つのであって，ある客観的な存在論的実在を発見することに役立つのではない。

(von Glasersfeld, 1995b, p. 51 参照)

ラディカル構成主義の基本概念を確認するにあたり，本節では，ラディカル構成主義における鍵概念である次の3つ，

1. 真理と客観
2. 第一次モデルと第二次モデル
3. 生存可能性

についてレビューする。

2.1 真理と客観

ラディカル構成主義とは，あらゆる認識は主観的であるとする，知ることについての哲学である。第1章でも示したように，ラディカル構成主義は，知識の客観性を否定する思想であるとして，しばしば批判の対象となってきた。確かに，von Glasersfeld (1995b) が，しばしば知識の客観性を否定するかのような表現を用いてきた点も事実ではあるし，ラディカル構成主義は，その基本概念が明確に定式化された哲学ではないということもまた事実である。しかしながら，ラディカル構成主義が知識の客観性を否定すると捉えることは，ラディカル構成主義の，数学教育的現象の分析ツールとしての本来の有用性を損ねる解釈である。

まず，重要な点として，ラディカル構成主義に肯定的ではない Ernest (1993) も評しているように，「ラディカル構成主義は存在論的に中立的〔neutral〕である」(p.90, 括弧内原語)。つまり，von Glasersfeld (1995a) も，「私は決して絶対的実在を否定しない，私は，

表 2.1 実在の有無とそれを知り得るか否かの組み合わせ

		知り得るか否か	
		得	否
実在の有無	有	(有/得)	(有/否)
	無	(—)	(無/否)

懐疑論者がするように、ただ我々がそれを知る術を持たないということを主張するだけだ」(p. 7)と述べているように、ラディカル構成主義は、素朴な意味での客観的実在や客観的真理の存在について、否定も肯定もしない。Dykstra (2010) が的確に指摘しているように、ラディカル構成主義は、「我々の精神と独立した実在を知り得ないということ」と「我々の精神と独立した実在が存在しないということ」が混同された状態で批判されている節がある。Dykstra (2010) 曰く、唯物論者・実在論者・客観主義者には、「精神と独立した絶対的実在が存在して我々はそれを知り得る、という選択肢か、それは存在せず我々はそれを知り得ない、という選択肢か」(p. 121) という2つの選択肢しかないように思われるという。つまり、論理的には表 2.1 の3通りが考えられるにもかかわらず、ラディカル構成主義は、表 2.1 において網掛けした2通りの場合しか考慮されずに批判される傾向にあるのである。

ラディカル構成主義がそのような誤解を受ける最大の理由は、筆者の見立てでは、von Glasersfeld (1995b) が次のように考えていた点にあるように思われる。

行為、概念、概念操作は、それらが、我々がそれらを用いる目的的文脈や記述的文脈に当てはまる〔fit〕なら、生存可能である。それゆえ、構成主義者の思考方法において、経験の領域における生存可能性の概念は、伝統的な哲学者の真理の概念を置き換える。その真理の概念とは、現実の「正しい」表象を指示するはずだったものである。この置き換えは、もちろん、日常の真理の概念^{*2}に影響しない。その真

^{*2} [筆者注] 原文では、「伝統的な哲学者の真理の概念」は、“the traditional philosopher’s concept of Truth”であり、「日常の真理の概念」は、“the everyday concept of truth”である。前者は、“Truth”という固有名詞であるのに対して、後者は、“truth”という一般名詞である。固有名詞としての真理は、人間精神に依存しない唯一絶対の「真理」であるという印象を与えるのに対して、一般名詞としての真理は、個別の認識主体の経験に依存した「真理」であるという印象を与える。ラディカル構成主義は、前者の「真理」に対するアクセス不可能性を主張している。

理の概念は、先行する 経験の忠実な繰り返しや記述を必然的に伴うものである

(p. 14, 強調原文, 括弧内原語)

決定的な問題は、「生存可能性の概念が、真理の概念を置き換える」というときの、その置き換わり方にある。確かに、この言い方では、真理の概念を放棄しているようにも読み取れる。しかしながら、それは、ラディカル構成主義の本来の考え方ではない。ラディカル構成主義の考え方をより正確に述べるならば、ラディカル構成主義は、ある知識が(万人にとって)真であるか否かには関心を持たず、ある学習者にとってどんな知識が生存可能であるのかに関心を持つ哲学である。つまり、これは、絶対的に真なる知識や絶対的に偽なる知識が存在するにせよしないにせよ、絶対的に真である知識がある学習者にとって生存可能であるような場合も、絶対的に偽である知識がある学習者にとって生存可能であるような場合も、どちらも考察の対象にする、ということである。それゆえに、ラディカル構成主義者の考察においては、その知識が実際に、伝統的な哲学的な意味において絶対的に真であるか絶対的に偽であるかに関心を払わない。学習者を理解するという目的に特化するならば、絶対的真理の概念は必要ない。その目的の下では、絶対的真理の概念の代わりに、生存可能性の概念を使用すべきである。その意味で、絶対的真理の概念が生存可能性の概念に置き換えられるということなのである。

第1章でも取り上げた無主義を貫く Goldin (2003) は、超相対主義に対する批判として、「知識」という語が、しばしば、「信念」、「生存可能な信念」、「正当化された信念」、あるいは、「社会的共有された信念」の同義語と見なされており、そのことが、科学的知識の十全性を損ねているという点を指摘する。Goldin (2003) のように、客観的実在の存在を積極的に仮定する立場においては、「科学的知識」あるいは「数学的知識」というのは、ある制限された考察範囲において、ある精度で成立する客観的実在の近似的なモデルである。それは、ある特定の個人がどのような信念を抱いているかや、ある特定の社会の構成員がどのような信念を共通に抱いているかとは無関係に、どんな制限された考察範囲において、どんな精度でその近似的モデルが成立するのかが、予め決まっている。それは、人間精神とは独立に、それでいて、客観的実在がどういう存在であるかにも依存して、決まっているはずである。こういう知識観の下では、確かに、「知識」と「信念」は、区別されなければならないであろう。

しかしながら、ラディカル構成主義の関心は、それが誤解であろうと正しい理解であろうと、学習者が実際に何を知るようになったか、何を知っているのか、あるいは、どのように知るようになる傾向があるのかということである。研究背景でも述べたように、構成主義が台頭した歴史的経緯として、例えば、小数の大小に関するミスコンセプション ($0.4 < 0.234$ という誤解) がなぜ生じるのか、そのメカニズムを解き明かしたいという数学教育研究のモチベーションが存在した。確かに、教育として、 $0.4 < 0.234$ は誤りであるのかもしれないが、学習者として、意図して誤った理解をしようとしたわけではないであろうから、数学教育研究は、学習者の認識の本性に接近する努力をしなければならない、と考えられるようになったのである。

実際問題として、ラディカル構成主義は、その哲学的議論として、認識の主観性と客観的知識の到達不可能性を主張したに留まったが、筆者の理解によれば、ラディカル構成主義が実際に問題としてきたことは、学習者がどんな知識を使用する傾向にあるか、という問題である。一般的に言って構成主義は、学習者独特の合理性を仮定する立場である (Confrey, 1991)。つまり、観察された学習者の振る舞いが、その文脈で生存可能な知識の現れであると仮定することで、その文脈がその学習者にとってどのような目的的文脈であったのかを明らかにしようとする立場である。このような形で学習者の思考をモデル化することは、「観察される者に共感する [empathize]」 (Thompson, 2000, p. 298, 括弧内原語) ことを可能にする。

例えば、文字列として長い小数の方が大きい小数であるというミスコンセプションの場合、非構成主義的な捉え方をすれば、このような事例は、単に、その学習者が誤っていたというだけのことである。しかし、構成主義は、自然数の範囲内においては、数の大小と文字列の長短が一致していたということに着目する。すなわち、この小数のミスコンセプションの保持者にとって、数の大小比較を行う目的的文脈において生存可能な方法知が、文字列の長短を比較することであったかもしれない、と考えるのである。このように考えれば、このミスコンセプションの保持者は、既習事項をただ活用しようとしているだけであり、我々観察者は、その振る舞いの合理性に一定程度理解を示すことができるようになる。その学習者の主観的な認識に共感しようとする目的の下では、その学習者が真理を認識できているかや、客観的な知識を構成できているかということは、直接的な問題ではないのである。

2.2 第一次モデルと第二次モデル

学習者に共感しようと試みるラディカル構成主義の観察態度は、学習者がどんな目的の下で振る舞っていたのかを事後的に説明するために有用である (Ulrich et al., 2014). この説明を行うにあたって、ラディカル構成主義は、すべての認識が主観的であるとする原理に基いて、特に、第一次モデルと第二次モデルの区別を提起する (Steffe & Thompson, 2000b; Thompson, 2000). 端的に述べるならば、第一次モデルとは、認識主体自身が構成した知識のことであり、第二次モデルとは、観察者が「被観察者の構成した知識」について構成した知識のことである。

第二次モデルを構築する目的は、「様々な推論の段階にいる複数の子ども達と、しばしば同時に、効果的に相互作用できるように、彼や彼女〔観察者〕を手助けするような方法で、彼や彼女の経験を組織すること」(Tillema, Hackenberg, Ulrich, & Norton, 2014, p. 356) であると言われる。つまり、第二次モデルとは、教師や研究者などの観察者が用いる知識である。

ここでは、Ulrich et al. (2014) から第二次モデルの構築例および使用例を1つ取り上げよう。彼らは、ある第6学年の生徒 (Charice) の反応を説明するために、2つの複合ユニット (2つのユニットのユニット) というモデルと、1つのみの複合ユニット (1つのユニットのユニット) というモデルを構築し、使用した。Charice には2つの問題が与えられた。

2 スート・カード問題^{*3} : あなたは、ハートのエースからキングまで (13枚のカード) を持っている。あなたの友達も、スペードのエースからキングまで (13枚のカード) を持っている。あなたとあなたの友達は、あなたの手から1枚のカードを引き、あなたの友達の手から1枚のカードを引き、そしてそれらを一緒に合わせることで、2枚組の手札を作る。あなた達が何通りの相異なる2枚組の手札を作り得るかを示すために、アレイ図を用いよ。

パスワード問題 : 生徒達は、学校で彼らのコンピュータのアカウントのために、2

^{*3} [筆者注] スート (suit) とは、トランプにおけるスペード (♠), ハート (♥), ダイヤ (♦), クラブ (♣) の4種類のマークのこと。

文字のパスワードを作る (例えば, “FD” はパスワードであり得る). 彼らは, パスワードを作るために, A から N の文字から選ぶことができる. 何通りの 2 文字パスワードが可能であろうか? (“FD” と “DF” は異なるパスワードであると見なすと仮定せよ.)

(p. 333, 強調原文)

この問題において, 教師/研究者は, Charice が各問題を 2 つの複合ユニットを用いて解くことを期待していた. まず, 2 スート・カード問題では, 13 枚のハートと 13 枚のスペードの 2 つの集合の各々から 1 つずつ選ばなければならないので, 13 枚のハートと 13 枚のスペードの 2 つの集合の集合という, 2 つのユニットのユニットを想起することが必要である. また, パスワード問題では, 「14 文字の集合」を 2 つ集めた集合が, 2 つのユニットのユニットとして見なされる. なぜなら, 1 つの 14 文字の集合から 2 文字を選んでしまうと, “DD” のような同じ文字 2 文字を用いたパスワードが作れないからである. 集合を 2 つ想定して, その各々から 1 文字ずつ選ばなければならない.

指導場面としては, 2 スート・カード問題に対して, 教師は Charice に 1 揃いのトランプからすべてのハートを与え, パスワード問題に対して, 教師は Charice に, A から N の文字のうちの 1 つが印字された 14 枚のカードを提示した. Charice は最初の問題を容易に解いたけれど, 彼女は第二の問題を解くことができず, 14 によって掛けられる数が存在しない旨を表現した. 彼女は 14 文字の単一の集合から選ぶことでパスワードを作っているように思われ, 彼女の思考は, 1 つのみの複合ユニットのモデルによって制約されていると評価された (pp. 333-334).

2 つの複合ユニットというモデルと 1 つのみの複合ユニットというモデルは, どちらも学習者の思考のモデルである. これは, 学習者の認識そのものではなく, 学習者の認識を観察者の視点から仮説的に組織したもの, つまり, 学習者の認識についての観察者の認識である. このようなモデルを立てることによって, ラディカル構成主義は, 学習者が実際にどのように認識しているのかについて, 共感しようと試みてきたのである.

2.3 生存可能性

学習者の認識に共感しようとする目的の下では、学習者の認識が真理に基づいていると考える必要はない。学習者達にとって、知識の断片が絶対的真理を反映しているという条件は、その知識を使用するために必要でも十分でもない。むしろ、生徒達は、それらが生存可能であるとき、すなわち、「それらがそれらを用いる目的的文脈や記述的文脈に当てはまる〔fit〕なら」(von Glasersfeld, 1995b, p. 14), それらを使用するように思われる。ラディカル構成主義は、「率直に言って道具主義」(p. 22)である。生存可能という語は、真であるとか妥当であるとかいう語の同義語ではない。ある特定の知識の断片が、その主体にとって生存可能であるという観察は、その人がある特定の正当化された信念を持っているということを意味しない。むしろ、それは、ある特定の状況において、その主体が、ある特定の認知的道具を使用するということを意思決定する傾向性を有しているということの意味する。

特に、「生存可能性はいつもある選ばれた目標に相対的」(von Glasersfeld, 1992, p. 384)である。そして、構成主義の立場において、学習は、「方略の内容それ自身の変化以上に、方略の応用可能性の移行」(Smith, diSessa, & Roschelle, 1994, p. 137)に関係していると言われる。例えば、小数のミスコンセプション保持者の場合であれば、文字列として長い方が大きい数であるという大小判断に関する暗黙的な方法知を、有理数の範囲では使用せず、自然数の範囲でのみ使用する傾向性を持つようになるならば、それは学習である。あるいは、先に挙げた Charice の場合であれば、2 スート・カード問題で使用した2つの複合ユニットという思考という暗黙的な方法知をパスワード問題でも使用する傾向性を持つようになるならば、それは学習である。学習者は、ある方法知を実行する(少なくとも形の上では模倣する)能力を有するにもかかわらず、その方法知を専門家や上級者と同じ場面で使用できない、あるいは、その方法知を専門家や上級者が決して使用しないような場面で使用してしまい得る存在である。そのため、ラディカル構成主義は、知識の生存可能性を目的(あるいは、文脈)に相対的なものとして捉え、学習者が、ある方法知をどんな場面で使用し、また、どんな場面で使用しない傾向性を確立していくのに関心を持つ研究パラダイムなのである。

3 ラディカル構成主義の定式化

ラディカル構成主義の知識に対する道具主義者の見方がしばしば誤解されるのは、ラディカル構成主義の独特な視座を説明するにあたって、「知識」という、伝統的な哲学と同じ言葉を用いたことが一因であろう。本節では、ラディカル構成主義の基本用語の定式化を試みる。

3.1 知識観の定式化

ラディカル構成主義の知識観は、ライル (1987) の哲学に基づいて定式化することが有用であろう。ライル (1987) は、「機械の中の幽霊のドグマ」(p. 11) というフレーズで、デカルト的心身二元論を批判した論者の一人である。曰く、心(幽霊や魂)が、身体(機械)を動かしているという考え方は、違う次元の物事を同一の言明の中に組み込んでしまう論理的錯誤(いわゆる、カテゴリー・ミステイク)である。彼の議論は、心に関する言明でさえ、身体に関する言明に還元できるという主張を含むことから、しばしば哲学的行動主義(あるいは、論理的行動主義)と評される。しかしながら、ライルの直弟子 Dennett (2002) が指摘するように、ライルを単なる行動主義者として捉えてしまうことは、よくある誤解である。以下では、ライルの主張を2点引用する。1つは、方法知と内容知の区別であり、もう1つは意志作用という構成概念の問題である。ライル (1987) の主張の1つは、方法を知ること (knowing how) と内容を知ること (knowing that) の区別を導入するとともに、前者の重要性を指摘することである。ライルは、この両者の混同を次のように表現した。

ある行為が理知的行為であるための必要十分条件は、その行為者がその行為を遂行しているときに自分が何を行っているのかということについて十分考えており、しかも、もし自分が何を行なっているかということについて考えていなかったならばその行為をそれほど巧みに行なうことはできなかったであろうと思われるような仕方では自分は何を行なっているかということについて考えているということである。

(pp. 28-29)

例えば、自転車に乗るということは、バランスの取り方を頭で考えながら制御しているからできることではないし、論理的に話すということも、論理学の法則を自分の話し方に意識的に適用しているからできることではない。要するに、「方法を学ぶことや能力を高めることは内容を学ぶことや情報を得ることと同種の事柄ではない」(p. 74, 強調原文)のである。

ライル(1987)のもう1つの主張は、「意志作用」(volition)という構成概念の問題である。すなわち、「ある主体の行為が、その主体の意志に基づいてなされている」という仮定の問題である。ライルは、次の4点を指摘することで、意志作用なるものの存在の承認が、デカルト的心身二元論の無批判な受容であると論じる(pp. 84-87)。

1. 我々は、意志作用の頻度・持続時間・強さなどに関してどのように答えるべきかを知らないので、意思作用なるものの存在は経験的根拠を持たない。
2. ある行為が意志作用によって引き起こされた行為なのか、反射的行為や習慣的行為などの外部要因によって引き起こされた行為なのか、観察によって弁別することができない。
3. 仮にある主体が、内観を通じて自らが意志を働かせていることを知り得たとしても、その知識それ自体は、その主体の意志作用がその主体の行為と結びついていることの証明にならない。
4. 意志作用の存在を認めると、意志作用を発揮するために別の意志作用が必要となり、無限後退に陥る。

まとめると、「意志作用に関する教説は、『ある身体的運動を意志による運動たらしめているものは何か』という問をその運動の原因を尋ねる問であると誤解したために採用された因果仮説である」(p. 87)。

ライル(1987)の思想は、真理を分かち与えることができるものとみなしている(p. 74)という点で、古典的真理観に根ざした思想であり、ラディカル構成主義とその立場を異にするものと思われる。しかし、それは、ライルの言葉をパラフレーズするならば、ライル自身が、「知識の中の真理のドグマ」に駆られていたと言えよう。つまり、この思想は、真

理を反映した内容知なるものの存在を無批判に受容してしまっている。それは、心身二元論者が身体的運動の原因を魂に求めたように、ある知識が妥当であることの原因を真理に求めることに等しい。

ラディカル構成主義は、真理の存在を否定しない。ただ、到達不可能性を主張するのみである。例えば、ある人が安定して長時間、自転車に乗っているという現象の背後には、この世界には、真理に支えられた、安定した物理法則が存在するというを示唆しているといっても差し支えないであろう。しかし、自転車に乗る人々は、自転車に乗る人々を支配する物理法則を言語化できるとは限らないし、仮にその法則を特定し、言語化できたとしても、その言語的表現が自転車に乗る人々を支配する真理のすべてを言い尽くしているとは限らない。

こうした方法知は、日本語で言えば、「技」や「コツ」といった類のものである。もちろん、方法に関する知識の中には、アルゴリズムのように、完全に、かつ、明確に言語的に表現可能な知識も存在するし、技やコツも、断片的には言語的に表現することが可能である。しかしながら、それでも、方法に関する知識の中に、言語的に表現不可能な領域が存在することもまた事実である。

以下では、便宜上、この言語的に表現不可能な知識を暗黙知 (tacit knowledge)、これと対をなす言語的に表現可能な知識を形式知 (formal knowledge) と呼ぶことにしよう。また、命題や定理といった真偽で評価可能な知識を内容知、言語化可能か否かを問わず、方法に関する知識を方法知と呼ぶことにしよう。このとき、暗黙知／形式知の観点と内容知／方法知の観点が互いに独立であることから、

- 形式知かつ内容知である知識 (以下、形式的 content 知)
- 形式知かつ方法知である知識 (以下、形式的 method 知)
- 暗黙知かつ内容知である知識 (以下、暗黙的 content 知)
- 暗黙知かつ方法知である知識 (以下、暗黙的 method 知)

の4種類を想定することができる。便宜上、これらの意味を整理するならば、表2.2のようにまとめられるであろう*4。

*4 なお、暗黙的内容知は、ここまで例が挙がっていなかったが、本研究では、潜在的に形式知となり得る内容知のこととして想定している。つまり、個人の言語能力の限界によって明瞭に言語化されていないような内容知のことである。

表 2.2 本研究における知識の分類

知識の種類	説明
形式知	内容知 命題や定理といった、言語化可能で真偽で評価可能な知識。
	方法知 アルゴリズムや一部の技やコツなど、言語化可能な方法に関する知識。
暗黙知	内容知 言語化不可能であるが真偽で評価可能な知識。潜在的な形式知。
	方法知 言語化不可能な方法に関する知識。

ここで、前節でも引用した構成主義の2つの主張を再び取り上げよう。すなわち、「生存可能性はいつもある選ばれた目標に相対的」(von Glasersfeld, 1992, p. 384)であり、学習が「方略の内容それ自身の変化以上に、方略の応用可能性の移行」(Smith, diSessa, & Roschelle, 1994, p. 137)に関係している、という主張である。このことを踏まえると、例えば、ニュートン力学に関する知識は、真理を反映してはいるかもしれないが、どの程度、その真理を反映しているかを評価しえず、ただ何かの目的(例えば、ボールをより遠くに飛ばすための射出角度を求める、など)を達成するための方法知として、生存可能であるのみなのである。ニュートン力学は、形式的な内容知として表現されたものであるかもしれないが、人間がその物理学が示す内容を認識し、使用するという状況を想定する限りにおいては、ニュートン力学でさえ、暗黙的方法知として捉えることができる。また、ニュートン力学が、言語化され、内容知として記述された場合、そういう形で記述するということがそれ自体が、別の何らかの目的(例えば、その方法知を、共有しやすくする、伝達しやすくするという目的)を達成するための方法知である、と考えることもできる。

このような科学的知識観は、Goldin (2003) が主張する反証可能性を中心とした科学的知識観と整合的である。Goldin (2003) は、人間の存在に先行する何らかの「世界」の存在を明確に仮定し、科学理論を、適用範囲が明確に制限された近似的に真な知の体系、として捉えているのであった。ニュートン力学が量子力学で置き換えられた過程は、まさに、科学者集団におけるニュートン力学の方法知としての生存可能性が、ありとあらゆる場合において生存可能であった状態から、巨視的な物体を扱う場合においてのみ生存可能である状態へと移行した過程として考えられる。表 2.1 に示したように、人間の存在に先行する「世界」が存在しようとしまいとラディカル構成主義は成立するから、その意味で、

その「世界」に直接的に触れることができないという原理さえ維持されるなら、Goldin (2003)のように「世界」の存在を仮定する立場とも、ラディカル構成主義の知識観は整合的なのである。この状態は、ラディカル構成主義が矛盾している状態としてではなくて、ラディカル構成主義の提案する知識観が、健全な科学的知識観あるいは健全な数学的知識観を包摂している状態であるとして説明できるであろう。ただし、ラディカル構成主義の知識観というのは、「知識」としての力点の置き方にズレがあって、人間の認識において「知識」として見なす部分が、方法知に制約されている、とすることができるであろう。

このように、形式的方法知だけでなく、形式的内容知や暗黙的内容知でさえ、それらをいつどんなタイミングでどのように活用するかまでを含めて知識だと捉えるならば、すべて暗黙的方法知として捉えることができる。この見方は、当然、数学的知識に対しても同様に適用することができる。例えば、「3は素数である」ということは、素朴には内容知であるかもしれないが、人間がそのことを認識し、知識として使用するという状況を想定する限りにおいては、方法知として捉えることができる。実際、専門家でさえ、常に3を素数として認識しているわけではないであろう。例えば、 $24 = 2^3 \times 3$ という式を見た場合、この3を素数として認識するかもしれないけれど、 $y = 3x$ という式を見た場合、普通、このときの3を素数として認識するようなことはしないであろう。 $y = 3x$ という式が出現するような文脈においては、多くの場合、3が素数であるということよりもむしろ、その3を一次関数の傾きとして見なす方が、問題解決に資することが多いと考えられるからである。

本研究は、便宜上、表2.2のように、知識を、形式的な内容知、形式的な方法知、暗黙的な内容知、暗黙的な方法知として分類したが、ラディカル構成主義は、形式的な内容知、形式的な方法知、暗黙的な内容知の3種類を、すべて暗黙的な方法知として捉え直す哲学である。たとえ内容知であっても、学習者が、その内容知を、道具としてどんな場面で使用する傾向にあるかを議論するならば、暗黙的な方法知として捉えられるし、形式的な方法知であっても、個々の学習者が、実際にその方法知をどんな場面で使用する傾向にあるかを議論するならば、暗黙的な方法知として捉えざるを得なくなるであろう。以下では、簡単のため、単に「方法知」と言った場合は、暗黙的な方法知を指すものとする。

ライル(1987)が成し遂げた心身二元論に対するブレークスルーは、方法知・内容知という新たな二元論をもたらした。その意味で、ラディカル構成主義に対する批判的な議

論(例えば, Kilpatrick, 1987; Wheeler, 1987)は, いずれも, 内容知一元論であるか, 方法知・内容知二元論であるかのいずれかであると言える。ラディカル構成主義は, この区分に基づけば, 方法知一元論である。ラディカル構成主義に基づいて研究をするならば, 我々は, 知識・アイデア・モデル等々の生存可能性を議論するときにはいつでも, ある主体がそれらを, ある方法知の断片として, どんな目的のために使用する傾向にあるのか, という観点で議論することとなる。

なお, この「どんな目的のために使用する傾向にあるか」という, 方法知の目的相対性を正しく理解する上で, ライル(1987)の取り上げた「意志作用」への懐疑に注目することは重要である。ライルの議論に基づけば, 意志作用なるものは存在しない。自転車に乗る例で言えば, 例えば, その方法知を獲得する過程において,

1. ある重心の置き方を試し,
2. それに対する感覚器官からのフィードバック情報を踏まえて,
3. 別の重心の置き方を試す

という一連の試行錯誤過程が考えられるけれど, これらは, どの部分も認識主体の意志に基づく行為ではない。なぜなら, ライルの指摘するように, 1や2の過程を実行するために, 我々は心の中で「この辺に体重をかけてみよう」と念じる必要がないからである。このとき, 意志作用が存在しないということが, ラディカル構成主義が重視する認識主体の能動性を否定するわけではないことには注意が必要である。物理的には, ある認識主体が2のフィードバックを得た後に, 3を実行しない, という状況は存在し得る。しかし, それでもなお, その主体が3を実行しているのならば, それは, 認識主体の知識獲得に対する能動性の現れであるとみなすことができる。そのような能動性の原因を後から考えると, その原因に対する説明概念として意志作用なるものを持ち出したくなってしまふけれど, それはカテゴリー・ミスイクである。そのような能動性が発揮されるにあたって, 自分の心に強く言い聞かせるという意志作用に支えられている必要はどこにもないのである。我々の方法知は, 能動的ではあるが意志作用には基づいていない試行錯誤に基づいて, 生存可能となるように漸次修正・発展が繰り返されると考えられる。

このような知識観に立つとき, とりわけ「…として…を見ること」や「…として…を認識すること」といったような認知でさえ, 方法知として見なされることは特筆に

値する。この点については、von Glasersfeld (1995c) のハンマーの例 (p. 374) がわかりやすいであろう。ある主体が、壁に釘を打ち付けたいが、手近にハンマーが見当たらないため、ハンマーの代わりに拾った石を用いるとしよう。

ある石をハンマーとして見なすことは、その主体の方法知である。その主体がその石をハンマーとして見なす理由は、その主体が意志作用によってある石をハンマーとして見なすことを決め、そして実際にその石をハンマーとして見たからではない。それは、その主体がその石をハンマーとして見る方法を暗黙裡に知っていたから (例えば、その石のどの部分をハンマーの面やグリップに対応させるかを決める方法を知っていたから) である。もしその主体が小さくて固い物質を石として見なすことしか知らなかったら、その石はその主体にとってただの石だったであろう。

ある主体は、その主体が望む任意の方法知を知識として構成できるわけではない。なぜなら、環境が、主体の方法知の生存可能性を制約するからである (von Glasersfeld, 1990a, p. 24)。しかしながら、その主体がその制約を侵さない限り、どんな方法知でも任意に構成され得る、ということに注意が必要である。つまり、知識の構成には、完全に任意ではないが、さりとて一意ではなく、環境によって定められる自由度があり、その自由度の範囲内であれば、どのような知識を構成するかは、主体が好きなように構成することができる。したがって、その主体が事実から学んだことが何であれ、それは、その主体が主観的かつ仮説的に構成したものである。そして、とりわけ重要なことは、この知識観に基づく、環境の制約に反しない限り任意に知識を構成できてしまうということが、ある主体が自身の有する信念に基づいて偏向した方法知を任意に構成できてしまうということを含意するということである。

この点について、教育の文脈における卑近な例を挙げよう。ある教師が、数学の学習において生徒が成功するためには、多量のドリル演習が必要だと信じているとしよう。しかし、その教師は、たとえ、多量のドリル演習をこなしたにもかかわらず数学の学習に失敗する生徒を目の当たりにしたとしても、その信念を修正する必要はない。なぜなら、この状況だけでは、生徒を成功させるために多量のドリル演習を課すという形式的な方法知それ自身と、その方法知が生まれた際の環境に関する情報 (方法知の応用可能範囲) のどちらが誤っていたのかが決定できないからである。これは、ラカトシュ (1986) が科学的研究プログラムの方法論として論じた問題と全く同型の問題である。つまり、理論を論駁し得

る観察結果が得られたからといって、必ずしもその理論の堅い核が反証されたことを意味するわけではないのである。研究プログラムとの類推に基づけば、理論が、防御帯と呼ばれる補助仮説を導入することによって、その理論の中核を保護することができるように、認識主体も、補助仮説を導入することによって自身の信念を保護することができる。つまり、もしその教師が自分の信念を保護したいと思うならば、「以前の生徒は今回の量で十分だったかもしれないが、今回の生徒には、もっとたくさんの量が必要だったのだ」という、アドホックな補助仮説の導入によって、その教師は自身の信念を永遠に保護し続けることができるのである。その意味で、生徒を成功させるために多量のドリル演習を課すという方法知は、その教師にとって永遠に生存可能であり続け得る。

このことは、確かに、認識主体が完全に任意にその知識を構成し得ることを意味するわけではない。この状況においては、多量のドリル演習を与えたにもかかわらず数学の学習に失敗した生徒の存在は、「ごくわずかなドリル演習のみを与えることによってどんな生徒でも数学の学習に成功できるであろう」という知識構成を支持しないから、認識主体の知識構成は、一定程度、制約を受けている。しかし、この「多量のドリル演習を与えたにもかかわらず数学の学習に失敗した生徒」というたった1つの反例が、その教師にとってどのような意味を持つかという問題は、極めて多様な答えがあり得る問題である。同じ状況下で、ある者は、「量的なドリルが有効な生徒とそうでない生徒がいるようだ」と結論付けるかもしれないし、また別の者は、「人によって適切なドリルの量が違う。多くても少なくてもいけない」と結論付けるかもしれない。「そもそも、ドリル演習に効果がないのかもしれない」と結論付ける者もいるであろう。この状況において、どのように既存の方法知を修正するかは、生徒を数学学習において成功に導くという目的の下で、認識主体がある程度自由に決定できる問題である。

知識の構成に自由度があるという事実は、ラディカル構成主義にとって何ら問題のあることではない。ラディカル構成主義は、人間の知識構成の本性に接近する哲学であるから、むしろ、認識主体は、生存可能性を維持する限りにおいて、好き勝手に知識を構成していると言ってしまったほうが、簡潔明瞭であろう。数学教育研究は、数学の学習者が、環境の制約の範囲内でかなり自由に知識構成を行っているかもしれない(つまり、教えたことを学ばず、教えていないことを学んでいるかもしれない)という事実を積極的に肯定し、その事実を踏まえた上で、数学教育をどのように組織すべきかを議論しなければなら

ない。

さて、先の「多量のドリルを与える」という方法知の例がそうであったように、認識主体は、一般的に言って、ある特定の目標を達成しようとする際、妥当性が保証された知識だけでなく、いわゆる経験則に相当するような仮説的知識もまた積極的に使用する。この点は、数学の学習者も同じである可能性がある。つまり、妥当性が保証された方法知のみを使用する学習者というのは、かなり数学的に洗練された学習者なのであって、多くの学習者は、偶然的な成功や失敗に基づいて構築された経験則を積極的に使用する存在である可能性がある。本研究では、知識使用におけるこの特徴を知識使用の仮説的本性と呼ぼう。

このように考えれば、あらゆる方法知の構成と使用は、その主体にとって(その主体の経験則に合致するという意味で)妥当である。もちろん、そうした妥当性は、素朴な意味での客観的妥当性を含意しない。必ず期待した結果が得られるとは言えないし、期待した結果が得られる確率が何%であるのか、定量的に評価できるわけでもないけれど、それでも、その主体なりの判断として、他の手を採用するよりは、その知識の使用という手を採用することが何らかの意味で合理的であるならば、その知識は、その主体にとって妥当な知識なのである。

以上より、ラディカル構成主義の知識観は、次のように定式化できる。

- 形式的な内容知、形式的な方法知、暗黙的な内容知のいずれであっても、すべて、何らかの目的を果たすために使用される暗黙的な方法知である。
- 信念や経験則のような妥当性の保証されていないような「知っていること」も、それが何らかの目的を果たすために使用されるならば、暗黙的な方法知である。
- ある方法知が絶対的真理を反映しているということは、ある認識主体がその方法知を使用するための必要条件でも十分条件でもない。暗黙的な方法知は、常に仮説の状態で使用される。
- 認識主体は、環境の制約の範囲内で自由に方法知を構成することができる。

3.2 生存可能性の定式化

ここまで述べてきたように、ラディカル構成主義の道具主義的な知識観を一貫させるためには、内容知であっても方法知として捉えなければならない。これまでの構成主義研究の中には、「生存可能性」の概念を内容知にまで援用してきたものがあるかもしれないけれど、そのような援用は、ラディカル構成主義においては論理的に破綻する。

この点を指摘するにあたって、生存可能性の概念を反省しよう。反省の観点とは、ラディカル構成主義においては、あらゆる認識が主観的なものと見なされるということである。ラディカル構成主義は、この主観性の原理を認識主体だけでなく、当然、観察者にも適用する。このことは、「どんなことも観察者によって言われたことである」という Maturana の言葉によって象徴的に表される (Thompson, 2000; von Glasersfeld, 1990b)。

この観点に基づいて、生存可能性の定義を確認しよう。ある知識が生存可能であるとは、その主体がその知識を用いる「目的的文脈や記述的文脈に当てはまる [fit]」(von Glasersfeld, 1995b, p. 14, 括弧内原語) 場合のことであった。このとき、我々は、生存可能性の判定に決定的に影響している「文脈」というものが、どの視点から語られたものであるのかに注意を払わなければならない。つまり、先の Maturana の言葉に基づくならば、これは観察者の視点から語られたものとして見なされなければならない。

ある観察者の視点から見て、「ある文脈 C において、ある主体 S にとって、ある知識 K が生存可能である」ように見えるとき、 C と K は、その観察者の主観的記述である。つまり、 S 自身は、自分の置かれている文脈が C であるとは思っていないかもしれないし、知識として K を使っているとは思っていないかもしれない。例えば、観察者から見て、「食塩水の濃度問題を解決したい文脈において、ある学習者にとって、方程式の知識が生存可能である」ように見えたとしても、その学習者にとっては、実際は、「何らかの応用問題を解決したい文脈において、直前の授業で習った方法が生存可能である」だけだったかもしれない。この場合、その学習者は、3週間後に食塩水の濃度問題を与えられたとしても、方程式を使うことができないかもしれない。なぜなら、そのとき、その学習者にとって、その方程式の知識は、直前の授業で習った内容ではないからである。

この見方に従えば、「ある文脈 C において、ある主体 S にとって、ある知識 K が生存可能である」という表現は、正確に言えば、「観察者から見て C と呼べるような文脈にお

いて、ある主体 S が、観察者から見て K と呼べるような知識を実際使用していた」ということに過ぎない。この観察結果を素直に表現するだけであれば、「ある文脈 C において、ある主体 S にとって、ある知識 K が生存していた」と、自動詞で表現した方が、いくらか自然である。しかしながら、ラディカル構成主義は、そのようには表現しない。なぜなら、過去の事実を観察された通りに言語報告するだけでは、その観察者の持つ知識を増大させないからである。

例えば、観察者は、普通、「食塩水の濃度問題を解決したい文脈において、ある学習者が方程式の知識を使用していた」という観察結果を、ある瞬間におけるただ一回限りの事実として理解するようなことはしない。もしそういう観察結果が得られたならば、その観察者は、「同種の食塩水の濃度問題を解決したい文脈において、その学習者は今後も方程式の知識を使用するであろう」ということを期待するであろう。先の観察結果を受けて、その学習者は、観察者にとって、「この先、濃度問題を与えられたとしても、どんな振る舞いをするか全く想像できない存在」ではなく、「濃度問題を与えられたなら、方程式を使う可能性のある存在」となったのである。もちろん、この認識は誤りである可能性もあるけれど、観察者は、その観察を経て、観察者自身の経験世界で今後どのようなことが起こり得るのかを予測するための暗黙的な方法知を構成した、ということができる。

このように、ラディカル構成主義は、「ある文脈 C において、ある主体 S にとって、ある知識 K が生存可能である」という表現を、「観察者から見て C と呼べるような文脈においては今後も、ある主体 S が、観察者から見て K と呼べるような知識を使用する可能性がある」という意味で用いているはずである。このとき、使用される知識 K とは、内容知ではあり得ない。例えば、「方程式の知識」というとき、それは、方程式の立式の仕方や、立式した方程式の解き方、解の吟味の仕方など、真偽で評価され得ない種類の知識のほずである。これらの多くは、明瞭に言語化しにくい種類の知識でもある。これらは、まさにライル (1987) の意味で方法知である。

以上より、ラディカル構成主義における生存可能性の概念は、次のように定式化できる。

- ある目的的文脈または記述的文脈において、ある認識主体にとってある知識が生存可能であるとは、その主体が、将来の同種の文脈においてその知識を使用する傾向性を有する場合のことを言う。

- 生存可能性の概念とは、方法知を評価するための概念であり、内容知を評価するための真理概念と区別されるべき概念である。

3.3 同化の定式化

Von Glasersfeld (1995b) によると、同化とは、「新しい素材を、既に知られているものの具体例 [instance] として扱うこと」(p. 62, 強調原文, 括弧内原語) である。ハンソン (1986) は、我々が行うありとあらゆる観察が、網膜に映った視覚情報をありのままに見る行為ではなく、その視覚情報を別の何かとして見なす (seeing ... as ...) 行為であることを指摘した。同様に、ラディカル構成主義において、あらゆる認識は、「A を B として見なす」という形で表現することができる (Steffe, von Glasersfeld, Richards, & Cobb, 1983, pp. xvi-xvii)。このとき、A や B に相当するものは、しばしば概念的枠組 (conceptual framework) や認識構造 (cognitive structure) と呼ばれる。

先に引用した von Glasersfeld (1995c) の「石をハンマーとして見なす」は、同化の一例である。釘を打ちたい状況下で、手近にハンマーがなかったとしたら、手近にある石を拾い、その石をハンマーとして使用するということがあり得る。この場合、その人は、その石を、その人自身の持つ「ハンマー」の概念的枠組に同化している、と言える。ただし、その人が決して「石」それ自身を直接的に認識しているわけではないという意味では、「石」も概念的枠組の一種である。つまり、「石を『ハンマー』の概念的枠組に同化する」ということは、正確に言うならば、「灰色がかった硬くて小さな物体を『石』の概念的枠組に同化していた状態から、それを『ハンマー』の概念的枠組に同化している状態へ移行する」と言う方が正確である。

先に「3 が素数である」ことの例を挙げたが、数学的対象についても同様に同化の議論を行うことができる。例えば、3 は素数であるけれど、 $y = 3x$ という数式において、普通、「3」を「素数」の概念的枠組に同化するということはしないであろう。この場合の「3」は、むしろ、「傾き」の概念的枠組に同化されるであろう。人間の認識にとっては、3 それ自身がいったい何であるかということではなくて、どのような目的で3を何であるとして認識することが合理的であるか、ということが問題なのである。

このように考えると、我々は、今まで「同化」という言葉を2通りの意味で用いてし

まっていたことが明らかとなる。以下、それらが無意図的同化と意図的同化と区別して定式化しよう。「AをBに無意図的に同化する」とは、ある対象Aを、意図せずBとして取り扱っている状況を指す。例えば、灰色がかって硬くて小さな物体を見て、一瞥の後にそれを「石」とであると判断するような場合である。これは、何かの問題を解決するために「石」として同化されたわけではないので、無意図的である。同化先の概念的枠組が目的的に選択されたわけではない、とも言える。

一方、「AをBに意図的に同化する」とは、ある対象Aを、意図的にBとして取り扱っている状況を指す。例えば、無意図的に石として同化していたモノを、釘を打つという目的のためにハンマーとして同化する場合である。これは、ある特定の問題を解決するために「ハンマー」として同化されたわけであるから、意図的である。同化先の概念的枠組が、目的的に選択された、とも言える。内容知として、「石はハンマーである」という言明に対して真偽を問うことは、ほとんどどんな状況においても不毛であるが、方法知として、石をハンマーとして取り扱うことが意味を持つような状況は、確かに存在する。

Von Glasersfeld (1995c) の「石をハンマーとして見なす」の例は、意図的同化の例である。我々は、それと対を為す、より根本的な同化の形態として、無意図的同化の存在もまた考慮しなければならない。そうでなければ、我々は何事も認識できないことになってしまうからである。

生存可能性の定義より、方法知の生存可能性は、現在の状況がどのような目的的文脈や記述的文脈の上に成り立っているかに依存している。このとき、意図的同化は目的的文脈に、無意図的同化は記述的文脈に、それぞれ次のように対応している。例えば、ある人が、釘を打つために石を「ハンマー」の概念的枠組に同化するならば、その人にとって「ハンマー」の概念的枠組を使用するという方法知は、釘を打つという目的の下で生存可能である。また、ある人が、歩行中、足元に落ちている「灰色がかって硬くて小さな物体」を「石」の概念的枠組に同化するならば、「石」の概念的枠組を使用するという方法知は、歩行風景を記述する上で生存可能である。

目的的文脈と記述的文脈は表裏一体である。歩行中、目に留まった物体を石として記述することは、それ自体、目的的になされることではないけれど、そのような記述は、その物体が、歩行を妨げるものではないと判断するために重要である。つまり、ある目的を達成するために鍵となる対象は、意図的に同化され、その目的を達成するために注意を払う

必要のない対象は、無意図的に同化される。その意味で、記述的文脈において生存可能な概念的枠組も、人間の活動の目的と不可分な存在である。

なお、先に、ライル(1987)による意志作用の否定に関する考察が、ラディカル構成主義と親和的であることを論じたが、ここで、意図と意志作用が異なるものであることを明確にしておきたい。ライル(1987)の否定した意志作用とは、何らかの行為を実行するための原因となる、心の中のつぶやきである。人は、何らかの行為を実行しようと思いつくとも、その行為を実行し得る。一方、ここで議論している「意図的同化」の「意図」とは、その文脈において果たそうとしている「目的」と同義である。認識主体は、自身がどのような目的で行動しているのかを常に自覚しているとは限らないし、仮に自覚していたとしても、それを言語的に報告できる状態にあるとは限らない。しかし、それでも、認識主体は、自身の置かれた状況に対してランダムに振る舞っているわけではない。専門家から見れば非合理的に見えるような行為であったとしても、認識主体は、自身の過去の経験に基づいて、何らかの行為を選択的に採用し、振る舞っている。このとき、あり得る行為の中からある特定の行為が選択されるのは、そこには、たとえ明瞭でなかったとしても、意図が存在するからである。

意図と意志作用の決定的な違いは、前者が、「どんな状況 G を目指しているか」に関する概念であるのに対して、後者は、「どんな行為 A を行おうとしているか」に関する概念であるということである。つまり、意図も意志作用も、どちらも、認識主体の次の行為 A を選択的に決定する機能を有すると考えられるけれど、前者が、 A を選択したことによって G への到達を保証しないのに対して、後者は、 A を選択することそれ自体が重要であり、その結果としてどんな状況に到達するのかに関心を持たない。人は、意図を持っているからこそ、自身の選択した行為の妥当性を評価し、次の行為を修正しようとするフィードバック機構を実現することができるのである。この区別に基づけば、意図という概念は、「機械の中の幽霊のドグマ」という批判には抵触しない。意図は、人の行為選択を制約するものではあるけれど、人の行為選択を一意的に決定するものではないからである。そのため、たとえ意図の概念を想定する場合であっても、我々は、物的世界と心的世界の繋がりについて議論する必要がない。ライル(1987)が、心身二元論を回避するために身体一元論を採用し、「心」を「傾向性」によって掌握しようとしたのに対して、ラディカル構成主義は、認識主体の心のみ存在を仮定し、その外部の物的世界は、認識主体によ

て直接知られ得ないとする心一元論を採用する立場である。

以上より、ラディカル構成主義における同化の概念は、次のように定式化することができる。

- 「A を B に無意図的に同化する」とは、ある対象 A を、意図せず B として取り扱うことであり、記述的文脈において機能する。
- 「A を B に意図的に同化する」とは、ある対象 A を、意図的に B として取り扱うことであり、目的的文脈において機能する。

3.4 攪乱の定式化

Von Glasersfeld (1995b) によると、攪乱とは、ある活動の結果が、予期した結果とは異なっていることを知覚した場合のことである。つまり、認識主体が、自身の活動の結果を、予期した結果に同化できなかった場合のことである (p. 65)。Von Glasersfeld (1995b) は、攪乱や調節を規定するにあたって、行為シエムというモデルを用いる。このモデルは、状況の知覚・活動・予期された結果の3要素からなる (p. 65)。ここでは、同化および方法知という2つの用語を用いて、攪乱という現象を再定式化しよう。

具体例から考えよう。例えば、方程式 $x^2 = 4$ の解を求めるのに、 $x^2 = a$ に対して $x = \pm\sqrt{a}$ とした後、根号の中を簡単化するという方略を使用する学習者がいたとしよう。そして、この学習者が、方程式 $x^2 = 8$ を解くことに直面したとしよう。すると、この学習者にとっての次の活動は、 $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$ という計算となり、解 $x = \pm 2\sqrt{2}$ を得るであろう。

このとき、この学習者の認識過程においては、3つの概念的枠組が機能している。第一に、この学習者は、「 $x^2 = 8$ の解を求めたい状況」を「 $x^2 = a$ に対して $x = \pm\sqrt{a}$ とした後、根号の中を簡単化することで解決できる状況」に意図的に同化している。これは、行為シエムのモデルで言うところの、状況の知覚の段階である。第二に、この学習者は、「自分が実際に行っている計算」を「 $x^2 = a$ に対して $x = \pm\sqrt{a}$ とした後、根号の中を簡単化する手続き」に意図的に同化している。計算途中でこの同化に失敗したとしたら、どこかで手続きを誤ったということであり、この学習者は、一から手順をやり直さなければならないであろう。これは、行為シエムのモデルで言うところの、活動の段階である。第三

に、「 $x = \pm 2\sqrt{2}$ 」を、「方程式の解」に意図的に同化している。これは、行為シエムのモデルで言うところの、期待された結果の段階である。この3つの同化が成功的に達成されて始めて、この一連の過程は成功したと言える。

さて、上記の例の学習者が、今度は方程式 $x^2 = -1$ に直面したとしよう。先ほどと同じ要領で問題解決を行おうとするならば、途中で3つのうちのいずれかの同化に失敗する可能性がある。その同化の失敗が、攪乱である。

何番目の同化に失敗するかを予測することは簡単ではない。例えば、その学習者が、 $x^2 = a$ に対して $x = \pm\sqrt{a}$ とできるためには、 $a > 0$ でなければならないと認識しているなら、それは第一の同化に失敗していると言える。そうではなくて、その学習者が、根号の中を簡単化する中で、根号の中の負の数の取り扱いに違和感を覚えたならば、第二の同化に失敗していると言えよう。あるいは、簡単化行為自体には違和感を覚え、解 $x = \pm\sqrt{-1}$ を得てから、そのような解が実数として存在することに違和感を覚えるようであれば、それは第三の同化に失敗していると言える。このように、同化の失敗には3通りの可能性がある。もちろん、3つの同化のいずれにも失敗しない場合もあり得る。例えば、その学習者が、方程式を解くということを、ある範囲内において方程式を充足する x の値を求めるということではなくて、「方程式の解き方」と言われるものに当てはめて処理するということだと認識してしまっていたとしたら、その場合、その学習者は、虚数なるものの存在を認識しているかどうかにかかわらず、 $x = \pm\sqrt{-1}$ という解を、解として認めてしまうこともあり得るであろう。

以上より、方法知と同化という観点から、攪乱という概念を次のように再定式化することができる。攪乱とは、ある特定の方法知について、

- (i) その方法知の実行を決定する場面、
- (ii) その方法知の実行状況を監視する場面、
- (iii) その方法知の適用が予期通りであるかどうかを判定する場面、

のいずれかの場面で同化に失敗することである。

3.5 調節の定式化

Von Glasersfeld (1995b) によると、調節とは、攪乱が生じた後に生じ得る次の2つの認識過程の総称である。

- 活動の結果が予期した結果と異なっていただけでなく、生じてほしくなかった結果であった場合で、将来、同じ結果が再び生じてしまわないように、その活動の発動条件を変更すること。
- 活動の結果が予期した結果とは異なっていたものの、興味深い結果だった場合で、将来、再びその結果を生じさせることができるように、活動の新しい発動条件を形成すること。

(pp. 65-66)

行為シエムのモデルにおいては、概念的枠組を使用する場所が3箇所存在するのだから、それに対応して、調節も3種類存在する。一般に、調節とは、攪乱が生じた後に生じ得る、次の3種類の認識の変化の総称である。

- (i) 現在の状況を、どのような方法知が適用可能な状況であると見なすかという点で、状況の知覚に関する概念的枠組を修正する。
- (ii) 方法知の実行状況を、どのような規準を満たしていれば予期通りの実行ができていると見なすかという点で、その規準に関する概念的枠組を修正する。
- (iii) 方法知の適用結果が、どのような結果であれば予期通りであると見なすかという点で、その成功判定に関する概念的枠組を修正する。

例えば、先の方程式 $x^2 = -1$ を解く場合でも、3通りの調節の仕方があり得る。タイプ(i)の調節が起こった場合、その学習者は、今後、 $x^2 = -1$ のような方程式に対しては、 $x = \pm\sqrt{a}$ を求める方略を使用せず、別の解決方法を模索するようになるであろう。タイプ(ii)の調節が起こった場合、その学習者は、どのような状態が根号の中が簡単化された状態であるかを見直すことになるであろう。タイプ(iii)の調節が起こった場合、その学習者は、「数」に関する概念的枠組を拡張することで、 $x = \pm\sqrt{-1}$ という解も妥当な解として認めるようになるであろう。現実の学習者がどのタイプの調節を行う傾向にあるのかは、

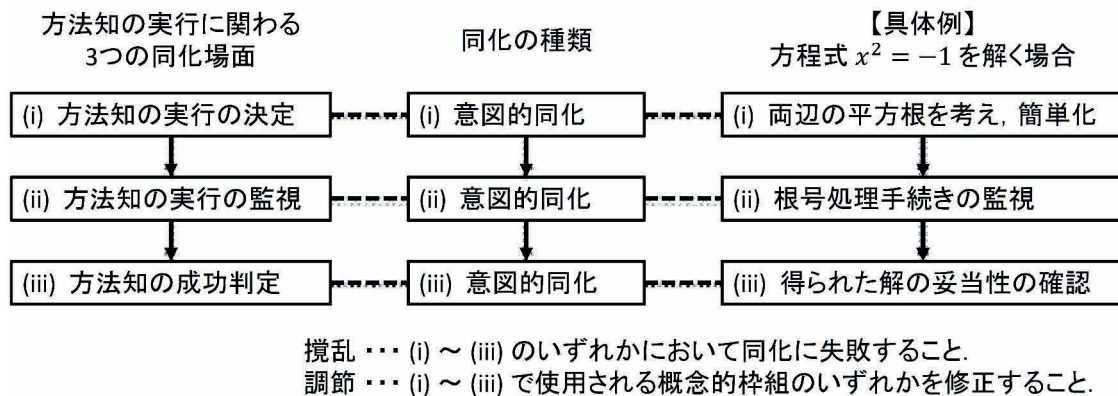


図 2.1 知識・同化・攪乱・調節の関係

実際に調査してみなければわからないけれど、いずれにせよ、論理的には3通りの調節が可能である。

3.6 行為シエムの定式化

最後に、ここまで整理した用語を用いて、改めて行為シエムについて定式化してみよう。ここまで、行為シエムを、状況の知覚・活動・予期された結果の3要素からなるものとして取り扱ってきたが、そのいずれの要素が働く場面であっても、概念的枠組に対する同化・調節・攪乱の組合せの問題に還元して議論することができる。例えば、行為シエムを、式 $x^2 = -1$ を解く場合で考えれば、図 2.1 のようにまとめられる。この具体例を参考にしながら、行為シエムの3要素を定式化していこう。

まず、図 2.1 の (i) は、状況の知覚の段階である。この例において「状況の知覚」とは、問題状況である現在の状況を解決するという目的の下、「現在の状況を、2次方程式を解くべき状況であると見なす」ということである。一般化して述べるならば、行為シエムにおける「状況の知覚」とは、問題状況を解決するという目的の下、「現在の状況を、ある行為をすべき状況であると見なす」ということである。これは、「A を B であると見なす」という型の認識であるから、状況の知覚とは、ある種の概念的枠組の使用でもある。このとき、もし主体が、現在の状況を、どの行為をすべき状況であると見なすべきか判断できないと感じるならば、それは、(ii) へ移行する前に、新たな問題状況を生み出す。

次に、図 2.1 の (ii) は、活動の段階である。これは、選択された方法知が具体的に実行される段階であるが、その方法知の実行が開始されてから終了するまでの間、主体は、何

も考えずに時が過ぎ去るのを待っているわけではない。主体は、その実行結果が期待すべき方向へ向かっていっているかや、その方法知が正しく実行されているかを監視するとともに、その実行状況に応じて実行を中断したり他の手を実行したりしなければならない可能性を念頭に置きながら、方法知を実行していると考えられる。つまり、この例が示すように、行為シエムにおける「活動」とは、問題状況を解決するという目的の下、具体的な方法知を実行すると同時に、「自身の方法知の実行状況を、適切な状況であると見なす」というように、ある種の概念的枠組を使用することである。このとき、もし主体が、自身の方法知の実行状況を、適切な状況であると見なすことができなと感じるならば、それは、(iii)へ移行する前に、新たな問題状況を生み出す。

最後に、(iii)は、予期された結果を検証する段階である。すなわち、選択された方法知の実行結果が、実際に期待した結果通りであったかどうかを検証する段階である。主体は、(ii)の段階において、絶えず自身の方法知の実行を監視しているため、実行途中の段階で、予期した結果が起こらないと判断することもあるであろう。しかし、その一方で、実際にその方法知の実行を完遂してみるまで、その方法知の実行結果が期待通りであったかどうかを判定できない場合もあり得る。つまり、行為シエムにおける「予期された結果」とは、問題状況を解決するという目的の下、「自身の実行した方法知の結果を、期待通りの結果であると見なす」というように、ある種の概念的枠組を使用することである。このとき、もし主体が、自身の方法知の実行状況を、適切な状況であると見なすことができなと感じるならば、それは、新たな問題状況を生み出す。

(i), (ii), (iii)の各過程において、再び問題状況が生じ得るという事態は、「行為シエム」という用語が、一連の方法知や概念的枠組が階層的な構造をなして使用される状況を捉えるための用語であることを示唆する。例えば、図 2.2 は、そうした一連の方法知や概念的枠組が階層的な構造をなして使用される状況についての、あり得る 1 つの例である。

上記のように具体的に考えてみればわかるように、von Glasersfeld (1995b) の「行為シエム」の定式化は、それが哲学的議論の一部としてなされた定式化であったがゆえに、現実に即して考えるといささか大雑把な定式化である。上記の例のような、「方程式を解く」という認知的過程は、確かにある種の行為シエムを形成していると捉えられる。しかし、一方で、「方程式を解く」という認知的過程は極めて複雑な過程であり、単に方程式を解くという過程 1 つとっても、解を得るまでに多数の小さな行為シエムが繰り返し使用

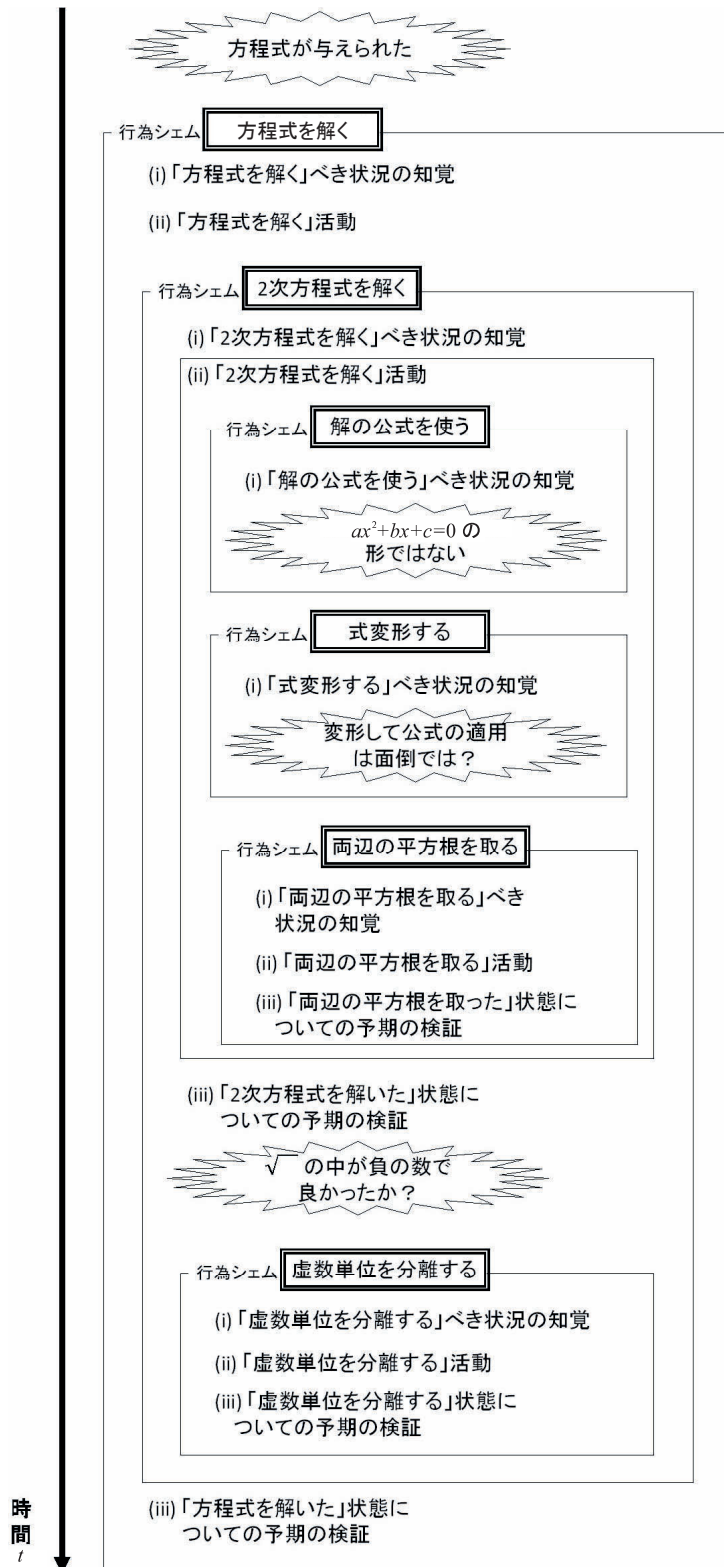


図 2.2 一連の方法知や概念的枠組が階層的な構造をなして使用される状況の例

されていると考えられる。

一般的に述べるならば，ある学習者の振る舞いからどのような行為シエムが働いているかを推定するかは，その推定の目的にとって，どれくらい大きな行為シエムを想定するのが適切であるかに依存して決まる問題である。細かく推定しようと思えば，学習者の振る舞いの変化に合わせて細かく推定することもできるし，粗く推定することがかえって有用な局面であれば，ある程度，学習者の振る舞いを1つにまとめて捉えることで，粗く推定することもできる。すなわち，行為シエムとは，そういった形で使用することのできる，学習者の一連の振る舞いを記述するための理論的枠組である。

4 理論的枠組としてのラディカル構成主義の用途 の分析

第1章第4節にて指摘したように，ラディカル構成主義の学習観は，本研究にとって必要ではあるが，それだけで十分であるわけではない。そこで本節では，前節で定式化したラディカル構成主義が，どのような目的で使用し得る理論的枠組であるのかを分析する。その分析結果を利用することで，本研究にとって必要な理論的枠組を設定するにあたって，ラディカル構成主義に何か補うべき事項があるか，また，あるとすればどのような事項を補うべきであるかを検討する。

4.1 分析方法

本節では，ラディカル構成主義という理論的枠組の使用目的を明確にするために，Radford (2008) の理論観を援用する。特に本節では，数学教育研究においてしばしば注目される状況論 (特に，正統的周辺参加論) の使用目的と対比した分析を行う。以下，本小節では，次の3つの手順で分析方法を論じる。まず，分析時の理論的枠組となる Radford (2008) の理論観とその役割について述べる。次に，その理論観が，ラディカル構成主義それ自身と整合的である点を述べ，本研究は，ラディカル構成主義それ自身を分析するとい

うメタ的な試みにおいても、一貫してラディカル構成主義の立場に立ち続けることができることを論じる。最後に、ラディカル構成主義を分析するにあたって、ラディカル構成主義と正統的周辺参加論を比較することの必要性を指摘する。

(1) Radford の理論観

公正な対比を実現するために、本研究では、Radford (2008) の理論観を (メタ) 理論的枠組^{*5}として援用する^{*6}。Radford (2008) によれば、「理論」とは、

(P) 基本原理

(M) データ収集・解釈の方法論

(Q) パラダイム的リサーチ・クエッション

の3つによって規定され得る。この理論観に基づけば、数学教育における理論とは、(P) に含まれる原理と、(M) を通じて得た情報を合わせることで、(Q) に対する答えを導出する、一連の流れの総体である、と言える。そして、「(Q) に対する答えの追究」が、当該理論の使用目的ということになるであろう。

ある理論 T と関連付けられるリサーチ・クエッション (Q) とは、「パラダイム的」であると形容されるように、ある T の (Q) に対して答えを出すことに価値があると感じられる人達というのは、そもそも T の支持者に限られるのかもしれないし、逆に言えば、その (Q) に価値を感じるからこそ T の支持者になるのかもしれない。しかしながら、その一方で、(Q) に価値があると仮定したときに、その追究にあたって、(P) および (M) の組み合わせが合理的であるかどうかということは、理知的に議論し得る問題であろう。そういう意味で、Radford (2008) の理論観は、素朴なままでは曖昧模糊としたラディカル構成主義や正統的周辺参加論といった「理論」を、同一の枠組で型取り、議論の俎上に載せる共通項を抽出する役割を果たすと言え、ラディカル構成主義や正統的周辺参加論がどのような目的で使用される理論であるのかを分析するにあたって、公正な視座の1つとなり得る。

^{*5} この理論的枠組は、理論的枠組を分析するための理論的枠組であるから、言うなればメタ理論的枠組である。

^{*6} Radford (2008) 自身は、この理論観を、数学教育研究における異なる理論同士の接続の可能性を議論する際に用いている。

(2) ラディカル構成主義と Radford の理論観の整合性

このような分析を行うことは、ラディカル構成主義の考え方と整合的である。ラディカル構成主義の知識観に基づけば、理論的枠組と言えど、数学教育を研究する際の方法知の一種であり、概念的な道具である。しかしながら、ラディカル構成主義の内部には、「理論的枠組」がどのような道具であるかを描き出すために十分な語彙が存在しない。一方、Radford (2008) の理論観は、単に理論的枠組がどういったものであるかを規定しただけのものであり、ラディカル構成主義に含まれる既有概念と何らかの形で論理的に衝突するような性質のものではない。ラディカル構成主義と Radford (2008) の理論観の関係は、例えば、ラディカル構成主義と社会的構成主義のように、同じ「知識」という語を異なる意味で用いる2つの立場という関係ではないので、論理的な衝突は生じ得ないのである。そのため、Radford (2008) の理論観に基づけば、ラディカル構成主義それ自身がどんな目的で使用され得る道具であるのか、ラディカル構成主義の範囲内で語るができるようになる。

このように、自分自身について、自分自身の範囲内で語るができるということは、哲学として重要な要素である。第1章第2節で示した、哲学の第二の役割を踏まえれば、一般的に言って、哲学が原理的に主張し得ないことは、自分自身が、無制限に何にでも役に立つ可能性を秘めた哲学である、ということである。この主張は、その哲学の限界を示そうとするあらゆる批判に対して自己保身的である。つまり、このような主張をする哲学は、万人に対して開かれておらず、哲学として十分に機能しない。したがって、ラディカル構成主義と整合的な Radford (2008) の理論観の併用は、ラディカル構成主義の哲学としての価値を損ねずに実現可能である。

(3) 理論間比較の必要性

ラディカル構成主義という理論的枠組の使用目的を明確にするにあたって、単にラディカル構成主義のみを分析の対象とするのではなく、比較対象として、正統的周辺参加論をも分析の対象とする理由は、数学教育研究における具体的なニーズを、ラディカル構成主義以外にも例示するためである。ラディカル構成主義の限界を例示するにあたっては、例えば、社会的構成主義からラディカル構成主義へ向けられる批判のようなやり方は、適切

ではない。なぜなら、社会的構成主義からラディカル構成主義へ向けられた批判は、ラディカル構成主義に対する社会的構成主義の相対的優位性を示すために、ラディカル構成主義の不備を指摘しようと試みたものであって、ラディカル構成主義がどういう状況下で有用になり得るかを考慮した批判ではないからである。

ある理論的枠組が数学教育研究において有用である、というとき、数学教育研究のありとあらゆる場面においてその理論的枠組が有用であるということとはあり得ない。特定の理論的枠組の万能性の主張は、先に述べたように、批判に開かれておらず、その理論的枠組が哲学としての役割を果たさなくなってしまう。また、そういった主張は、理論的枠組を道具として捉えるラディカル構成主義の観点から見れば、道具の適用可能範囲を過剰に見積もり過ぎた主張であるか、その道具の適用可能範囲のみが数学教育研究の全てであるという過信であるかの、どちらかである。

したがって、本節で示すべき事柄は、次の2点に集約できる。

1. ラディカル構成主義がその有用性を発揮できる数学教育研究の領域が、少なくとも1つ存在すること。
2. ラディカル構成主義がその有用性を発揮できない数学教育研究の領域が、少なくとも1つ存在すること。

前者は、ラディカル構成主義を分析すれば、それで十分であろう。その一方で、後者を示すためには、ラディカル構成主義とは異なる理論的枠組を具体的な比較対象として1つ取り上げて、ラディカル構成主義がその理論的枠組に取って代わることができないということを示す必要があるであろう。したがって、本節では、具体的な比較対象の一例として、正統的周辺参加論(レイヴ & ウェンガー, 1993)を分析する。

また、本研究は、真正な数学的活動を実現するための授業設計ヒューリスティックスの開発に寄与することをその目的とするものであるから、その開発に必要な理論的枠組の要件についても、同様に、Radford (2008)の理論観を用いて示すこととする。こうすることで、本研究に必要な理論的枠組と、理論的枠組としてのラディカル構成主義を明確に比較することができるようになるであろう。

4.2 分析結果

以下、ラディカル構成主義、正統的周辺参加論、そして、本研究に最適な理論的枠組の3つを Radford (2008) の理論観を用いて分析する。

(1) ラディカル構成主義の分析結果

ラディカル構成主義は、真偽で評価できる内容知ではなく、生存可能性によって評価できる方法知に着目する理論であった。生存可能性とは、ある知識を使おうとする傾向性のことであり、その知識の妥当性や知識使用の適時性を問題にした概念ではないのであった。

より具体的に考えてみよう。例えば、 19×21 を $(20 - 1)(20 + 1)$ と因数分解して、 $400 - 1 = 399$ と計算した学習者が、次に 46×53 を見て、一瞬、因数分解しようとするのも、結局は普通に筆算で計算した、という場合を考えよう。このとき、この学習者にとって、因数分解という方法知は、自然数の積を求めたい文脈において生存可能である。今、「 46×53 が $(50 - X)(50 + X)$ の形に因数分解できる」という主張は妥当でないし、 46×53 の計算に因数分解を応用することは適時的であるとは言い難いが、それでも、因数分解という方法知は、この学習者にとって、この文脈において生存可能なのである。

ラディカル構成主義は、「観察される者に共感する [empathize]」(Thompson, 2000, p. 298, 括弧内原語) ことを可能にする理論であった。例えば、熟達者ならば、 46×53 を因数分解しようとする非合理性がすぐに見抜けるのかもしれないが、そういった先見性が発達途上である初学者にとっては、「因数分解できたらラッキーだな」くらいの心づもりで、後先考えずに因数分解を試みるの方が、ある意味で合理的である。このように、ラディカル構成主義は、初学者がある方法知を適時的に使用できなかつたり、非適時的に使用してしまつたりするという事実の裏に潜む、学習者なりの合理性に注目する(例えば、Confrey, 1991)。前節でもレビューした第二次モデルの構築(Ulrich et al., 2014 参照)は、この学習者なりの合理性を理解するための1つの方法論である。

したがって、Radford (2008) の理論観に基づいて整理するならば、ラディカル構成主義は、

- (P) 学習者が学習者なりに最大限合理的に振る舞っていると仮定することで、
- (M) 事例研究を通じて、
- (Q) 「被観察者が、なぜそのように振る舞ったのか？(なぜ適時的な方法知を使用しなかったのか、なぜ非適時的な方法知を使用してしまったのか?)」を探究する

理論である。

(2) 正統的周辺参加論の分析結果

レイヴ & ウェンガー (1993) によって提案された正統的周辺参加論は、「学習を分析的にみる一つの見方であり、学習というものを理解する一つの方法である」(p. 17)。学習は、知識が個人に内化される過程としてではなく、「実践的共同体への参加の度合の増加」(p. 25)として見なされる。正統的周辺参加とは、ある実践的共同体における新参加者が徐々に古参加者へと変容していく過程である。

正統的周辺参加論が「学習と意図的教授とを根本的に区別する」(p. 17)という点は、この理論を数学教育へ適用する際に最も強調されるべき点であろう。教育のカリキュラムと学習のカリキュラムは異なる、とも言われる(pp. 78-80)。学習者の置かれている状況が、学習者をどのような実践に対する古参加者への変容を促しているのかは、教師が意図的に教えようとしていることとは別の問題である。例えば、教師は数学的概念を教えようとしているのかもしれないが、学習者の置かれている状況によっては、学習者は、教師に褒められる人やテストで良い点を取ることができる人になろうとしているだけかもしれない、数学的概念を柔軟に扱える人になろうとしているわけではないかもしれない、と考えるのである。その意味で、レイヴ & ウェンガー (1993) の書名にもなっているように、学習は状況に埋め込まれている (situated learning) とされる。

この理論では、非正統的周辺参加という状態は存在し得ず (p. 10)、実践的共同体内におけるある個人のアイデンティティが、したがって、全人格がどのように変容するかが問題とされる。つまり、この理論に基づけば、数学学習によって構成されるものは数学的对象だけではない。何が構成されるかは、何を教えようとしたかに依存するとは限らない、ということになる。ある授業で教師が教えた数学的对象について、たとえそのときは学習者が構成できなかったとしても、学習者はその授業において何らかのアイデンティティの変容を起こしているのである。このことは、たとえ1回で目標の対象を構成できなかったと

しても、繰り返し同様の指導を受ければ、いつかは対象が構成できるようになる、という考え方が楽観的であることを示唆する。

この考え方に基づけば、学習者が、自身の所属する共同体における活動に加わっていく過程において、徐々にその共同体内部での正統性を増していくならば、それはすべて学習である。これは、初学者が共同体に受容される過程である。

例えば、それまで 19×21 を筆算で解いてきた学習者が、因数分解を教わった後、数学の授業において、 19×21 を工夫して計算するように求められるようになったとしよう。そして、この後、

1. 内心、「筆算で解けるのだから筆算でいいじゃないか」と感じながらも、求めに応じて因数分解で解くようになり、
2. 次第に、求められなくても因数分解で解くようになり、
3. いつしか、初めは首を傾げていた「因数分解で解く方が楽だ」という主張に同意したり、自ら他者に楽であることを伝えるようになったりした

としよう。このとき、これは、この文脈における、あり得る「学習」の一例である。

正統的周辺参加論では、学習の動機が、「共同体の一部になる」(レイヴ & ウェンガー, 1993, p. 97, 強調原文) こととして捉えられる。上記の例で言えば、教師や他の学習者から、より正統的な参加者として承認されることが、学習の動機である。そして、このことは、学習者が授業中に学んでいることが、単に数学ばかりではない、というだけでなく、望ましくないことでさえ学んでいるかもしれないということを意味する。例えば、ある学習者が失敗を恐れ、授業中での活動をどんどん消極的に変化させているとしても、共同体がそれを黙認する限り、その行動の変容は、正統的周辺参加論における学習なのである。

したがって、Radford (2008) の理論観に基づいて整理するならば、正統的周辺参加論は、

- (P) あらゆる学習の動機が共同体の一部になることであると仮定することで、
- (M) 事例研究を通じて、
- (Q) 「学習者が共同体内でアイデンティティをどのように変容させているか？」を明らかにしようとする

理論である。

(3) 本研究に最適な理論的枠組の分析結果

Radford (2008) の理論観に基づけば、ラディカル構成主義は、学習者なりの合理性を仮定することで、既に観察された学習者の振る舞いがどんな動機に基づいていたかを検討可能にする一方、正統的周辺参加論は、学習者の動機を共同体の一部になることであると仮定することで、既に観察された学習者の振る舞いがどんなアイデンティティと結びついているかを検討可能にする。より対比的に述べるならば、ラディカル構成主義と正統的周辺参加論の差異は、人間の知性の取り扱いにある。ラディカル構成主義が学習者なりの合理性を仮定するという事は、学習者は、学習者なりに知的に振る舞っていると仮定するという事である一方で、正統的周辺参加論が共同体への参加の度合いを問題にするという事は、個々の学習者が知的に振る舞っているかどうかを問題にしないということである。正統的周辺参加論においては、共同体への参加の仕方が変容していれば、それが学習者の知性によってもたらされた変容であるか否かにかかわらず、すべて学習なのである。

この2つを念頭において、本研究にとって相応しい理論的枠組を考えよう。真正な数学的活動を考えるにあたって、AM_S の観点を考慮するならば、ラディカル構成主義の基本原理の援用を試みる事が自然であった。しかし、その一方で、ラディカル構成主義の知見を活用することによって、本研究の目的である授業設計ヒューリスティックスの開発を行おうとするならば、ラディカル構成主義という哲学だけでは、授業設計時に有用な情報を得ることができない。

具体的には、ラディカル構成主義単体では、学習者がどのように思考し得るかについて、授業設計段階において予測する手段を具体的に提供できない。本章第3節でも取り上げた第二次モデル (Ulrich et al., 2014) という用語を用いるならば、妥当性の高い第二次モデルを構築する手段が提供できないのである。もちろん、ラディカル構成主義に基づく科学研究として、妥当性の高い第二次モデルが予め知られているならば、それは授業設計時に有用な情報源として機能し得ると考えられる。しかし、実際問題として、ラディカル構成主義に基づく科学研究においては、個々別々の事例において個々別々のモデルが、一般性の保証されない方法によって提案されるに留まっており、どうすれば妥当性の高い第二次モデルを構築し得るのかについては、具体的な提案が行われていない (Sánchez Gómez, 2014)。言い換えれば、ラディカル構成主義は、すべての認識が主観的であると仮

定するため、ある指導を、各学習者がどのように受け止めるであろうかや、次にどのように指導すれば、学習者がどのように受け止め得るかについて、予測する手立てを持たないのである。したがって、本研究にとってラディカル構成主義の知識観は、極めて有用であるように思われるけれど、ラディカル構成主義それ自体は、本研究の目的に対して直接的に有用ではない。もちろん、このことは、ラディカル構成主義の欠点であるというわけではない。そもそもラディカル構成主義の基本原則が有用であるのは、事例研究を方法論として被観察者の振る舞いの理由を知りたい場合であって、授業設計時に授業中に発生し得る学習者の思考を予測したい場合ではないからである。

では、どうでなければならないかという、本研究に最適な理論を、本研究の目標に照らして Radford (2008) の理論観に基づいて描き出すとすれば、次のようではならなければならない。本研究に最適な理論とは、

- (P) 何らかの原理的仮定を置くことで、
- (M) 事例研究から得られる経験的な情報というよりは、「仮設定された学習指導の計画に関する情報」と「指導を受ける予定の個々の学習者の情報」から、
- (Q) 「各学習者がどのように反応し得るか」、そして、「その反応に合わせてどのような追加の指導を計画すべきか」を明らかにしようとする

理論である。つまり、本研究は、ラディカル構成主義とは、少なくともデータ収集・解釈の方法論 (M) およびパラダイム的リサーチ・クエッション (Q) について異なっている。

この違いを意識せずに、ラディカル構成主義の原理 (P) を本研究の理論的原理として設定するならば、

- (P) 学習者が学習者なりに最大限合理的に振る舞っていると仮定することで、
- (M) 「仮設定された学習活動案 A」と「個々の学習者に関する何らかの情報 I」をデータとして、
- (Q) 「各学習者がどのように反応し得るか」、そして、「その反応に合わせてどのような追加の指導を計画すべきか」を明らかにしようとする

理論、ということになるが、このような理論には、無理がある。なぜなら、ラディカル構成主義が有する学習者なりの合理性という原理と、学習指導の計画として仮設定された学

習活動案 A および個々の学習者の情報 I という 3 つの要素からだけでは、 I で特徴付けられるような学習者が、活動 A に取り組む中で、どのような目的で最大限合理的に振る舞うのかが不明なため、予測のしようがない。あるいは、ラディカル構成主義の仮定だけからでは、「 A にどう取り組むかは、学習者が A をどう受け止めるかという主観に依存している」としか言うことができない、と言っても良いであろう。いずれにせよ、ラディカル構成主義単体では、上記の (Q) に答えることができないのである。

以上より、ラディカル構成主義は、本研究にとって必要ではあるが、ラディカル構成主義の原理だけでは、 (Q) に答えることができない。そのため、それを可能とするために、 (P) または (M) に関して、本研究はラディカル構成主義を何らかの形で修正する必要がある、と言える。

5 動機付けに関する仮定を導入したラディカル構成主義

前節における分析結果を踏まえると、 (P) または (M) に関して、本研究はラディカル構成主義を何らかの形で修正する必要がある。本節では、その修正案として、「動機付けに関する仮定を導入したラディカル構成主義」(Radical Constructivism with Motivational Assumptions; 以下、RCMA と略記) を提案する。具体的には、オリジナルのラディカル構成主義が、あらゆる学習者が学習者なりに最大限合理的に振る舞っているということを仮定したのに対して、RCMA は、次のように仮定する。

あらゆる学習者は、共同体の一部となるために、学習者なりに最大限合理的に振る舞っている

下線部が、オリジナルのラディカル構成主義の仮定に対して追加された部分である。以下、このような仮定を原理とする RCMA の合理性を示そう。

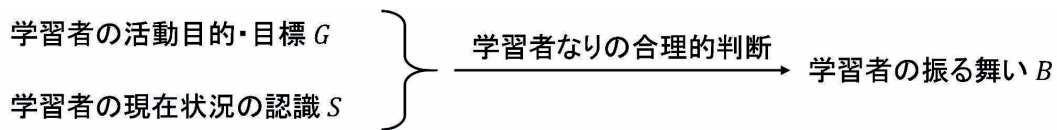


図 2.3 ラディカル構成主義の仮定と諸情報との関係

まず、前節で明らかとなった問題点は、ラディカル構成主義の原理を本研究の理論的原理として設定した場合、ラディカル構成主義が有する学習者なりの合理性という原理と、学習指導の計画として仮設定された学習活動案 A という 2 つの情報からだけでは、 A の中で学習者がどのように振る舞うかを予測することが困難である、ということであった。このことは、換言すれば、学習者が何を目的・目標として A に挑もうとするのか、その動機が不明である、ということができる。

この点について、模式的に示してみよう。ラディカル構成主義が学習者なりの合理性を仮定する、というとき、ラディカル構成主義は、図 2.3 の模式図を想定していると言ってよい。

つまり、ラディカル構成主義の仮定とは、 G および S と B の関係性である上図の矢印部分であって、 G 、 S 、 B のそれぞれについては、何ら仮定がなされていない。また、本節の分析で Radford (2008) の理論観を用いて示したところによれば、ラディカル構成主義とは、観察された学習者の振る舞いから、その振る舞いの理由を探究するために使用可能な理論的枠組であった。この分析結果と、上の模式図を合わせて考えるならば、ラディカル構成主義は、 B を経験的データとして採取した上で、 B から G や S を、矢印の流れに逆らって逆向きに推定するということを支援する理論的枠組である、とも言うことができるであろう。

その一方で、本研究にとって最適な理論的枠組というのは、教室における学習者の振る舞いを予測することを支援する理論的枠組であったから、上の模式図で言えば、順方向を推定することを支援する理論的枠組が必要である。しかしながら、本研究が G や S から B を推定するというとき、 G も S も、学習者の頭の中にある情報であり、かつ、リアルタイムに変化し得る情報であるから、授業の設計段階において、何の仮定もなしにその種の

情報を予測することは難しい*7.

この問題をより精緻なものとするため、授業の設計段階で検討する必要のある事柄を、この模式図に追記していこう。具体的には、教師の視点と学習者の視点を区別しながら、必要な事柄を挙げていく必要がある。

数学の授業を設計する立場からすれば、まずは教師の教育目標 G_T があり、その目標に基づいて仮の学習活動案 A_T を設定する、という段階があるはずである。ただし、 G_T を達成するための活動案は、現在のところ、何らかの基準の下で機械的に一意に定められるわけではない。 G_T に対する最適な A_T は、これまでに得られている、ありとあらゆる数学教育研究の成果を総動員したとしても決定できないであろう。そういう意味で、この活動案を創出する過程そのものは、良かれ悪しかれ授業設計者の創造性に委ねられている。次に、授業設計者の創意工夫によって生み出された、その A_T を具体的に実施した場合、教師から見て教室においてどのような状況 S_T が生じるかを検討する段階があるであろう。ラディカル構成主義の立場から見れば、この S_T は、あくまでも教師から見た状況の理解であるから、教師が見て S_T に見える今の状況が、学習者から見ても同じように S_T に見えるとは限らない。そのため、ここで視点を切り替えて、学習者から見て S_T がどのように解釈され得るかを検討する必要がある。便宜上、学習者から見た状況を S_L と表現することになると、 S_L は、学習者自身が有する活動目的・活動目標 G_L に一定程度左右されるものと考えられる。つまり、学習者が何をどうしたいと感じているかによって、教師から見て同じ場面であっても、学習者がその場面をどのように解釈するかが変化し得る。

このような過程を経て S_L が決定されると、ラディカル構成主義の仮定より、学習者はその学習者なりに合理的に判断し、その判断の帰結として、振る舞い B を見せる。この B は、教師による「評価」と密接に関わってくる。もちろん、教師によって直接観察可能な B だけを形式的に評価することが妥当であるとは限らないから、 S_L 、 G_L 、 B の3つの全体を、学習者の主観的認識であると考えて、ここで生じた認識を学習成果 R として捉えることにしよう。このとき、 R は、 A_T という活動案の下で学習者が学び得る知識であると捉えることができる。したがって、授業設計者は、この R が、当初の教師の教育目標 G_T に

*7 なお、第1章第3節で示したように、構成主義は、この G や S が、数学教師の素朴なイメージとは随分と異なる様相であり得ることを明らかにしてきたと言える。そういう意味でも、 G や S を直接予測することは難しいと言える。

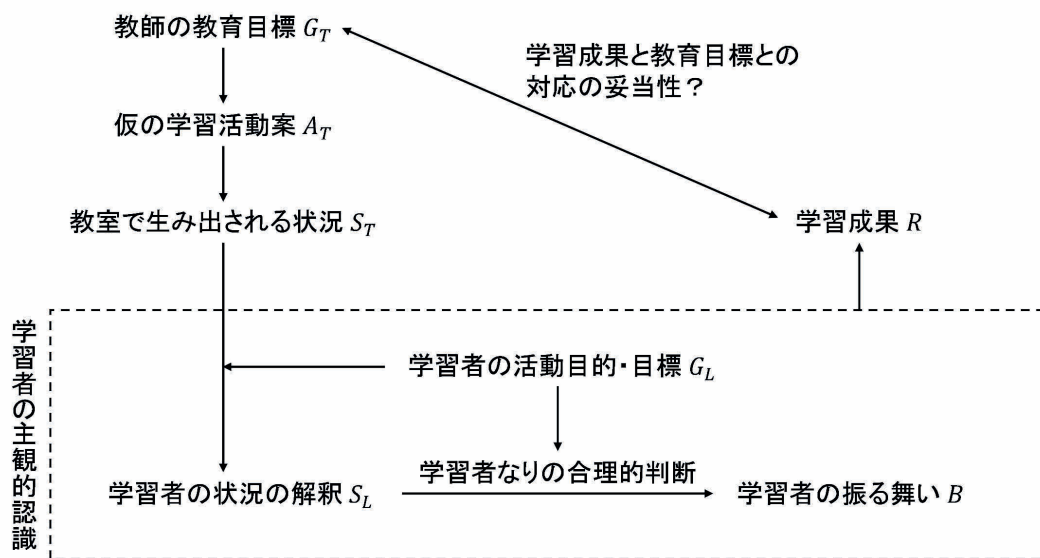


図 2.4 授業設計場面を想定したラディカル構成主義の仮定と諸情報との関係

照らして妥当であるかを検討することで、創意工夫によって生み出した A_T が妥当であるかどうかを判断することができるであろう。ここまでの一連の流れを図示すると、図 2.4 のようになる。

この一連の流れに従う A_T の判断は、

1. 実際に授業を実施してみて、実際の学習者の振る舞い B を見てから行われる場合もあれば、
2. 実際に授業を実施する前に、学習者の振る舞い B を設計者の経験や先行する数学教育研究の成果に基づいて予測することで、考案した A_T を実際に実施するかどうかを決断するために行われる場合

もあるであろう。本研究は、授業設計のヒューリスティックスの開発に関心があるから、この模式図に照らして述べるならば、いかにして A_T を考案するかに関心があるのであり、上記の 2 の場合に特に関心がある、と言える。

ところが、こうした目的でラディカル構成主義を利用する際の最大の問題は、結局のところ、学習者の認識はすべて主観的である、という点である。つまり、 S_T と S_L が一致するとは限らないと言ってしまふ点にある。このことは、同じ時間と場所を共有する教師と学習者について、一方が数学の授業をしている状況であると認識していながら、他方が

食べ放題のレストランでひたすら料理を食べまくる状況であると認識しているかもしれない、などという荒唐無稽な可能性を考慮する必要性を指摘しているわけではなくて、もちろん、本来の意図としては、教師が素朴に想定しているほどには S_T と S_L が一致しているわけではないことを指摘しているだけである。 S_T と S_L がある程度似通っている可能性は大いに有り得る。しかしながら、一致するとは限らない以上、 S_T を基準にして S_L を予測することは、ラディカル構成主義の仮定だけからでは原理的に困難である。

ここで注意すべきは、この「 S_L の予測が原理的に困難である」とは、予測をしてしまうと、ラディカル構成主義の基本原則と矛盾する、ということではないことである。ラディカル構成主義は、元々、事例研究を通じてこの S_L の多様性や意外性に光を当ててきた理論的枠組であるから、ラディカル構成主義がどんな S_L があり得るかについて制約をほとんど設けてこなかったことは、その用途からすると本来的に当然のことである。事例研究における研究者の事例解釈に対する自由度を確保するために、 S_L の可能性に制約をかけることは重要なことであった。しかしながら、本研究の目的からすれば、このことは、その自由度が高過ぎるがゆえに、 S_L を予測しかねる という事態を引き起こしてしまっている。つまり、「 S_L の予測が原理的に困難である」とは、どんな予測であっても、ラディカル構成主義の仮定と一切矛盾せず、それゆえに、どんな荒唐無稽な予測であっても、原理的には、妥当であり得る予測である、と言ってしまう点にある。授業設計のヒューリスティックスを開発するという視点から、本研究において必要な理論的枠組は、本来のラディカル構成主義よりも、 S_L の可能性について、ある程度制約が設けられていた方が授業設計の道具として有用である。それは、考慮するまでもない荒唐無稽な予測をしてしまうことを回避し、より妥当性が高そうな S_L の候補のみを評価対象とすることができるようにするために必要な制約なのである。

そこで、この問題を解消するために、追加的な仮定を導入する。特に、その追加的な仮定として、本研究は、正統的周辺参加論から「動機付けに関する仮定」を援用する。前節で明らかにしたことによれば、正統的周辺参加論は、「あらゆる学習の動機が共同体の一部になることである」という原理を有する理論的枠組である。本研究では、この仮定を、ラディカル構成主義に追加して用いる。

ラディカル構成主義は、哲学として、仮定できる範囲のことしか仮定しなかった。これは、ラディカル構成主義それ自身が、数学教育に関して経験的事実として科学的に知られ

ていることを、ほとんど何も仮定していないということの意味する一方、 S_L の可能性をどのようにして制約するかについては、経験的事実に即して仮定を追加することが妥当であると言えよう。そうした経験的事実に即した仮定の1つが、正統的周辺参加論の動機付けに関する仮定である。

もちろん、ラディカル構成主義も、これまで、経験的事実に即した示唆に富む情報を発信してきている。しかしながら、例えば、Ulrich et al. (2014) がそうであったように、ラディカル構成主義に基づく数学教育研究が明らかにしてきたことは、個別具体の学習者に関する情報や個別具体の指導内容に関する情報が主である。つまり、ラディカル構成主義は、個別具体の学習者や個別具体の指導内容に依存しないような、一般的な授業設計ヒューリスティックスの一部として採用可能な情報については、扱ってこなかったと言える。そこで、ラディカル構成主義以外の立場に基づく研究から、経験的事実に即した仮定を援用する必要がある。ラディカル構成主義以外の立場として、正統的周辺参加論を選択しなければならない絶対的な理由は存在しないけれど、ラディカル構成主義者であったCobb (1994) が、この正統的周辺参加論の帰結を、ラディカル構成主義と相補的に捉えるべきであると指摘していることから、正統的周辺参加論からの援用は、1つの試みとして価値のある試みであると言えよう。

ただし、Cobb (1994) と異なり、本研究は、正統的周辺参加論全体をラディカル構成主義と相補的に捉えるのではなく、正統的周辺参加論の動機付けに関する仮定のみをラディカル構成主義の仮定に追加的に導入するに留める。その理由は、相補的に捉えてしまうと、理論的整合性を保てなくなってしまう (Lerman, 1996) というのも然ることながら、そもそも、本研究の目的の下では、正統的周辺参加論のすべてのアイデアが必要というわけではないからである。正統的周辺参加論の動機付けに関する仮定は、追加的に導入したとしても、ラディカル構成主義の有する自由度を下げるだけで、ラディカル構成主義の元々の仮定と矛盾するわけではなく、取り急ぎ、本研究の目的の下では、その動機付けに関する仮定さえあれば良いから、その仮定のみを取り上げて導入することとする。これは、Cobb (1994) による指摘、すなわち、ラディカル構成主義の概念形成論が、学習者が数学的対象と理想的に向き合っている状況を暗黙裡に仮定している、という指摘を、乗り越えるために有益な仮定である。

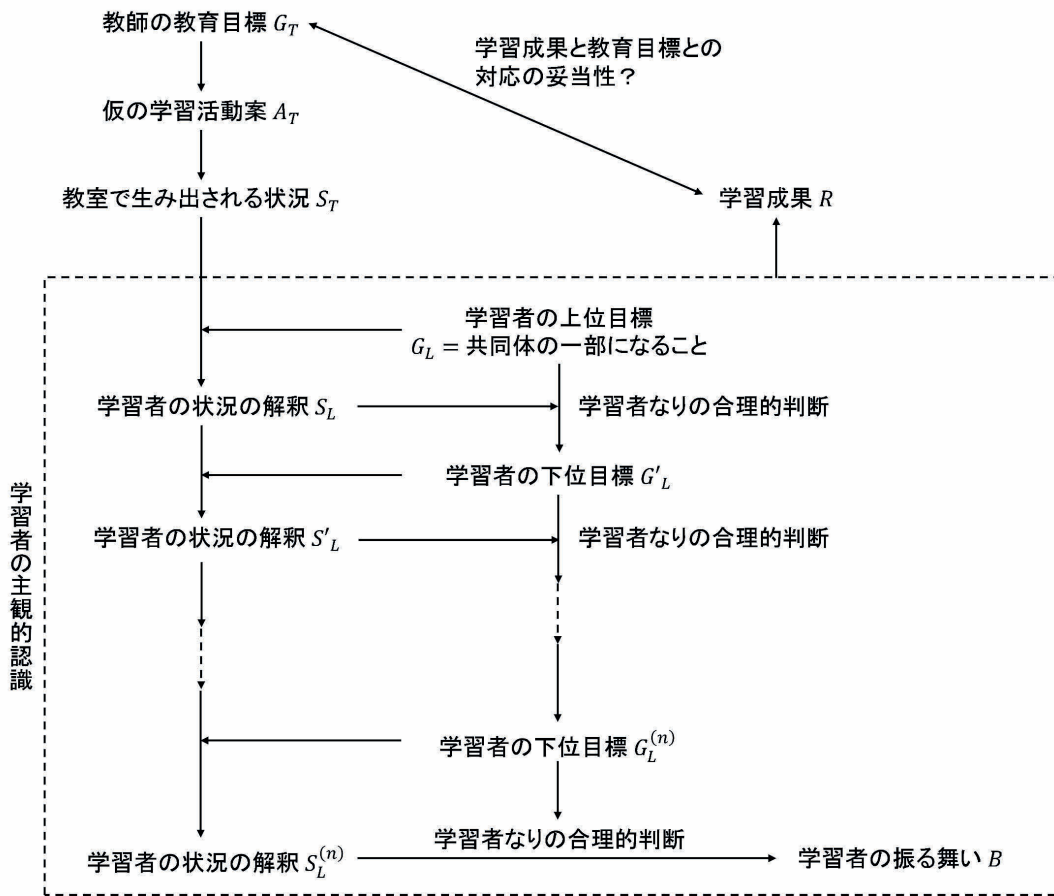


図 2.5 動機付けに関する仮定を導入した場合におけるラディカル構成主義の仮定と諸情報との関係

動機付けに関する仮定を踏まえて、図 2.4 を修正すると、図 2.5 のようになる。具体的には、図 2.4 の学習者の目的・目標 G_L に相当する部分が、図 2.5 においては、上位目標 G_L と下位目標 $G'_L, \dots, G_L^{(n)}$ とに分かれている。学習者の上位目標は、動機付けに関する仮定より、共同体の一部になることとして常に固定されていると考える。その上で、共同体の一部になるために、学習者は適宜下位目標を $G'_L, G''_L, G'''_L, \dots, G_L^{(n)}$ と生成する。また、下位目標を生成するにあたっては、それよりも相対的に上位の目標に照らして状況を解釈し、その状況において学習者なりに合理的に下位目標を生成している、と考える。下位目標の生成という行為も、頭の中で完結する行為ではあるものの、振る舞い B と同等の行為であると考え、状況と目標に依存して決定される行為であると考えるのである。

本研究では、ラディカル構成主義の仮定の上に、正統的周辺参加論における動機に関する仮定を導入した理論的枠組を、動機付けに関する仮定を導入したラディカル構成主義

表 2.3 ラディカル構成主義 (RC), 正統的周辺参加論 (LPP), RCMA の対比

理論	学習者の 動機	主観的 合理性	参加の 度合い	設計された 学習活動案	学習者の 振る舞い
RC	【?】	仮定	-	-	データ
LPP	仮定	-	【?】	-	データ
RCMA	仮定	仮定	-	データ	【?】

【?】: その理論におけるリサーチ・クエッション

「-」: その理論において特に問われない内容

「仮定」: その理論において仮定される内容

「データ」: その理論においてデータとして収集される内容

(Radical Constructivism with Motivational Assumptions), 略して, RCMA と呼ぶこととしよう。ラディカル構成主義, 正統的周辺参加論, RCMA を対比的に示すと, 表 2.3 のようになる。RCMA は, 教師の教育目標や活動案をデータの一部と考え, 授業設計者や教師が学習者の振る舞いを予測することを支援するための理論的枠組である。

なお, Lerman (1996) は, ラディカル構成主義と正統的周辺参加論の併用は無意味であるという。なぜなら, ラディカル構成主義においては, 学習者が共同体に影響されるかどうかの主観に依存すると言わざるを得ないからである。しかし, この批判は, 学習者の目的が構造化されていない前提で, 共同体の一部になることが目的になったり, ならなかったりすると考える場合にのみ成立する。RCMA では, 学習者の目的は構造化され, 共同体の一部となることが常に最上位目的として固定されており, その範囲内で学習者が学習者なりに合理的に振る舞っていると仮定されるので, この批判は当てはまらない。

RCMA の理論としての特徴を Radford (2008) の理論観に基づいて整理するならば, 次のようにまとめられるであろう。RCMA は,

- (P) 共同体の一部となるために学習者なりに合理的に振る舞うものであると仮定することで,
- (M) 仮設定された学習指導の計画に関する情報から,
- (Q) 「各学習者がどのように反応し得るか」, そして, 「その反応に合わせてどのような追加の指導を計画すべきか」を明らかにしようとする

理論である。本研究では、この RCMA を理論的基盤として設定することで、授業設計ヒューリスティックスの開発を行っていくこととする。

6 第2章のまとめ

本章では、真正な数学的活動を議論する際に有用な学習観を理論的枠組として定式化することを試みた。本章では、特に、ラディカル構成主義を定式化するとともに、RCMA という理論的枠組を新しく提起した。以下、本章の内容を、順を追ってまとめてみよう。

まず、本研究では、学習観の基礎をラディカル構成主義に求めることが最適であるとの判断から、ラディカル構成主義の詳細なレビューを行った。そして、ラディカル構成主義の学習観を理解する上で重要な6つの概念、知識・生存可能性・同化・攪乱・調節・行為シエムをそれぞれ定式化した。

第一に、知識については、次のように定式化された。

- どんな種類の知識も、すべて、何らかの目的を果たすために使用される暗黙的な方法知として捉える。
- 妥当性の保証されていないような「知っていること」も、それが何らかの目的を果たすために使用されるならば、暗黙的な方法知である。
- ある方法知が絶対的真理を反映しているということは、ある認識主体がその方法知を使用するための必要条件でも十分条件でもない。暗黙的な方法知は、常に仮説の状態で使用される。
- 主体は、環境の制約の範囲内で自由に方法知を構成することができる。

第二に、生存可能性については、次のように定式化された。

- ある目的的文脈または記述的文脈において、ある認識主体にとってある知識が生存可能であるとは、その主体が、将来の同種の文脈においてその知識を使用する傾向性を有する場合のことを言う。

- 生存可能性の概念とは、方法知を評価するための概念であり、内容知を評価するための真理概念と区別されるべき概念である。

第三に、同化については、次のように定式化された。

- 「A を B に無意図的に同化する」とは、ある対象 A を、意図せず B として取り扱うことであり、記述的文脈において機能する。
- 「A を B に意図的に同化する」とは、ある対象 A を、意図的に B として取り扱うことであり、目的的文脈において機能する。

第四に、攪乱については、ある特定の方法知について、次のいずれかの場面で同化に失敗することとして定式化された。

- (i) その方法知の実行を決定する場面
- (ii) その方法知の実行状況を監視する場面
- (iii) その方法知の適用が予期通りであるかどうかを判定する場面

第五に、調節については、攪乱が生じた後に生じ得る次の3種類の認識の変化の総称として定式化された。以下の3種類の調節は、3種類の攪乱とそれぞれ対応する。

- (i) 現在の状況を、どのような方法知が適用可能な状況であると見なすかという点で、状況の知覚に関する概念的枠組を修正する。
- (ii) 方法知の実行状況を、どのような規準を満たしていれば予期通りの実行ができていると見なすかという点で、その規準に関する概念的枠組を修正する。
- (iii) 方法知の適用結果が、どのような結果であれば予期通りであると見なすかという点で、その成功判定に関する概念的枠組を修正する。

第六に、行為シエムについては、オリジナルの von Glasersfeld (1995b) の「行為シエム」の定式化をさらに発展させる形で、ある学習者の振る舞いからどのような行為シエムが働いているかを推定するかは、その推定の目的にとって、どれくらい大きな行為シエムを想定するのが適切であるかに依存して決まる問題であることを指摘した。細かく推定しようと思えば、学習者の振る舞いの変化に合わせて細かく推定することもできるし、粗く推定

することがかえって有用な局面であれば、ある程度、学習者の振る舞いを1つにまとめて捉えることで、粗く推定することもできる。行為シエムとは、そういった形で使用することのできる、学習者の一連の振る舞いを記述するための理論的枠組である。

こうした用語の定式化を経て、ラディカル構成主義が元々どのような目的で使用されてきた理論的枠組であるのかを分析した。その結果、ラディカル構成主義は、

- (P) 学習者が学習者なりに最大限合理的に振る舞っていると仮定することで、
- (M) 事例研究を通じて、
- (Q) 「被観察者が、なぜそのように振る舞ったのか？(なぜ適時的な方法知を使用しなかったのか、なぜ非適時的な方法知を使用してしまったのか?)」を探究する

理論であるということが明らかとなった。しかしながら、本研究においては、知識観としてラディカル構成主義が重要である一方で、上の条件を満たすだけの理論では、教室において真正な数学的活動を実現するための授業設計ヒューリスティックスを検討するという本研究の目的を果たすことが難しい。

そこで本章では、その問題点を解消する新しい理論として、動機付けに関する仮定を導入したラディカル構成主義 (RCMA) を提唱した。その特徴は、次のようにまとめられるであろう。RCMA は、

- (P) 共同体の一部となるために学習者なりに合理的に振る舞うものであると仮定することで、
- (M) 仮設定された学習指導の計画に関する情報から、
- (Q) 「各学習者がどのように反応し得るか」、そして、「その反応に合わせてどのような追加の指導を計画すべきか」を明らかにしようとする

理論である。

ただし、この RCMA を用いるだけでは、一般的な学習の指導計画を設計するのに有用であるだけで、とりわけ数学の学習の指導計画を設計するのに有用であるとは言い難い。そこで、次章では、RCMA と整合的な数学的活動観を明確化する。

第2章の引用・参考文献

- Cobb, P. (1994). Where Is the Mind? Constructivist and Sociocultural Perspectives on Mathematical Development. *Educational Researcher*, 23(7), 13-20.
- Confrey, J. (1991). Learning to Listen: A Student's Understanding of Powers of Ten. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 111-138). Springer Netherlands.
- Dennett, D. (2002). Re-introduction of The Concept of Mind. *The Electronic Journal of Analytic Philosophy*, 7. Retrieved from <http://ejap.louisiana.edu/>
- Dykstra, D. I. (2010). What can we learn from the misunderstandings of radical constructivism? Commentary on Slezak's "radical constructivism: Epistemology, education, and dynamite". *Constructivist Foundations*. 6(1). 120-126.
- Ernest, P. (1993). Constructivism, the psychology of learning, and the nature of mathematics: Some critical issues. *Science & Education*, 2. Kluwer Academic Publisher. pp.87-93.
- Ernest, P. (2012). What is our first philosophy in mathematics education? *For the Learning of Mathematics*, 32(3), 8-14.
- Goldin, G. A. (2003). Developing complex understandings: On the relation of mathematics education research to mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 54(2-3), 171-202.
- ハンソン, N. R. (1986). 『科学的発見のパターン』. (村上陽一郎 訳). 講談社.
- Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics education. In J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-27). Montreal, Canada.
- ラカトシュ I. (1986). 『方法の擁護：科学的研究プログラムの方法論』(村上陽一郎・井

- 山弘幸・小林傳司・横山輝雄 訳). 新曜社.
- レイヴ, J., & ウェンガー, E. (1993). 『状況に埋め込まれた学習：正統的周辺参加』(佐伯胖 訳). 産業図書.
- Lerman, S. (1996). Intersubjectivity in mathematics learning: A challenge to the radical constructivist paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 133-150.
- Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM*, 40(2), 317-327.
- ライル, G. (1987). 『心の概念』(坂本百大・宮下治子・服部裕幸 訳). みすず書房.
- Sánchez Gómez, P. J. (2014). Methodological Issues of Second-order Model Building. *Constructivist Foundations*, 9(3), 344-346.
- Smith, J. P., diSessa, A. A., & Roschelle, J. (1994). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences*, 3(2), 115-163.
- Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000b). Interaction or intersubjectivity? A reply to Lerman. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 191-209.
- Steffe, L. P., von Glasersfeld, E., Richards, J., & Cobb, P. (1983). *Children's counting types: philosophy, theory, and application*. Praeger.
- Thompson, P. W. (2000). Radical Constructivism: Reflections and Directions. In L. P. Steffe & P. W. Thompson (Eds.), *Radical Constructivism in action: Building on the Pioneering Work of Ernst von Glasersfeld* (pp. 291-315). Routledge.
- Tillema, E. S., Hackenberg, A. J., Ulrich, C., & Norton, A. (2014). Authors' Response: Interaction: A Core Hypothesis of Radical Constructivist Epistemology. *Constructivist Foundations*, 9(3), 354-359.
- Ulrich, C., Tillema, E. S., Hackenberg, A. J., & Norton, A. (2014). Constructivist Model Building: Empirical Examples From Mathematics Education. *Constructivist Foundations*, 9(3), 328-339.
- Von Glasersfeld, E. (1990a). An Exposition of Constructivism: Why Some Like It Radical. In R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Constructivist Views on the*

- Teaching and Learning of Mathematics (Journal for Research in Mathematics Education. Monograph Vol. 4)* (pp. 19-29). National Council of Teachers of Mathematics.
- Von Glasersfeld, E. (1990b). Distinguishing the Observer: An Attempt at Interpreting Maturana. In V. Riegas & C. Vetter (Eds.), *Zur Biologie der Kognition* (pp. 281-295). Frankfurt, Germany: Suhrkamp. Retrieved from <http://www.vonglasersfeld.com/>
- Von Glasersfeld, E. (1992). Constructivism reconstructed: A reply to Suchting. *Science & Education*, 1(4), 379-384.
- Von Glasersfeld, E. (1995a). A constructivist approach to teaching. In Steffe, L. P. & Gale, J. E. (Eds.) *Constructivism in Education*(pp. 3-15). Routledge.
- Von Glasersfeld, E. (1995b). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. The Flamer Press.
- Von Glasersfeld, E. (1995c). Sensory experience, abstraction, and teaching. In L. P. Steffe & J. Gale (Eds.), *Constructivism in education* (pp. 369-383). Routledge.
- Wheeler, D. (1987). The world of mathematics: Dream, myth or reality? In J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 55-66). Montreal, Canada.

第3章

個人による数学的活動の本性

本章では引き続き、本研究における研究方法1，すなわち，真正な数学的活動を議論するために必要な理論的枠組の定式化に取り組む。特に本章では，研究方法1の第二の着眼点として，個人による活動の中にどのような特徴が見出されれば数学的活動であるとみなすことができるのか，前章で設定した理論的枠組 RCMA の範囲内で構築可能な数学的活動観について議論する。

1 第3章の論点

研究背景でも述べたように，近年の数学教育研究においては，社会的構成主義と呼ばれる立場を中心として，数学的知識や数学的方法を社会・文化的な所産とする見方が一般的となってきた。これは，数学的な内容知が経験世界を超越した真理であると見なしたり，数学的な方法知がそのような真理を追究する方法であると見なしたりするような絶対的数学観に対して，数学的な内容知や数学的な方法知が，人間社会や人間文化に依存して決定すると考える相対的数学観である。

例えば，教室においてどのような説明や正当化が受容され得るかについての社会数学的規範の存在 (Yackel & Cobb, 1996) や，学習者達が証明の必要性を実感するにあたって，教

師が数学の文化を主体的に仲介する必要性 (Zaslavsky, Nickerson, Stylianides et al., 2012) が指摘されている。別の例としては、数学的な内容知の客観性の規準を社会的な協定に求める立場も一般的である (例えば, 國本, 2009a, 2009b; 中原, 1994, 1995a, 1995b)。数理哲学としての社会的構成主義 (Ernest, 1998a) が広く受容されるにつれ、数学的对象の存在論でさえも社会的視座から議論されるようになった (Font, Godino, & Gallardo, 2013)。

しかしながら、内容知や方法知の社会依存性は、何も数学に限った話ではない。確かに数学的な内容知や数学的な方法知にもそのような特性があるけれども、それはすべての内容知や方法知について言えることである。この点は、「[種々の構成主義が] (意図的に、あるいは、意図せずに) 『客観的』な数学的真実や妥当性のまさにその可能性を捨て去ることによって、[数学の本性に関する] 問題を解決したと主張している」(Goldin, 2003, p. 189, [] 内筆者) という批判に関連する問題である。数学的な内容知や数学的な方法知の社会依存性を主張する数学観からは、どのような営みが数学に固有の妥当性をもたらすのかについて、直ちに明確な解答を与えられない。このような認識論研究においては、岡崎 (2012) が指摘しているように、それが教科教育一般ではなく数学教育の議論であるために、研究の背後に据えられた数学の本性を明確に特徴付けることが求められる。これは、前章で設定した理論的枠組 RCMA に対しても当てはまる問題である。

そこで本章は、数学教育でしか育み得ないものに対する直接的な示唆を明確にするために、数学的な内容知や数学的な方法知の個人的構成の過程や社会的構成の過程において、何が数学に固有の妥当性を生み出すのかを検討する。その上で、 AM_p の意味で真正な数学的活動が、具体的にどのような様相の活動であるのかを明らかにする。

2 数学的知識および数学的方法の社会・文化依存性

本節では、数学的知識や数学的方法の社会依存性について議論している代表的な研究を取り上げ、それらの研究が、数学の固有性をどの程度説明し、また、どの程度説明できないのかを明確にする。以下では、数学の正当化の方法が社会や文化に依存しているとする研究と、数学的知識の妥当性の規準 (criterion) が社会や文化に依存しているとする研究を

それぞれ取り上げて批判的に検討しよう。もちろん、数学的方法としては、方程式の解き方や図形に対する補助線の引き方など、様々な方法が考えられるが、ここでは、特に数学の正当化の方法に着目する。また、数学の規準としては、数学的な美しさや数学的な面白さなど、様々な規準が考えられるが、ここでは、特に数学的知識の妥当性の規準に着目する。なぜなら、数学の正当化の方法と数学的知識の妥当性の基準は、これまでの先行研究において、数学的知識および数学的方法の社会・文化依存性を議論するために度々取り上げられてきた主題だからである。

2.1 数学における正当化の方法の社会・文化依存性

Hanna (1991) によると、新しい定理が数学者達に受容される規準として、その定理の証明の厳密性よりも優先される規準が存在する。数学者が実際に読み書きする証明は完全な演繹の連鎖になっておらず、その理由は、「[数学者の] 専門的知識と経験が、もし詳細を埋めなければならなかったとしたら、簡単にできるであろうことを彼女に教えるから」(Fallis, 2003, p. 64, [] 内筆者) であると言われている。つまり、数学者にとって「過剰な詳細は退屈」(Lehman, 1980, p. 35) なので、証明は、必要に応じて詳細を埋めるのに十分な情報を含んでいれば証明と見なされるのである。このような規準は、証明を通じたコミュニケーションを円滑にする役割を果たしていると考えられる一方で、証明が証明として適格であるということが、証明の内容それ単独では決定され得ないこと、つまり、それゆえに社会的・文化的要素がその適格性の決定に影響し得ることを示唆している。

数学者社会においてですら、証明の適格性の決定に社会的・文化的要素が影響する状況である以上、数学の学習者が、何が数学的に妥当な説明や論証であるのかについて、社会的・文化的な影響の下で学んでいると考えることは自然である。実際、例えば Yackel & Cobb (1996) が描き出したように、教室においてどのような説明や正当化が受容され得るかや何が共有されたと見なされるかについては、教師と生徒達によって絶えず相互作用的に再生成され、修正され、その過程を通じて、生徒達は数学における知的主体として発達していく。そのため、何が妥当な数学的論証であるかを教室の外側から予め決定された規範として導入することができないとされる (p. 474)。

これらの指摘は、単に数学における正当化の方法に関する 1 つの現実として、社会・文化に依存しているように見える側面が存在する、ということを超えて、数学教育の実践に

対して示唆を有する。例えば、学習者はしばしば証明の必要性を実感することができないので、学習者達が証明の必要性を実感するにあたっては、教師が数学の文化を主体的に仲介する必要性が指摘されている (Zaslavsky et al., 2012)。また、「証明」という概念は、それが明瞭に定義可能な概念ではないことから、何が証明らしさ (proof-like) で、何が証明らしくなさ (non-proof-like) であるかを文化化 (enculturation) に基づいて学ぶことが最善であろうという指摘もある (Weber, 2014, pp. 12-13)。

2.2 数学における知識の妥当性の規準の社会・文化依存性

社会的な協定に基づいて知識がある意味で妥当なものになると捉える代表的な先行研究としては、Ernest (1998a), 國本 (2009a, 2009b), 中原 (1994, 1995a, 1995b) などが挙げられる。これらは、いずれものラカトシュ (1980) の可謬主義的数学観を援用している (例えば, Ernest, 1998a, 4 章; 國本, 2009b, p. 30; 中原, 1995b, p. 72)。

ラカトシュ (1980) は、数学が「補題組み込み法」と呼べるような数学的発見の論理 (Logic of Mathematical Discovery; 以下, LMD) によって展開されてきたことを指摘する。その中心的な方法は次のように規則化されている (p. 60, p. 70, p. 93 参照)^{*1}。

[規則 1] 推測を得たら、その証明に着手し論駁せよ。あたりまえではない補題のリストを準備するため証明を注意深く点検せよ (証明分析); 推測に対する反例 (大局的反例) と疑わしい補題に対する反例 (局所的反例) を見いだせ。

[規則 2] 大局的反例が推測を放棄させてしまうようなら、証明分析に反例で論駁されてしまう適当な補題を加え、放棄された推測をその補題を条件として組み込んでいる改良された推測で置き換えよ。論駁をモンスターとして片づけるな。すべての「隠れた補題」を明らかにせよ。

[規則 3] 局所的反例を得たなら、それがまた大局的反例でないかどうか点検せよ。もしそうなら、容易に規則 2 が適用できる。

[規則 4] 局所的であるが大局的でない反例を得た時には、反証されない補題で論駁された補題を置き換え、証明分析を改良せよ。

^{*1} これらの規則は、原文ではすべて強調表示されているが、ここでは見やすさのためにすべての強調を外した。

[規則 5] もしいかなる型であれ反例を得ているならば、演繹的推量によって、それらの反例がもはや反例ではなくなるようなより深い定理の発見に努めよ。

Ernest (1998a) が Kuhn の科学革命に似たような状況をも説明できるようにその LMD を一般化している点 (pp. 149-160) を除けば、Ernest (1998a)、國本 (2009a, 2009b)、中原 (1994, 1995a, 1995b) は、いずれもラカトシュ (1980) の数学観・方法論に対して賛同的な立場であり、そこでは、数学的知識は常に論駁可能性にさらされ続けるものと見なされる。また、数学的知識の客観性は社会的協定や集団内の間主観性によって再定義される。

これらの研究においては、客観性を再定義するがゆえに、主観的な数学的知識を客観的な数学的知識にするためには、社会的なプロセスが本質的に必要であると見なされる。つまり、主観的知識の公表が、十分ではないが、必要であると見なされる。数学の正当化の方法が社会に依存しているという点と合わせて考えるならば、その時々時代の・社会的制約の下で数学的知識は正当化され、知識として確立されてきたと捉えられる。

2.3 社会・文化的視座における成果と課題

このように、数学の正当化の方法や数学的知識の妥当性の規準が社会的・文化的要素に依存しているという事実は、数学教育研究において一般的な見方となってきた。加えて、岡崎 (2012) の数学教育研究における認識論研究の総括によれば、知識の主観性を主張するラディカル構成主義 (von Glasersfeld, 1995b) のような立場でさえも社会の影響を考慮せざるを得なくなってきたと言われる。数学教育研究をする以上、学習者の認識に対する社会的な影響を考慮することが重要なのである。

これらの社会的な観点から共通に得られる重要な成果としては、

1. 数学が絶対的に不可謬な知識体系ではなく、他の学問分野と同様に人間同士の相互作用によって形成された知識体系であると捉える視座が理論的に成立し、
2. その視座からは、数学の学習も、他の教科と同様に人間同士の相互作用が必要であると考えられる。
3. 加えて、その視座においては、ラカトシュ (1980) の LMD (あるいは、その一般化形態) を通じて、数学的知識が確立すると見なされている、

という3点を挙げることができよう。一方、この観点における課題としては、この観点が数学に関する観点であることの根拠の大部分が、LMDに依存している点を指摘できる。

数学教育研究として見た場合、LMDへの過度の依存は、数学の固有性を曖昧にしている。実際、個人的な知識を形成する過程に関してであれば、例えば、國本(2009b)や中原(1995b)が、Piagetの反省的抽象の観点を踏まえることによって数学的認識の固有性を特徴付けているけれども、どのような社会的な協定過程が数学に固有であるかは、LMDへの言及以上には述べられていない。もちろん、扱われている事例が算数・数学に特化されていることから、いずれの研究も数学の固有性を潜在的には内在させている。しかしながら、その算数・数学の事例における固有性が何であるかは、必ずしも明確になされていない。

LMDは、確かに数学に固有の様相を捉えた方法論であるが、それを数学教育へ転用するにあたっては、数学の固有性を失う危険性がある。まず、Yackel & Cobb(1996)が指摘するように、教室における社会数学的規範は、教師と学習者達の相互作用によって絶えず更新されるわけであるから、教室における議論が証明と論駁の様相を呈するとは限らない。また、仮にLMDの適用を数学的知識の確立にあたって必須であると見なすような社会数学的規範が教室において確立されるとしても、それは、授業に参加する個々の学習者の数学観がかなり洗練されている状態であるということが出来るから、その確立はかなり学年が上がってからになるであろうことが予想される。したがって、これらを踏まえると、社会数学的規範としてLMDが教室で確立するまでは、非数学的にしか数学を学べない可能性だってあり得るということになる。特に、もしここで可謬主義の観点だけを継承する形で、教室においては学習者のレベルに応じて様々な種類の説明が許容されてよい、というように、LMDを欠いたまま可謬主義の拡大解釈がなされてしまうならば、その議論は、たちまちにして数学の固有性を失ってしまう。

以上より、数学教育という文脈での知識の社会的構成過程において、何が数学に固有の正当化の方法であり、何が数学に固有の知識の妥当性の規準であるのか、という課題に答えるためには、ラカトシュ(1980)のLMD(あるいは、その一般化形態)への全面的な依存を回避し、数学的な協定過程をより一層特徴付ける基準を明らかにすることが必要であると言える。

3 数学に固有な社会・文化的側面を特徴付けるためのアイディア

ラカトシュ (1980) の LMD 以外の形で、数学に固有な社会・文化的側面を特徴付けるため、本研究では、特に Tall らが提案している理論的枠組 (Gray & Tall, 1994; Tall, 2004, 2008; Tall, Thomas, Davis, & Gray, 1999; Tall, Yevdokimov, Koichu et al., 2012) に通底するクリスタリン・コンセプト (crystalline concept) というアイディア (Tall, 2011 参照) に注目する。なぜなら、このアイディアは、数学的知識がある種の必然的帰結であるという数学観を含意しており、これが数学的営みを他の学問の営みと区別する 1 つの観点になり得ると考えられるからである。つまり、このアイディアから、数学に固有な社会・文化的側面を特徴付けるための示唆が得られるものと考えられる。そこで、以下では、まず、クリスタリン・コンセプトが提唱されるまでの Tall の一連の研究を概観し、その上で、クリスタリン・コンセプトの定義および具体例を確認することとしよう。

3.1 Tall の数学の三世界論：クリスタリン・コンセプトに至るまで

Tall らは、これまでに数学的対象の構成とは何かを捉えるための理論的なアプローチを展開してきている。まず、Gray & Tall (1994) は、プロセスとコンセプトとの間における数学的対象の二重性を表現するため、プロセプト (procept) というアイディアを提案した。Tall et al. (1999) は、構成される数学的対象を、

- 知覚された対象
- プロセプト
- 公理的対象

の3つの型に分類した。Tall (2004) は、分類が完全でないとする Inglis (2003) の批判に答える形で、3種の数学的対象を数学の三世界として体系化し始め、Tall (2008) においてその全体像が明らかとなる。Tall (2011) は、そこからさらに、3種の数学的対象から単一の根底をなす基礎としてクリスタリン・コンセプトという考えを抽出した。近年、これら一連の研究は、幼少期から大学数学を学ぶに至るまでの、人の長期的な数学的発達を特徴付ける枠組として統合・組織化がなされている (Tall et al., 2012 参照)。

3.2 クリスタリン・コンセプトの定義および具体例

クリスタリン・コンセプトは、Tall (2011) において、「すべてのレベルの数学に対する示唆も持ちながら、数学的思考の成長における最も洗練されたレベルの発達に対して単一の統一的基礎を提供する」(p. 3) ために導入され、「その文脈の帰結として必然的である性質を持たせる、制限された関係の内的構造を持つ概念」(p. 4) と定義されている。Tall (2011) によれば、同値な性質や同値な命題は、同一のクリスタリン・コンセプトの様々な側面である。数学のプラトニズムが生じる理由は、このクリスタリン・コンセプトにあるとされ、この用語は、「数学は発見か、発明か？」という数学の系統発生に関する二分法に対して、次のような説明を与えることを可能にする。

〔数学の〕いくつかの側面は、ある特定の問題を定式化して研究することができるようにするために 発明され、他の側面は、数学のその結晶体的〔crystalline〕な本性のために 発見される。それゆえ、それ〔数学〕は、個人によって結晶体化〔crystallized〕され、専門の数学者達であろうと若い子ども達であろうと、ある特定のコミュニティの適切に洗練されたメンバー達によって、クリスタリン・コンセプトとして共有される。

(p. 7, 強調原文, [] 内は筆者による補足)

Tall (2011) の挙げるクリスタリン・コンセプトの具体例は、数学の三世界に対応する形で、次の3つにまとめられる。

- プロセプトそれ自体
- 幾何学的命題の同値性に通底する概念

- 公理的命題の同値性に通底する概念

Tall (2011) は、必ずしもそれらがなぜクリスタリン・コンセプトの一例であるかという形では説明を与えていない。しかし、次のように解釈することができる。例えば、6 というオブジェクトを $1+5$, 2×3 , $8-2$ 等々として柔軟に取り扱って差し支えないのは、6 に関するクリスタリン・コンセプトがそのような必然的な性質をもたらしているからである。また、平行線の性質として「平行線の錯角が等しい」ということと「平行線の同位角が等しい」ということ、実数の性質として「空でない上に有界な集合が最小上界を持つ」ということと「コーシー列が極限值を持つ」ということがそれぞれ同値であるのは、平行線および実数に関するクリスタリン・コンセプトがそのような必然的な性質をもたらしているからである。クリスタリン・コンセプトを共有する者達において、6 と $1+5$ が等しくない状況、平行線の錯角が等しいのに平行線の同位角が等しくない状況などは考えられない。

数学的对象を上記のように捉えるクリスタリン・コンセプトは、数学という営みのうち、ある特定の問題を定式化して研究する部分—つまり、発明の部分—が人間的な営みに依存していて、残りの部分—つまり、発見の部分—が必然性に関わる数学の本性に依存している点を明確にしている。國本 (2009a) が「数学的对象は、緒言的には発明され、創造される。しかし、一旦それが発明されると、〔中略〕以後、数学は発見されることになる」(p. 30) と述べるように、Tall のクリスタリン・コンセプトに基づく捉え方は、一般的な可謬主義的数学観と整合的な見方である。

しかしながら、Tall のアイデアは、その用法が循環論に陥っているという点で、必ずしも Tall の意図した「単一の統一的基礎」としての役割や本研究の関心の対象である数学の固有性を説明する役割を十分に果たせていない。なぜなら、Tall (2011) では、クリスタリン・コンセプトが、「数学的思考の成長における最も洗練されたレベルの発達に対して単一の統一的基礎を提供する」(p. 3) ことを目指して導入される一方で、数学は「適切に洗練されたメンバー達によって、クリスタリン・コンセプトとして共有される」(p. 7) とされているからである。これは、「洗練されたレベル」を「クリスタリン・コンセプトの所有」として説明するものの、「クリスタリン・コンセプトの共有条件」に「適切な洗練」を取り上げていることを意味し、循環論である。この点を解消するためには、「クリスタ

リン・コンセプトの所有」と「適切な洗練」がそれぞれ如何なる状態であるかということ
を説明するための、根源的な要素を明らかにすることが必要である。

そこで本研究は、クリスタリン・コンセプトの定義文を吟味することで、この問題を解
消することを試みる。Tall の議論を踏まえれば、数学的な考察の対象の背後に、クリスタ
リン・コンセプトが存在し、かつ、クリスタリン・コンセプトが存在することによって、
それらの対象が数学に独特の考察対象となっていると考えられる。数学的活動が、数学に
独特の考察対象を取り扱う活動であるがゆえに数学に固有の様相を呈する活動になってい
ると考えるならば、先にも引用したクリスタリン・コンセプトの定義文「その文脈の帰結
として必然的である性質を持たせる、制限された関係の内的構造を持つ概念」(Tall, 2011,
p. 4) の中から、数学的活動の固有性を明確化するためのアイデアを抽出することができ
るはずである。次節では、この定義文に含まれる語の中で、特に、最も数学に固有の考
え方を表出させていると思われる「必然的」および「構造」という語に着目し、これらの
語が一般にどのような意味で用いられているかを検討することで、数学に固有な営みの在
り方を追究しよう。

4 「必然性」の意味

本研究では、Tall の用いる“necessary”という英単語を「必然的な」と訳出している。こ
のとき、「ある対象のある性質が必然的である」とは、より数学的な装いで述べれば、「『そ
の対象がその性質を持っている』という命題が必然的に真である」ということであろう。

この「必然的な真」(necessary truth) は、古くから哲学で議論の対象となる概念であり、
それは、しばしば、「偶然的な真」(contingent truth) と対比される。

必然的な真とは、他の状態ではあり得なかったもののことである。それは、すべて
の状況下において真であったであろう。偶然的な真とは、真ではあるが、偽であり
得たもののことである。必然的な真は、真でなければならないものである。偶然的
な真は、それが起こるときや事物がそうであるときに真であるが、真でなくともよ

かったものである。

(Blackburn, 1996, p. 257)

この規定に沿うならば、クリスタリン・コンセプトの定義に含まれる「その文脈の帰結として必然的な性質」という部分は、その文脈の帰結を述べるにあたっては、その性質の存在が必要不可欠である、その性質が必ずある、必ずなくてはならない—そういった意味の表現として受け取ることができる。これに対して、偶然的な真とは、「必ずしもそのような性質がなくてよい」という部分否定である。「必ずない」という全否定ではなく、「あってもなくてもどちらでもよい」という意味である。したがって、「その文脈の帰結としての性質」が必然的でない場合というのは、「その文脈の帰結として、あってもなくてもどちらでもよかった性質」、あるいは、「その文脈の帰結としてたまたま現れた性質」ということになる。

ここで、必然的な真については、しばしば哲学や論理学で取り上げられる、次のような古典的な例を挙げるができる。

大前提 すべての人間は死ぬ。

小前提 ソクラテスは人間である。

帰結 したがって、ソクラテスは死ぬ。

上記の帰結は、すべての人間がいずれ死ぬという条件が成立する世界における「ソクラテス」がある人間を指示する語であるという文脈の帰結として、必然的に真である。ここでは、最もシンプルな例として三段論法を挙げたけれど、もっと複雑な文脈であっても、それまでの文脈で成立している事実に基づいて、その帰結が、他のものではあり得ないような唯一の帰結になるのであれば、その帰結は必然的に真である。

これに対して、歴史上、ソクラテスが紀元前 399 年に毒杯を仰いで獄中で死んだ (哲学辞典, 1971b) ということは、(今となってはそれが本当にこの現実世界で起こったことであるのかを直接目撃することは叶わないけれど、それが確かに実際に起ったことであつたならば、) 偶然的に真である。ソクラテスが死ぬときは、紀元前 399 年ではなく紀元前 400 年であるということもあり得たはずだし、その死に方は、服毒ではなく首吊りや自傷ということもあり得たはずである。そもそも、自らの意志で死ぬということが必然的な状況であつたのかどうかも疑問である。したがって、この史実は、偶然的に真である、というこ

と言えらる。

この例からわかるように、「ソクラテスは死ぬ(あるいは、死んだ)」という命題が必然的に真であるか偶然に真であるかは、予め絶対的に決まっているのではなくて、その命題が、どんな文脈の帰結として扱われるかによって変化し得る。したがって、ある真なる命題が必然的に真であるか偶然に真であるかは、当該の文脈に関する人間の認識に全面的に依存している。つまり、「ソクラテスが紀元前 399 年に毒杯を仰いで獄中で死んだ」という命題も、それが偶然に真であるということが人間の認識と独立に決まっているわけではなくて、ソクラテスがどういう思想の人物で、当時の社会が個々人の思想に対してどういう対応を取っていたか、等々、この命題を帰結とするような文脈を、どういう文脈として我々が認識しているかによっては、必然的に真なる命題となり得るのである。つまり、ほとんど文脈に関する情報がない状態であれば偶然に真であるように感じられる「ソクラテスが紀元前 399 年に毒杯を仰いで獄中で死んだ」という命題も、哲学の歴史に詳しい者にとっては、必然的に真なる命題であり得る。このことは、必然性と偶然性の区別に関する議論であるため、その真理観として、Ernest (1998a) のような相対的真偽観を採用するか、Goldin (2003) のような絶対的真理観を採用するかとは無関係に成り立つ。

数学的な考察の帰結が、偶然に真なのではなく必然的に真であるというのは、素朴な数学観や Tall らの数学観と親和的であり、数学的知識がただの社会的協定の帰結ではなく、数学に限定された意味での社会的協定の帰結であると考えようとする本研究の課題意識に対しても自然な捉え方である。ただし、数学的な考察の帰結が必然的に真であるということは自明なことではない。なぜそれが必然的に真であるかについては、説明を要する。本研究では、この理由を追究するために、「構造」という語に着目しよう。

5 「構造」の意味

クリスタリン・コンセプトの定義に含まれるもう 1 つのキーワードは、「構造」である。本考察は、数学の固有性を追究する一環であるため、数学においてこの語がどのように用いられているかを示すことが重要である。しかし、後で示すように、数学的な意味での

「構造」は、形式的に厳密に定められた極めて抽象度の高い概念であり、必ずしも数学教育的な現象を説明するために適した概念ではない。そこで、本研究では、「構造」の意味を追究するにあたって、まず、日常的な意味での「構造」を取り上げることとし、日常的な意味から類比的に、数学的な意味での「構造」に接近する。その上で、数学的な意味での「構造」の前提条件を緩めることで、数学教育学的に適した「構造」の定義を議論する。

5.1 「構造」の日常的な意味

「構造」(structure)の日常的な意味は、“something that has been made or built from parts, especially a large building”あるいは、“the way in which the parts of a system or object are arranged or organized, or a system arranged in this way”である (Cambridge Dictionaries Online, n.d.-g)。直訳すると、「部分から作られたり築かれたりしている何か、特に、大きな建物」あるいは、「あるシステムや対象の部分が、編成されたり組織されたりする方法、または、この方法で編成されたシステム」といったところであろう。

部分が、ある方法で組織されて全体を成していれば、その組織方法や組織された結果は「構造」と呼ばれる。例えば、「耐震構造」という言葉がある。ある建物が耐震構造を有するという場合、素朴には、その建物の構成要素が地震などの揺れに耐えられるように編成されていることとして理解できる。あるいは、ある建物が耐震構造を「有する」というくらいであるから、純粋に耐震性能にかかわる部分のみを抽出して構築された物理的対象を耐震構造と呼び、それがその建物の一部分として含まれている、という意味で捉えることもできる。したがって、日常的な意味において「構造」という語は、ある全体に対して、その一部分同士が如何なる関係を持ちながら編成されているかに言及する際に用いられる。

5.2 「構造」の数学的な意味

数学において、「構造」(structure)という語は、素朴には、例えば、次のように用いられる。

[...] 2変数関数 $* \cdot * : A^2 \rightarrow A$ と 1変数関数 $*^{-1} : A \rightarrow A$ および $e \in A$ が次の3条件 (群の公理)

a) $(A, * \cdot *)$ は半群,

$$\text{b) } e \cdot a = a \cdot e = a$$

$$\text{c) } a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$

を満たすとき、これらは A 上に群の構造を定めるといふ。対 $(A, e, *, *, *^{-1})$ を群といふ。

(日本数学会, 2007, p. 375, 強調原文)

これは、「構造」という語の素朴な用法である*²。

より厳密かつより一般的には、「構造」という語は、数学的に明確な定義を有する語でもある。それは、「言語」(記号)とその「意味」を分離して次のように定義される。

[...] 構造という概念を考える有用性は、記号とその意味を切り離すところからはじまる。それぞれの記号は定数記号か、関数記号か、関係記号かは区別されるが、固有の意味はないと考える。単なる記号に意味を与えるのが構造である。

$L = \{c_0, c_1, \dots, F_0, F_1, \dots, R_0, R_1, \dots\}$ を 1 つの言語とする。ただし、 c_i は定数記号、 F_i は m_i 変数関数記号、 R_i は n_i 項関係記号とする。 $M = (M, c_0^M, c_1^M, \dots, F_0^M, F_1^M, \dots, R_0^M, R_1^M, \dots)$ は次の条件を満たすとき L 構造 (L -structure) と呼ばれる。

- a) M は空でない集合,
- b) 各 c_i^M は M の元,
- c) 各 F_i^M は定義域が M^{m_i} で値域が M の関数,
- d) 各 R_i^M は定義域が M^{n_i} の部分集合。

[...] 集合 M は M の領域 (universe) と呼ばれる。 M の領域は $|M|$ で表される。

(日本数学会, 2007, p. 376, 強調原文)

上記の用例および一般的定義から言えることは、数学的に定義された「構造」とは、議論に必要な記号 (言語 L) に対して割り振られた対象・関数・関係の集まりである*³。日常

² 比較的一般的な記法であるためか、日本数学会 (2007) では特に説明がなされていないけれど、 $, *, *^{-1}$ に出てくる $*$ は、何らかの数や数学的对象が当てはまり得ることを意味している。例えば、 $*, *$ であれば、 \cdot という記号が、 $e \cdot a$ というように使用される 2 変数関数 (あるいは、2 項演算子) であるということの意味している。

*³ 文脈的に明らかではあるが、上で引用した定義において、 M と M は異なる数学的对象である。 M は、構造であり、 M は、その領域である。すなわち、 $|M| = M$ である。また、言語 L とは、日常的な意味での「言語」ではなくて、上述の引用に示されているように、数学的对象として形式的に定義された「言語」で

的な意味での「構造」とのアナロジーで考えるならば、構造 M とは、対象・関数・関係といった数学的要素を言語 L の文法によって組成した全体のことである。どの記号にどの要素を割り振るかを決めた瞬間に、全体としての「構造」が確定する。ただし、それが何の構造であるかは、その構造がどんな公理系を充足するかによって変化する。日常的な意味とのアナロジーで考えるならば、建材を組合せた瞬間に構造が確定するが、その構造がどんな構造であるかは、それがどんな基準を充足するかによって呼び方が変化するに似ている。この点に正確に言及するためには、モデルという用語が必要である。

L 構造 M において、 L で記述された命題 ϕ が成立するとき、 $M \models \phi$ とかく。また M は ϕ のモデル (model) であるという。

(日本数学会, 2007, p. 376, 強調原文)

先に例として挙げた「群の構造を定める」こととの関連で言えば、ある L 構造 M が群の 3 公理を満たす場合、その M は群の 3 公理のモデルである。このとき、モデルとは、ある種の条件を満たす特別な構造のことであるから、群の 3 公理を満たすモデルは、簡単に「群の構造」を持つ構造として捉えて差し支えない。ここでいう「モデル」という語は、いわゆる「モデルルーム」や「モデル校」などで用いる意味での「モデル」とよく似たニュアンスであり、ある種の条件を満たすものの代表例という意味で捉えるとわかりやすい。このことは、坪井 (2012) によって、「モデルという言葉が強いて日本語に直せば『具体例』という語感かもしれない」(p. 61) と述べられている。彌永・赤 (2012) も、同様の方法で「公理系によって記述される構造のモデル」あるいは、単に「公理系のモデル」と呼ばれる考察対象を定義している。そして、「現今、多くの公理系においては、そのあらゆるモデルに、一つの共通な名称のあたえられるのが普通になっている」(p. 59) ことから、現代の数学において最も頻繁に用いられる表現方式として「[一つの構造は] これこれの公理を満たすとき X といわれる」(pp. 59-60, [] 内筆者補足^{*4}) という形を紹介している。これは、ある言語 L に対してある構造 M が与えられたとき、その M が、たまたま人間が「群の公理系」と名付けていた一連の命題群を満たしていたならば、簡単のた

ある。数学的な意味での「言語」は、定数記号、関数記号、関係記号という 3 種類の記号の集合である。

^{*4} ここでは、補足として「構造」という語を補ったが、正確に言えば、原文では「構造」ではなく「システム」という語が用いられている。ただし、それは単にラベルの問題であって、これらは本質的に同じものである。ここでは、日本数学会 (2007) の語法に倣った。

め、その構造 M を単に「群」と呼ぼう、ということである。

さて、上記のような厳密な数学的な規定を示しただけであると、形式的な「言語」とその解釈である「構造」の区別が難しい。そこで、「群」を題材に、「言語」と「構造」の関係性を具体的に整理してみよう。

まず、言語 L の例として、次を考えよう。

$$L = \{G, e, * \cdot *, *^{-1}\}$$

これは、定数記号として G および e 、2変数関数記号として $* \cdot *$ 、1変数関数記号として $*^{-1}$ を持つ言語である。たった4つの記号しか持たない「言語」であるが、それでも、この L は、先に引用した「言語」の定義を充足する1つの数学的对象である。このとき、注意すべきは、この L は、文法のみを有し、何ら意味を持たない記号の集まりだということである。 $* \cdot *$ は、2変数関数記号であるため、例えば、「 $e \cdot e$ 」というような使い方をしたが、「 eee 」というような使い方は決してしない、という文法が、言語 L を設定したのと同じに定まる。しかし、では、この $* \cdot *$ が、どんな関数なのか、例えば、 $e \cdot e$ が何に対応付けられるのかは、 L の定義だけからは不明である。これは、 G, e と $*^{-1}$ についても同様である。群の議論において、 G は、しばしば群を、 e は、しばしば単位元を表す記号として登場するし、 $*^{-1}$ は逆元に対応付ける1変数関数を表す記号として登場するけれど、まだ L が定義されただけのこの段階では、単位元や逆元に対応付ける1変数関数を意味する記号であるかどうかは不明である。

次に、「構造」の例として、次を考えよう。

$$M_1 = (\mathbb{Z}, 0, * + *, -*)$$

このとき、 \mathbb{Z} は普通の意味での整数全体の集合、 0 は普通の意味での整数 0 、 $* + *$ は普通の意味での整数の加法の演算子 $+$ 、 $-*$ は普通の意味での整数の単項演算子 $-$ である^{*5}。これら $\mathbb{Z}, 0, * + *, -*$ は、「記号」ではなく、それぞれ、 $\mathbb{Z}, 0, * + *, -*$ そのものの「意味」である、とする。

^{*5} 普段、あまり意識する機会はないが、 $-$ は、負の符号であると同時に、単項演算子でもある。例えば、「 -5 」と書くときの「 $-$ 」は、負の符号であるか単項演算子であるかの区別がつかないが、「 $-(+5)$ 」と書くときの「 $-$ 」は、単項演算子 $-$ の右側に置かれた要素 $+5$ を -1 倍するという単項演算子(または、1変数関数)である。

表 3.1 $f(x,y)$ の定義

$x \setminus y$	1	2	4
1	1	2	4
2	2	4	1
4	4	1	2

表 3.2 $g(x)$ の定義

x	$g(x)$
1	1
2	4
4	2

また、もう 2 つ、「構造」の例を挙げておこう。まず、

$$\mathcal{M}_2 = (\{1, 2, 4\}, 1, f(*, *), g(*))$$

である。このとき、 $\{1, 2, 4\}$ は自然数 $1, 2, 4$ からなる集合、 1 は有理数 1 、 $f(*, *)$ および $g(*)$ はそれぞれ表 3.1 および表 3.2 で定義される 2 変数関数および 1 変数関数であるとする。そして、

$$\mathcal{M}_3 = (\mathbb{N} \cup \{0\}, 0, * + *, +*)$$

である。このとき、 $\mathbb{N} \cup \{0\}$ は 0 を含む自然数全体の集合、 0 は数 0 、 $* + *$ は自然数の加法であり、 $+*$ は単項演算子 $+$ である。なお、これらも、「記号」ではなく「意味」である。

さて、 \mathcal{M}_1 、 \mathcal{M}_2 、および \mathcal{M}_3 は、「構造」の例であるとして取り上げたが、これらは、言語 L が有する記号に意味を与えることができるので、特に L 構造である。実際、言語 L と \mathcal{M}_1 、 \mathcal{M}_2 、 \mathcal{M}_3 の間には、図 3.1、図 3.2、図 3.3 のような対応を与えることができる。 \mathcal{M}_1 、 \mathcal{M}_2 、 \mathcal{M}_3 で与えられる「意味」が、 L で定められた記号およびその文法と合致するので、 \mathcal{M}_1 、 \mathcal{M}_2 、 \mathcal{M}_3 は、 L で制約された「構造」を持つ数学的対象である、ということである。

このとき、 \mathcal{M}_1 と \mathcal{M}_2 は、特に群の公理系のモデルであるが、 \mathcal{M}_3 は、群の公理系のモデルではない。これは、言語 L で記述される群の公理系を、それぞれの「意味」が充足するかどうかで判定される。群の公理系は、言語 L とどんな数学の分野でも共通な記

Lに含まれる記号：	G	e	\cdot	$*$	$^{-1}$
	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	
\mathcal{M}_1 に含まれる意味	\mathbb{Z}	0	$+$	$+$	$-*$

図 3.1 L と \mathcal{M}_1 との対応

Lに含まれる記号：	G	e	\cdot	$*$	$^{-1}$
	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	
\mathcal{M}_2 に含まれる意味	$\{1, 2, 4\}$	1	$f(*, *)$	$g(*)$	

図 3.2 L と \mathcal{M}_2 との対応

Lに含まれる記号：	G	e	\cdot	$*$	$^{-1}$
	\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	
\mathcal{M}_3 に含まれる意味	$\mathbb{N} \cup \{0\}$	0	$+$	$+$	$+$

図 3.3 L と \mathcal{M}_3 との対応

号^{*6}を用いて次のように記述可能である^{*7}.

- a) $\forall a, b \in G : a \cdot b \in G$
- b) $\forall a, b, c \in G : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- c) $\exists e \in G \forall a \in G : e \cdot a = a \cdot e = a$
- d) $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

上の公理系の記号表現において、言語 L に含まれる記号を、特に \mathcal{M}_1 や \mathcal{M}_2 で解釈した場合は、上の公理系に含まれる 4 つの命題はすべて真になる。その一方で、 \mathcal{M}_3 で解釈した場合は、3 番目と 4 番目の命題が成り立たない。 \mathcal{M}_3 は、 $^{-1}$ を $+$ として解釈するので、この演算によって逆元の存在を保証できないのである。単に L の解釈となり得るというだけであれば、人間の数学的探究にとって有益な解釈になるとは限らない。 \mathcal{M}_3 は、少なくとも群の公理系のモデルになっていないという意味で、群の性質を直接的に探究することに対して有益ではない。その点、 \mathcal{M}_1 や \mathcal{M}_2 は、群の代表的な具体例を与える解釈（すなわち、モデルケース）であり、群の性質を直接的に探究することに対して有益である

^{*6} 変数 a, b, c, G および $\forall, \exists, =$ 等の記号のこと。

^{*7} 日本数学会 (2007) の記述に合わせて、上では群の公理を 3 つであるとして示したが、言語 L を用いて半群であることを表現すると、群の公理は 4 つとなる。

と考えられる。そのため、 M_1 や M_2 という L 構造が、特に「群の構造を有している対象」であると表現することは自然であろう。

6 「構造」の規定

ここまでの考察を踏まえると、日常的な意味での「構造」と数学的な意味での「構造」は、どちらも本質的な意味を同じくしていると考えられる。すなわち、あるシステム S (日常的には、例えば、建築物。数学的には、例えば、整数の集合とその加法) が「 X の構造」を有するとは、 S の構成のされ方や S の規定のされ方が、 S にある種の制約を課したことで「 X という特性」が発揮されていることと、として理解することができる。しかしながら、日常的な意味では、ここで取り上げた意味以外で「構造」という語が使われてしまう可能性もあるし、数学的な意味では、考察の対象が形式的な言語で表現できる公理系に限定されてしまう。本節の研究・クエッションは、数学教育における 1 つの哲学として、RCMA の内側で、小学校・中学校・高等学校での数学学習はもちろんのこと、大学での数学学習や、それ以降の数学の生涯学習に至るまで、数学の固有性を特徴付けることにあるから、考察の対象が、そのような厳密な公理系のみ限定されるべきではない。

そこで、本研究では、数学的な意味での「構造」を参考に、次のように「構造」を規定することとしよう。すなわち、あるシステム S が X の構造を有しているとは、「 X 」という名称の命題群 P_0, P_1, P_2, \dots をすべて S が満たしているときのことである。ただし、ここでシステムとは、ある規則を満たすものの集まりであるとする。

例えば、次の命題群に「可換群」という名称がついていたとしよう。

- 任意の a, b, c について $(a * b) * c = a * (b * c)$.
- 任意の a について $a * e = e * a = a$.
- 任意の a に対して、ある x が存在して、 $a * x = x * a = e$ を満たす。
- 任意の a, b について $a * b = b * a$.

このとき、例えば、整数全体の集合 \mathbb{Z} を、ある規則を満たすものの集まり、すなわち、シ

システムであると捉えるならば、整数のシステムは、定数 e および演算 $*$ の解釈として、 0 および $+$ を提供することができるので、可換群の構造を有していると言うことができる。

このとき、上記の表現方式における X という名称やその名の示す命題群が完全に任意であるという点に注意することは重要である。つまり、「群の公理系」や「ペアノの公理系」、「ヒルベルトの公理系」など、現代数学においてよく知られた名前を持つ公理系である必要はない。また、ここでの「命題」という語の意味は、「真偽の確定した言明」ではなく、「各単語の意味が決まれば真偽が確定するような、文法に則って並べられた記号列」である。有名な公理系でなくとも、ある命題群を充足するシステムは、その命題群に応じた構造を有すると言える。

7 性質の必然性の正当化における数学的構造の役割

以下では、前節までに整備した「必然性」および「構造」という語を用いて、学校教育で扱われるような数学の内容に対しても、数学的構造から導出された帰結が必然性を帯びることを指摘するとともに、それが数学の固有性を特徴付ける一観点となり得ることを指摘する。

まずは、数学的構造と必然性の関係を考える上で有用な具体例を1つ示すことにしよう。ここでは、中学校2年生における文字式の利用に関連する次の命題を例に検討しよう。

命題 P 2桁の自然数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた自然数の和は、11の倍数になる。

ただし、この命題は、自然数の構造と位取り記数法の構造に依存した形で叙述された命題である。この命題は、次のように表現すれば、位取り記数法の構造に依存しないように表現することができる。

命題 Q 100 未満の自然数 x について, x を 10 で割った余りに 10 を掛けたものと x を 10 で割った商を足した数を y とする. このとき, $x+y$ は 11 の倍数である.

この表現であれば, 命題中に含まれる 100 や 10, 11 といった数は, 10 進法以外の記数法でも表現することができるため, 命題の表現が位取り記数法の構造に依存しているわけではない, と言える (必要であれば, 例えば位取り記数法ではないローマ数字の記法などを用いればよい).

しかしながら, 命題 Q は, まだ自然数の乗法や除法に関する構造に依存している. 次のように表現すれば, 自然数の乗法や除法に関する構造にさえ依存しないように, 自然数の加法の構造にのみ依存した形で表現することができる.

命題 R $11 + 11 = 22 \wedge 12 + 21 = 33 \wedge 13 + 31 = 44 \wedge 14 + 41 = 55 \wedge 15 + 51 = 66 \wedge$

$$16 + 61 = 77 \wedge 17 + 71 = 88 \wedge 18 + 81 = 99 \wedge 19 + 91 = 110 \wedge$$

$$21 + 12 = 33 \wedge 22 + 22 = 44 \wedge 23 + 32 = 55 \wedge 24 + 42 = 66 \wedge 25 + 52 = 77 \wedge$$

$$26 + 62 = 88 \wedge 27 + 72 = 99 \wedge 28 + 82 = 110 \wedge 29 + 92 = 121 \wedge$$

$$31 + 13 = 44 \wedge 32 + 23 = 55 \wedge 33 + 33 = 66 \wedge 34 + 43 = 77 \wedge 35 + 53 = 88 \wedge$$

$$36 + 63 = 99 \wedge 37 + 73 = 110 \wedge 38 + 83 = 121 \wedge 39 + 93 = 132 \wedge$$

$$41 + 14 = 55 \wedge 42 + 24 = 66 \wedge 43 + 34 = 77 \wedge 44 + 44 = 88 \wedge 45 + 54 = 99 \wedge$$

$$46 + 64 = 110 \wedge 47 + 74 = 121 \wedge 48 + 84 = 132 \wedge 49 + 94 = 143 \wedge$$

$$51 + 15 = 66 \wedge 52 + 25 = 77 \wedge 53 + 35 = 88 \wedge 54 + 45 = 99 \wedge 55 + 55 = 110 \wedge$$

$$56 + 65 = 121 \wedge 57 + 75 = 132 \wedge 58 + 85 = 143 \wedge 59 + 95 = 154 \wedge$$

$$61 + 16 = 77 \wedge 62 + 26 = 88 \wedge 63 + 36 = 99 \wedge 64 + 46 = 110 \wedge 65 + 56 = 121 \wedge$$

$$66 + 66 = 132 \wedge 67 + 76 = 143 \wedge 68 + 86 = 154 \wedge 69 + 96 = 165 \wedge$$

$$71 + 17 = 88 \wedge 72 + 27 = 99 \wedge 73 + 37 = 110 \wedge 74 + 47 = 121 \wedge 75 + 57 = 132 \wedge$$

$$76 + 67 = 143 \wedge 77 + 77 = 154 \wedge 78 + 87 = 165 \wedge 79 + 97 = 176 \wedge$$

$$81 + 18 = 99 \wedge 82 + 28 = 110 \wedge 83 + 38 = 121 \wedge 84 + 48 = 132 \wedge 85 + 58 = 143 \wedge$$

$$86 + 68 = 154 \wedge 87 + 78 = 165 \wedge 88 + 88 = 176 \wedge 89 + 98 = 187 \wedge$$

$$91 + 19 = 110 \wedge 92 + 29 = 121 \wedge 93 + 39 = 132 \wedge 94 + 49 = 143 \wedge 95 + 59 = 154 \wedge$$

$$96 + 69 = 165 \wedge 97 + 79 = 176 \wedge 98 + 89 = 187 \wedge 99 + 99 = 198$$

こう表現してしまうと、いたずらに表記が長くなってしまうけれど、命題 P について真偽が知りたいということは、要するに、命題 R の真偽が知りたいということなのである。

このことをより厳密に議論できるようにするために、自然数の構造と位取り記数法の構造を形式的に規定しよう。ただし、ここでは、議論を簡単にするため、自然数の構造は、その一部のみを、位取り記数法の構造は、2桁に限定した場合を考えることとする。

自然数の構造(一部)とは、次のように規定できる。まず、システム N が、次を備えているとする。

- 二項演算 $+, \times$
- 全順序関係 $<$

そして、 N と関連する上記の演算が次の2条件を満たすとき、 N を自然数の構造(一部)を持つシステムと呼ぶことにしよう。

- N の任意の要素 a, b, c に対して、 $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$
- N の任意の要素 a, b (ただし、 $b \neq 0$) に対して、次の条件を満たす N の要素 q, r が一意的に定まる。

$$s = b \times q + r \text{ (ただし、} 0 \leq r < b \text{)}$$

このとき、普通の意味での加法・乗法を備えた自然数をすべて集めたシステムは、自然数の構造(一部)を持つシステムである。

位取り記数法の構造とは、次のように規定できる。まず、システム S が、次の5点を備えているとする。

- 2以上の自然数の定数 n
- 二項演算 \oplus
- S を変域、0以上 n 未満の自然数を値域とする2つの関数 a_n および a_1
- S を変域、0以上99以下の自然数を値域とする関数 v
- 0以上 n 未満の2つの自然数を変域、 S を値域とする2変数関数 u

そして、 S と関連する上記の定数・演算・関数が次の3条件を満たすとき、 S を n 進位取り記数法の構造を持つシステムと呼ぶことにしよう。

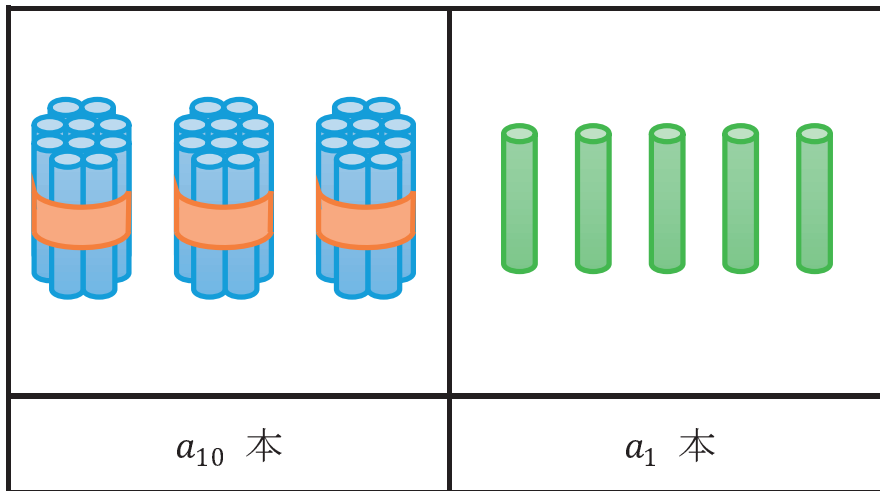


図 3.4 10 進位取り記数法の代表的なシステムの例

[P1] S の任意の要素 s に対して, $v(s) = a_n(s) \times n + a_1(s)$

[P2] S の任意の要素 s に対して, $s = u(a_n(s), a_1(s))$

[P3] S の任意の要素 s_1, s_2 に対して,

$$s_1 \oplus s_2 = \begin{cases} u(a_n(s_1) + a_n(s_2), a_1(s_1) + a_1(s_2)) & (a_n(s_1) + a_n(s_2) < n \wedge a_1(s_1) + a_1(s_2) < n) \\ u(a_n(s_1) + a_n(s_2) + 1, a_1(s_1) + a_1(s_2) - n) & (a_n(s_1) + a_n(s_2) + 1 < n \wedge a_1(s_1) + a_1(s_2) \geq n) \\ \text{未定義} & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

10 進位取り記数法の構造を持つシステムの具体例は、数学の世界の中に見出すこともできるし、日常世界の中に見出すこともできるであろう。数学の世界の中では、例えば、我々が通常使用する 10 進数の表記法は、10 進位取り記数法の構造を持つシステムである。また、日常世界の中では、例えば、図 3.4 で表現されるシステムが挙げられる。以下では、簡単のため、図 3.4 で表現されるシステムを S としよう。

S は、右枠内にバラバラの棒を、左枠内に 10 本ずつ括った棒の束を備えるシステムである。右枠内の棒の本数と、左枠内の束の個数は、 S の各要素によって異なるが、右枠内の棒の本数は、0 本から 9 本の間で、左枠内の束の個数は、0 個から 9 個の間でのみ変化し得る。 S の 2 つの要素を足し合わせるとき、新しく得られる要素の右枠内には、元の

2 要素の右枠内にあった棒を合わせたものを入れ、左枠内には、元の 2 要素の左枠内にあった束を合わせたものを入れる。ただし、その操作によって右枠内の本数が 10 本以上になってしまうならば、そこで 10 本の束を 1 つ作って、左枠内に移す。左枠内において、合計の束数が 10 以上になる場合の足し合わせについては、簡単のため、未定義とする。このとき、各定数・演算・関数を、

- $n = 10$
- $s_1 \oplus s_2 :=$ (2 つの要素 s_1, s_2 の足し合わせ)
- $a_{10}(s) :=$ (左枠内の棒の束の本数)
- $a_1(s) :=$ (右枠内の棒の束の本数)
- $v(s) :=$ (両枠内の棒の総本数)
- $u(a, b) :=$ (左枠内の束が a 個、右枠内の棒が b 本であるような要素)

というように解釈することとすると、 S は、確かに 10 進位取り記数法の構造を持つ。

さて、前小節で挙げた例を用いて、10 進位取り記数法の構造の役割について議論しよう。まず、命題 P は、命題 R という同値な命題に書き換え可能であることから、命題 P の真偽は、命題 R のようにすべての個別のパターンを書き出し、その一つ一つの真偽を確認することを通じて確認することができる。そのため、命題 P それ自身は、10 進位取り記数法で使用される用語を用いて表現されているけれど、命題 P が指示している内容の真偽は、10 進位取り記数法の構造に依存せずに決定していると言うことができる。つまり、命題 P の真偽は、10 進位取り記数法の構造や自然数の乗法の構造とは独立に決まっている。

ところが、普通、命題 P は次のように証明される。

与えられた数の一の位を x 、十の位を y とすると、与えられた数は、 $10y+x$ と表わせ、一の位の数と十の位の数を入れ替えた数は、 $10x+y$ と表せる。 $(10x+y)+(10y+x) = 11(x+y)$ より、求める和は 11 の倍数である。

これは、10 進位取り記数法の構造を根拠とした証明である。あるいは、図 3.5 のように表せば、直観的に命題 P の妥当性を理解することもできるであろう。図 3.5 では、与えられた数の十の位の数を a_{10} 、一の位の数を a_1 とすると、10 進位取り記数法の構造上、11 の束が $(a_{10} + a_1)$ 本得られることが見て取れる。これも、10 進位取り記数法の構造を根拠と

した説明である。

命題 Q を証明するという観点に立てば、10 進位取り記数法の構造を使わずに、自然数の構造に依存する形で証明することもできる。

100 未満の自然数 x について、 x を 10 で割った商と余りをそれぞれ q, r とすると、 $x = 10q + r$, $y = 10r + q$ より、 $x + y = 11(q + r)$ 。よって、 $x + y$ は 11 の倍数である。

この証明は、自然数の演算しか用いていないので、自然数をどんな記数法で表現していたとしても同じ議論が成り立つ。

これらの例が示すように、10 進法で 2 桁の自然数 (あるいは、100 未満の自然数) が、どんな性質を持つかということ、その性質をどんな観点から記述するか (自然数の演算と 10 進位取り記数法の「位」の両方に着目するか、自然数の演算のみに着目するか、あるいは、自然数の加法のみに着目するか) は、本質的に独立の問題である。一般化して述べるならば、ある数学的対象がどのように存在するかということ (性質) と、その対象を人間がどのように見るかということ (数学的構造) は、本質的に独立の問題である。こう考えると、数学的構造とは、ある対象の性質を簡潔に正当化するために、その対象に対して人間が恣意的に付与する「モノの見方」である、と言える。つまり、数学的構造とは、理論的枠組の役割を果たしている。

命題 P の真偽は、議論領域が有限であることから、その気になれば簡単に全数調査することができるし、それをもって証明と見なすこともできる。しかし、そのような形で正当化されたものは、それがたとえ数学的な証明であったとしても、なぜその命題が成立するのかの説明にはならない。実際、全数調査に基づく正当化は、なぜ 11 の倍数になるのか、特に、なぜ他の数の倍数ではなくて 11 の倍数であるのかについての理由を欠いている。そうした正当化は、命題 P が偶然的に真であることを示すのみであり、必然的に真であることまでは保証しない。もし 11 の倍数であることが必然的に真であるならば、「必然的に真」であることの定義より、11 の倍数でなくてもよかったのではないかという疑念が残ってはならない。Tall (2011) のクリスタリン・コンセプトの定義に必然性に関する観点が含まれていたように、数学的な議論の帰結が必然的であるということが数学の固有性を特徴付ける 1 つの視座であるならば、全数調査による正当化は、数学的な正当化手法ではない。

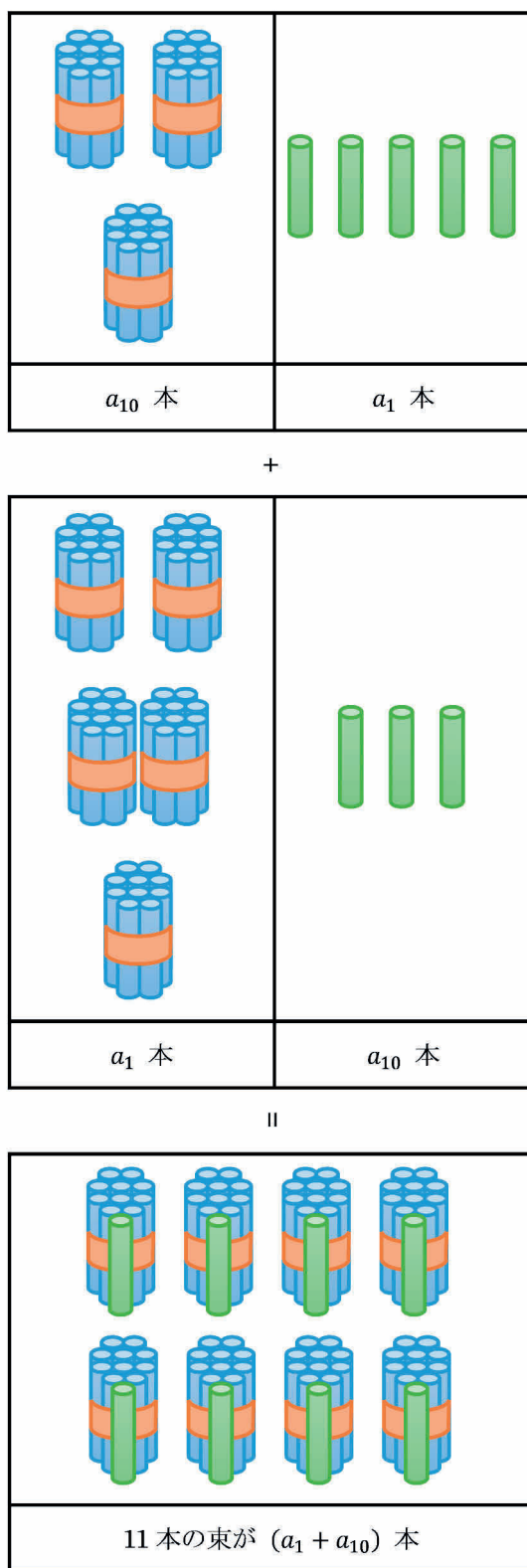


図 3.5 10進位取り記数法の構造を根拠とした説明

この命題 P が必然性を帯びるための 1 つの方法は、10 進位取り記数法の構造に依存した説明を与えることである。例えば、図 3.5 に基づくような説明がそれに相当する。題意より、十の位の数 (=束数) と一の位の数 (=本数) を入れ替えて足すわけであるから、11 本の束が、元の束数と元の本数の和にならなければならない、これ以外の数ではあり得ない。この命題は、中学校においてしばしば文字式を利用する例題として示されることが多く、文字式による証明は、図 3.5 で行っていることを含意している。しかし、文字式の式計算を形式的にきっちりこなすよりも、こちらの説明の方がはっきりと必然性が実感できる。なぜなら、11 という数が形式的計算の帰結としてではなく、目に見えて明らかになるからである。この例が示すように、証明が数学的証明として一般的な意味で妥当であるだけでは、証明しようとした命題の成立に必然性を帯びさせるのに十分ではない。しかし、構造を根拠にした説明でさえあれば、非形式的な説明でも十分にその結果の必然性を伝達し得る。

10 進位取り記数法の例では、命題 P と R の真偽は一致する。特にこの場合は、全数調査による証明と構造に基づく証明とその両方が可能であった。また、全称命題によって言及される調査対象が有限個でないような場合は、完全な全数調査ができないが、多くの対象を調査することによって、その命題の妥当性を高めることは可能である。そのような帰納的な説明による正当化は、算数・数学教育では学習者が用い得る正当化の手法である。しかし、考察対象が有限個であろうとなかろうと、全数調査による正当化や帰納的な説明による正当化は、人々に、当該の命題が単に真であることを確信させるのみである。その命題は、偶然的に真であるだけかもしれない。そのような正当化は、人々に、当該の命題が必然的に真であることを確信させるためには不十分なのである。

一方、構造に着目した命題の正当化は、人々に必然性を実感させ得る。その 1 つの理由は、構造が、ただ単に偶然そこに集められただけかもしれない数学的対象同士に、関係性を付与するからである。命題 R の形だと、どんな数学的対象に言及されているのかが自明ではないが、命題 P の形であれば、そこで言及されている数学的対象は 2 桁の自然数に限られていることがわかる。漠然と寄せ集められた数学的対象にどんな性質が成り立つかは、実際に全部調べてみないことにはわからないし、ある特定の性質が成り立つということが明らかになったとしても、その性質が成り立つ理由は、たまたまその性質が成り立つような数学的対象が寄せ集められたから、としか言えない。これは、その性質の成立が偶

然的に真であったことを意味するに過ぎない。しかし、そこに構造を導入することによって、一度、その寄せ集めの規則を明らかにし、その規則を根拠にどんな性質が成り立つかを論じるならば、その性質が成り立つ理由は、その寄せ集めの規則が、その性質を不可避免的に成り立たせるような規則であったからである、とすることができる。これは、その性質の成立が、その寄せ集めの規則を採用する以上、必然的に真であることを意味する。したがって、数学的構造から導出された帰結は、必然的に真となるのである。

高等数学においては、数理論理学的手法を用いて実数の構造を拡大した構造を生成し、その構造上で考察することによって元々の実数の性質を探究する超準解析と呼ばれる分野がある(坪井, 2012, pp. 85-104)。この位取り記数法の例の場合も、数理論理学的手法による分析と本質的には同じことであり、自然数の構造を保ったまま、より制限的な10進位取り記数法の構造を生成し、その新しい構造上で考察することによって元々の自然数の性質を探究している。これは、結果として、命題の成立が自明になるように追加的な構造を導入していることになる。

対象の性質と数学的構造の関係をこのように捉えるとともに、Tall (2011) に倣い、必然性の追究が数学の本性として重要であると捉えるならば、対象の性質が必然的に成り立つことを数学的構造に基づいて理解しようとすることや、説明しようとする試みは、数学的活動の本性であると述べることができる。もし数学的活動の本性をこのように捉えないならば、我々は、容易に「超相対主義」(Goldin, 2003) に陥り得る。実際、どんな学問を学ぶ場合であっても、数学的对象のように、直接的には目に見えない何かについて論じるということは往々にしてあり得るし、逆に言えば、数学を学ぶ場合だからといって、いつも目に見えない何かについて論じている場合ばかりではない。そのため、数学的对象について語るということ、他の学問における考察対象について語るということは、使用される語彙が異なるだけであって、本質的に同じ活動であると述べることもできるであろう。しかしながら、その見方は誤りである。対象の性質の必然性を数学的構造に基づいて追究することこそが、数学的活動の本性であり、Tall (2011) の議論に基づけば、数学に固有の活動であると述べることができる。逆に言えば、数学の用語を用いてコミュニケーションが図られているように見える活動であっても、そこに構造に基づく必然性の追究が見られない限り、それは本質的には「数学的」ではない、とも言える。つまり、少なくともそれは、数学者が行うような数学的活動ではなく、 AM_p の意味で真正な数学的活動ではない。

AM_P の意味で真正な数学的活動は、数学的構造に基づく必然性の追究がその活動の根本に含まれていなければならない。

8 第3章のまとめ

本章では、RCMA という理論的枠組が、数学教育に固有の枠組ではなく、他教科にも転用可能な枠組であることを問題視した。 AM_S の観点で議論するだけであれば、数学教育に固有な議論は生まれない。 AM_P の観点で真正であると主張できるような数学的活動を教室において組織することができなければ、数学において固有の学びが生じていると主張することもできないであろう。そこで本章では、 AM_P の観点で真正な数学的活動を、RCMA の枠組の範囲内で如何に主張し得るかを考察した。

まず、近年の数学教育研究における社会的協定過程に対する関心の高まりを概観した。この概観を経て、数学教育という文脈での知識の社会的構成過程において、何が数学に固有の正当化の方法であり、何が数学に固有の知識の妥当性の規準であるのか、という課題に答えるためには、ラカトシュ (1980) の LMD (あるいは、その一般化形態) だけでは不十分であり、数学的な協定過程をより一層特徴付ける基準を明らかにすることが必要であると言えた。

その上で、数学に固有な社会・文化的側面を特徴付けるためのアイデアとして、Tall (2011) のクリスタリン・コンセプト論を参照した。そこから、数学の固有性を象徴するキーワードとして、「必然性」と「構造」という語が抽出された。「偶然性」と対比しながら、「必然性」の意味を追究した。これら2つの語の意味を追究する過程で、数学的な考察とは、ある事柄がたまたまそうであった (偶然的に真である) のではなく、必ずそうでなければならなかった (必然的に真である) ことを論証する点にあることと、その必然性が数学的構造に由来するものであることを明らかにした。このとき、あるシステム S が「 X の構造」を有するとは、 S の構成のされ方や S の規定のされ方が、 S にある種の制約を課したことで「 X という特性」が発揮されていることとして規定された。

以上を踏まえると、本研究では、数学的活動の本性を、数学的構造に基づく必然性の追

究として捉えることができよう。このように捉えれば、数学的に洗練されたレベルとクリスタリン・コンセプトの所有は、どちらも、「構造に着目することで必然的に真であるという認識に至れる状況」として読み替えることができ、第三項の導入によって循環が回避される。

また、この捉え方は、RCMAの基本原理と特に矛盾することがないから、RCMAと併用することができる。ただし、当然、数学的構造に基づいて必然性を追究しているからといって、 AM_S の意味で真正であることまでもが保証されるわけではない。なぜなら、数学的構造に基づいて必然性を追究する活動に従事することが、学習者にとって、目標アイデンティティに接近するために最大限合理的な振る舞いと一致しているとは限らないからである。見かけ上、数学的構造に基づいた必然性の追究を行っていたとしても、その追究に従事しているように見えるように振る舞うことが、学習者にとって、目標アイデンティティに接近するための最大限合理的な振る舞いとなっている可能性もあり得る。したがって、 AM_P と AM_S の両立を考えるにあたっては、学習者にとって、目標アイデンティティに接近するための最大限合理的な振る舞いというものが、数学的構造に基づいて必然性を追究することになっていなければならない。しかし、それは、単純に実現し得る問題ではなく、この点は、継続して議論が必要な問題であると言える。

第3章の引用・参考文献

- Blackburn, S. (1996). *The Oxford Dictionary of Philosophy*. Oxford University Press.
- Cambridge Dictionaries Online (n.d.-g). Structure. Retrieved from <http://dictionary.cambridge.org/dictionary/english/structure>
- Ernest, P. (1998a). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. SUNY Press.
- Fallis, D. (2003). Intentional gaps in mathematical proofs. *Synthese*, 134(1), 45-69.
- Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97-124.
- Goldin, G. A. (2003). Developing complex understandings: On the relation of mathematics

- education research to mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 54(2-3), 171-202.
- Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A “Proceptual” View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116-140.
- Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). Springer Netherlands.
- Inglis, M. (2003). Three worlds and the imaginary sphere. *For the Learning of Mathematics*, 23(3), 24-27.
- 彌永昌吉・赤攝也 (2012). 『公理と証明：証明論への招待』. 筑摩書房. (原著は 1955 年出版)
- 國本景亀 (2009a). 「算数・数学教育におけるパラダイム転換—機械論から生命論へ」. 日本数学教育学会誌『算数教育』, 91(4), 27-36.
- 國本景亀 (2009b). 「生命論に立つ数学教育学の方法論：自由で個性豊かな算数・数学授業を目指して」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 15(2), 1-15.
- ラカトシュ I. (1980). 『数学的発見の論理：証明と論駁』(ウォラル J. & ザハール E. 編, 佐々木力 訳). 共立出版.
- Lehman, H. (1980). An examination of Imre Lakatos’ philosophy of mathematics. *The Philosophical Forum*, 12(1), 33-48.
- 中原忠男 (1994). 「数学教育における構成主義の展開：急進的構成主義から社会的構成主義へ」. 日本数学教育学会誌『数学教育』, 76(11), 302-311.
- 中原忠男 (1995a). 「数学教育における構成主義的授業論の研究 (I)」. 『全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 1, 1-8.
- 中原忠男 (1995b). 『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』. 聖文社.
- 日本数学会 (2007). 「構造」. 『岩波数学辞典』. 岩波書店.
- 岡崎正和 (2012). 「数学教育における認識論研究の展開と課題の明確化」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 18(2), 1-12.
- Tall, D. (2004). Building theories: The three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 24(1), 29-32.

- Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 5-24.
- Tall, D. (2011). Crystalline concepts in long-term mathematical invention and discovery. *For the Learning of Mathematics*, 31(1), 3-8.
- Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., & Simpson, A. (1999). What is the object of the encapsulation of a process? *The Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 223-241.
- Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y.-H. (2012). Cognitive Development of Proof. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education*(pp. 13-49). Springer Netherlands.
- 哲学辞典 (1971b). 「ソクラテス」. 『哲学辞典』 (pp. 866-867). 平凡社.
- 坪井明人 (2012). 『数理論理学の基礎・基本』. 牧野書店.
- Von Glasersfeld, E. (1995b). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. The Flamer Press.
- Weber, K. (2014). What is a proof? A linguistic answer to an educational question. *Proceedings of the 17th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1-13.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.
- Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I., & Winicki-Landman, G. (2012). The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 215-229). Rotterdam: Sense Publishers.

第4章

個人による数学的思考の記述モデル

前章までの議論において、 AM_S の観点から学習観として RCMA が必要であること、 AM_P の観点から数学的活動観として「構造に基づく必然性の探究」という見方が必要であることを指摘した。本章では引き続き、本研究における研究方法 1、すなわち、真正な数学的活動を議論するために必要な理論的枠組の定式化に取り組む。特に本章では、研究方法 1 の第三の着眼点として、 AM_S と AM_P の両方の観点から数学の授業設計を検討するための枠組として、個人による数学的思考を表現するためのモデルを提案する。

1 第4章の論点

一般的に言って、数学の教師にとって、学習者達の数学の認識が、いつ、どのように深まっていくかを予測しながら授業を設計することは、重要である。このときの予測は、「仮説的学習軌道」(Simon, 1995) と呼ばれ、数学教育研究と指導実践を架橋する構成主義的なアイデアとして、これまで研究が進められてきている (Clements & Sarama, 2004; Simon & Tzur, 2004; 佐々木, 2004)。近年では、より数学に特化した仮説的学習軌道を考えるべく、Weber & Lockwood (2014) が、仮説的学習軌道論と Harel (2008a, 2008b) の DNR 原理との接続を検討している。本節では、約 20 年間に渡って議論されてきた「仮

「仮説的学習軌道」についての一般論を概観することを通じて、仮説的学習軌道を表現するための理論的枠組として、数学的思考の記述モデルが必要であることを指摘する。なお、Clements & Sarama (2004) が述べるように、現在では「仮説的学習軌道」という言葉が Simon (1995) の提唱した考え方を意味するものとして用いられているとは限らないけれど、本稿では、Simon (1995) の提唱した考え方とその発展の系譜を中心に整理する。

Simon (1995) において、仮説的学習軌道とは、

- 方向性を定義する学習目標
- 学習活動
- 仮説的な学習過程

の3つの構成要素からなるとされている (p. 136)。また、このアイディアの前提として、次のように述べられている。

実際の学習軌道は前もって知り得ないので、それは仮説的である。それは、期待された傾向を特徴付ける。個々の生徒達の学習は、独特 [idiosyncratic] だが、しばしばよく似た道筋に沿って進む。これは、個人の学習がそれに対していくらかの規則性を有すること、[中略] 教室コミュニティがしばしば予測可能な方法で数学的活動を制約すること、そして、同じ授業の生徒達の多くが、同じ数学的課題から利益を得うということを仮定している。 (p. 135, 括弧内筆者補足)

これらの引用が示すように、仮説的学習軌道を検討するということは、どのような活動を通じればどのような心的過程を経てどのような状態に到達し得るか、そして、その到達状態が学習目標と一致するようにするためにはどのような活動を組織すればよいかを検討するという事にほかならない。そこで、問題は、どのような情報をどのように考慮すれば、適切に仮説的学習軌道を検討することができるか、ということである。

どのような情報に着目するかという点については、Simon & Tzur (2004) では、

- 数学的課題を適切に設定すること
- 学習者から見た目標 (例えば、数学的課題としてのゲームに勝つことなど) を考慮すること

表 4.1 テキストの概念的分析の方略 (Thompson, 2000, pp. 309-310 に基づく筆者による整理)

手続き	
(a)	対象となる文を，意味のある単語のまとまりに分解する。
(b)	分解したまとまりに対して，文の中で出現した順に番号付けする。
(c)	各正の整数 n について，1 番目のまとまりから n 番目のまとまりまで読み進めた際に，その人が何をイメージし得るかを予測する。

の重要性が指摘されている (p. 94)。学習者が自ら設定した目標 (以下，学習者の目標) を達成するために，もし数学的知識 K が必要になるならば，その過程において学習者は新しく知識 K を (方法知として) 構成できることが期待される。そのため，知識 K が教師の指導目標 (以下，教師の目標) である場合は，その知識 K が学習者の目標を達成するために途中で必要となるような数学的課題を設定すればよいのである。

また，どのように考慮するかという点については，概念的分析を用いることが提唱されている (Thompson, 2000, 2008)。概念的分析 (conceptual analysis) とは，von Glasersfeld (1995b) が「現在の状況を，ある人がそれを見ているときのその特定の方法で見るとともに，どのような心的操作が実行されなければならないか？」(p. 78) という問いを探究する手法として示したものである。そして，Thompson (2000, 2008) によってその一端が整理されている。概念的分析は，管見の限り形式的な手続きとして定式化されている手法ではないけれど，この手法は，「潜在的に教師達によって理解可能な，学習軌道の具体例を作るためのテクニックを提供する」(Thompson, 2008, p. 46)。

概念的分析は，Thompson (2000) によって，いくつかの例が示されている。そのうちの1つは，テキストを前から順番に読んでいった際に人がどのようなイメージを頭の中に抱くかについての分析例である。この場合において，「学習軌道の具体例を作る」ことは，ある認識の状態にいる学習者が，あるテキストをどのように解釈し，どのような認識の状態へ移行し得るかについてを，論理的な可能性の問題として検討することである。この分析は，表 4.1 の手順に則って行われているものとして整理できる。

概念的分析は，分析を行う際の情報源が何であれ，次の3点が重要である。

- 予測された結果は1つの仮説である。
- 概念的分析とは、誰が行ったとしても同一の結果が得られるような性質の分析手法ではないし、同じ分析者が複数の仮説を提起してもよい。
- むしろ、可能であるならば、積極的に複数の仮説を立てるべきである。

このことは、当然、概念的分析を仮説的学習軌道の予測に適用する際にも当てはまる。これは、観察可能な情報だけから一意的にある人の認知状態を決定することが、原理的に不可能なためである。どのような認知状態であれば、そのテキストの解釈として成立するか。どのような認知状態であれば、その人の行動が上手く説明できるか。これらについて想定し得る可能性を考察する行為が、概念的分析であり、仮説的学習軌道の検討にもなるのである。

仮説的学習軌道論の近年の発展として大きな進歩は、DNR原理との接続が図られたことであろう。Weber & Lockwood (2014) は、仮説的学習軌道の検討にあたって、Harel(2008a, 2008b) のDNR原理の利用が有用であることを指摘した。DNR原理とは、Harelによって提唱された指導原理の名称であり、以下に示す二重性原理 (Duality principle), 必要性原理 (Necessity principle), 反復推論原理 (Repeated reasoning principle) の3つの総称である。

二重性原理 生徒達は、理解方法の成果を通じて思考方法を発達させ、反対に、彼らが生み出す理解方法は、彼らが有する思考方法によって影響される。(Harel, 2008b, p. 899)

必要性原理 我々が生徒達に教えるつもりである数学を彼らが学ぶために、彼らはそれに対する必要性を有していなければならない。ただし、ここでの「必要性」とは、知的必要性 [intellectual need] のことである。(Harel, 2008b, p. 900)

反復推論原理 生徒達は望ましい理解方法と思考方法を内面化するために、推論を練習しなければならない。(Harel, 2008b, p. 900)

二重性原理で言及されている理解方法と思考方法は、同一の精神的行為 (mental act) の2つの側面である。これらは、次のように定義される。

ある人の言明や行為は、その人によって実行されたある精神的行為の認知的生産物を表現 [signify] し得る。そのような生産物は、その精神的行為と関連付けられた

その人の理解方法である。ある人の理解方法が繰り返し観察されるということは、その理解方法が共通の認知的特性を共有しているということを示す。そのような特性は、その精神的行為と関連付けられた思考方法と呼ばれる。(Harel, 2008a, p. 490, [] 内筆者)

例えば、「証明すること」は、頭の中で考えたことによって気付いたことやわかったことを表現することであり、それは、その人にとって、数学を理解するための1つの方法である。また、何度か「証明すること」が繰り返される中で、その人がどのように理解に至るかについて、ある種のパターンが見られるようになる。そのようなパターンの特性は、その人にとっての数学の思考方法を表していると考えられるのである。「方法」(way)という語が示唆するように、明示的に「方法知」という語が使われていないにせよ、Harelも本研究と同様に、その知識観として方法知に重きを置いていることが伺える。

また、必要性原理で言及されている知的必要性も重要である。知的必要性は、心理的必要性〔psychological need〕と対比的に理解する必要がある。心理的必要性とは、「最初に問題に取り組もうとしたり、その解決を追究しようとする動機付的な意欲」(Harel, 2008b, p. 898)のことであり、知的必要性とは、「新しい知識の断片を学ぶことによって均衡〔equilibrium〕に到達するために必要」(p. 897)な問題的状况のことであり、特にこの知的必要性は、社会的必要性や経済的必要性と一致するとは限らない(Harel & Sowder, 2005, p. 43)。

指導計画を立てるという観点で考えると、学習者の目標は、心理的必要性があるからこそ学習者自身の手によって設定され得る。そして、その課題によって提供される知的必要性を満たすことによって得られる学習成果が、教師の目標と適切に対応しているかどうか、効果的な指導計画を立てられているかどうかの分水嶺となる。

Weber & Lockwood (2014)によれば、DNR原理は、仮説的学習軌道を検討する際の基礎であり、必要性原理と反復推論原理は、「思考方法と理解方法の間のフィードバック・ループを駆動するメカニズム」(p. 55)である。ただし、概念的分析においてDNR原理をどのように活かすかについては言及がない。

ここまですべてを整理すると、仮説的学習軌道の検討は、表4.2の7項目を拠り所としながら概念的分析を行うことで達成することができよう。特に、テキストが分析の対象である場

表 4.2 先行研究を総合することによって得られる仮説的学習軌道の予測方略

手続き
(1) 教師の目標は何か? (Simon, 1995)
(2) 学習者が解決を試みる学的課題は何か? (Simon & Tzur, 2004; Weber & Lockwood, 2014)
(3) 学習者の目標は何になり得るか? (Simon & Tzur, 2004)
(4) 学習者の目標を達成するために、どのような知的必要性が生じ得るか? (Harel, 2008a, 2008b))
(5) 学習者の目標を達成するために、どんな理解方法(または思考方法)が繰り返され得るか? (Harel, 2008a, 2008b)
(6) 課題の解決を通じて、何が学ばれ得るか?
(7) (1)と(6)は一致するか? (Simon, 1995)

合であれば、表 4.1 の (a) および (b) の要領でテキストを分解し、(c) を実施する。このとき、分解されたテキストの各断片に対して、表 4.2 の 7 項目を活用することができる。そして、表 4.2 において、指導計画上重要な項目は、(2) の課題の選定である。(1) と (6) の答えが一致するように (2) の課題を設定できているかどうか、数学学習に大きく影響していると言える。ただし、概念的分析という分析方法の性質上、表 4.2 の各項目の答えは、それぞれ 1 つずつとは限らない。

このように、仮説的学習軌道論は、約 20 年間に渡って議論が深められてきた。しかしながら、この仮説的学習軌道というアイディアは、現状、教師や研究者が授業設計段階で実施している予測に名前をつけたものであるに過ぎない。つまり、学習者達がどのように考えるかについて予測されたものであれば、おおよそどのようなものであれ仮説的学習軌道と呼べてしまう現状がある。

この現状は、本研究の関心に従えば、次の 2 つの点で仮説的学習軌道論の有用性を低減している。第一に、仮説的学習軌道論は、必ずしも数学教育の仮説的学習軌道論になっていない。仮説的学習軌道論は、汎用的であるがゆえに、数学の固有性を必ずしも踏まえていない議論展開となっている。第二に、概念的分析の結果は、非形式的な自然言語表現によってなされており、その表現方法は、分析者一人ひとりに委ねられている。このことは、同じテキストを対象として異なる 2 人が概念的分析を実施し、意見を交わし合う場

合において、効果的なコミュニケーションがなされ得ない危険性をはらんでいる。もちろん、概念的分析の性質上、2人の分析結果が一致する必要はまったくないのだが、2人が互いの分析結果の妥当性について分かり合えないという事態は、適切ではないであろう。統一的な着眼点の下で統一的な表現形式が準備されるならば、そうしたコミュニケーションはより建設的なものとなると見込まれる。

そこで、本章では、仮説的学習軌道を表現するための理論的枠組を提案する。特に、次の3条件を満たす理論的枠組を開発する。

[MT1] 数学的活動の本性を反映した表現方法であること。

[MT2] 数学的問題解決における個人の数学的思考について、数学的に洗練された思考もそうでない思考も、どちらも表現し得ること。

[MT3] その学習軌道をたどる上で、洗練されていない学習者がどこでつまづき得るかを表現し得ること。

第一の条件が、前章で指摘した数学的活動観との整合性である。数学的活動が構造に着目した必然的に真なる命題の追究であるならば、そうした AM_p の意味で真正な数学的活動が表現され得るような仮説的学習軌道の表現形式が準備されるべきであろう。それが表現され得ない理論的枠組であるならば、そうした理論的枠組は、少なくとも本研究にとって役に立たない。

第一の条件は、換言すれば、数学的に洗練された思考を表現し得ることを要請しているのに対して、第二の条件は、数学的に洗練された思考だけでなく、洗練されていない思考をも表現し得ることを要請している。 AM_S の意味で真正性を議論する以上、この条件は絶対に必要である。学習者は、数学学習を通じて、洗練されていない状態から洗練された状態へと徐々に変化していく存在である。そのため、仮説的学習軌道を表現するための理論的枠組は、十分に洗練されていない学習者がどのように振る舞い得るか、十分に洗練されている学習者がどのように振る舞い得るかの、その両方を同じ規則で表現できるものでなければならない。この条件は、人間の数学的思考を、その洗練度合いを問わず統一的なメカニズムとして掌握するという観点でも重要である。

第三の条件は、それが授業設計のヒューリスティックスの一部として機能するために必要である。十分に洗練されていない学習者は、ある程度洗練されている学習者が辿るであ

ろう学習軌道とは、その学習軌道上のどこかで異なる軌道へと移行することになる。仮説的学習軌道を表現するための理論的枠組が、どこがその分かれ目になるのかを示唆するならば、それは仮説的学習軌道の表現形式として有用である。

これまで、仮説的学習軌道は、非形式的な自然言語を通じて自由に表現されてきたけれど、上記の3条件を満たすような表現形式が理論的枠組として開発されたならば、その形式で表現可能なように仮説的学習軌道を予測することによって、指導への示唆を導き出すことが可能になると考えられる。次節以降、こうした理論的枠組の開発のための用語の整備を行うことにしよう。

2 数学的思考の二重性

本節では、数学的思考の記述モデルを提案するための基礎的な議論の1つとして、数学的思考の二重性について考察する。

2.1 記述性と規範性の二重性

数理哲学においては、規範的哲学と記述的哲学の両方が議論されてきた。すなわち、数学的思考とはどのようなべきか、どのようなはずか、どのようなでなければならないか (“should be”; 規範的言明) についての哲学と、数学的思考とはどのようなか (“be”; 記述的言明) についての哲学である。何らかのあるべき姿が示されたからといって実際にそのように振る舞えるとは限らないし、実際にそのように振る舞っているからといって、それがあるべき姿であるとは限らない。要するに、同じ内容についての規範的言明と記述的言明の妥当性は、それぞれ相互に依存関係がない。しかしながら、我々の素朴な数学的感覚として、規範的言明と記述的言明が同時に成立する場面を想定することは、いくらでも可能である。

例えば、群 $(G, *)$ について考えよう。 G は集合であり、 $*$ は G 上の二項演算子である。群の公理は、次の4つである。

[群の公理 1] 任意の $a, b \in G$ について, $a * b \in G$

[群の公理 2] 任意の $a, b, c \in G$ について, $(a * b) * c = a * (b * c)$ である.

[群の公理 3] ある $e \in G$ が存在して, 任意の $a \in G$ に対して $a * e = e * a = a$ を満たす.

[群の公理 4] 任意の $a \in G$ に対して, ある $b \in G$ が存在して, $a * b = b * a = e$ を満たす (ただし, e は, 公理 3 で規定されている要素である).

このとき, これらの公理から, 我々は, 「公理 3 で規定されている要素 e が一意である」 (“The element e is unique.”) という言明を導くことができる. また, もし誰かが公理 3 を満たす無数の e が存在すると主張するならば, 我々は, 「その e は一意であるはずだ, 一意でなければならない」 (“The element e should be unique.”) と主張することができるであろう. これは, 「一意である」という記述的言明と「一意でなければならない」という規範的言明が同時に成立している例として見るることができる. そして, この例に限らず, 証明可能なあらゆる数学的言明は, 記述的言明としての側面と規範的言明としての側面を同時に有していると考えることができる.

このように考えると, 数学的言明に限って言えば, あるべき姿と実際の姿が常に一致する. これは, あるべき姿と実際の姿は異なり得るという一般論から見ると, 随分と特殊な状況であるように見える. しかしながら, 数学における規範的言明と記述的言明の二重性は, 体系の内と外を区別することで一般的な状況として説明することができる.

上の例で言えば, 群の公理系 (体系) の内部において, その公理系に属する対象 e は, 事実として「一意である」一方で, 公理系の外部において, その公理系について論じる我々人間は, 「『一意である』と主張すべき」である. 自然言語の曖昧さが, 「 e は一意であるはずだ, 一意でなければならない」 (“The element e should be unique”) という規範的言明を自然な表現であるかのように感じさせるけれど, 正確に言えば, 「(体系の内部で e が一意であるという事実が成り立つがゆえに) 我々は e が一意であると主張しなければならない」 (“We should argue that the element e is unique.”) ということに過ぎない. つまり, 記述的言明とは, 体系の内部における事実に関する言明であり, 規範的言明とは, 体系の外部における人間に対する言明である.

このように考えると, あるべき姿と実際の姿は異なり得るという一般論と整合的な状況

が生まれる。体系の内部において、 e は、事実として一意であるが、その一意であるということが、取り立てて e にとってのあるべき姿であるというわけではない。逆に体系の外部において、人間は、現実には、必ずしも e が一意であると主張する者ばかりではないかもしれないが、我々は e が一意であると主張する姿があるべき姿なのである。

以上を踏まえると、ある1つの数学的命題 P に関わって、「 P である」という記述的言明と、「 P であるはずである」という規範的言明は、人間の数学的思考の帰結として常に同時に成立する。したがって、数学的思考の様相を表現するにあたっては、数学的思考の規範性と記述性の二重性を自然と表現できることが望ましいと考えられる。そこで、この規範性と記述性のそれぞれの起源を考察することで、数学的思考の本性に接近することを試みよう。

2.2 規範性の起源

我々が自分達の数学的思考の帰結に規範性を感じる場合というのは、必ずしも、その思考が形式論理の推論規則に従っている場合ばかりではない。実際、例えば Fallis (2003) が指摘するように、実際の数学者の証明は、形式論理によって説明することが困難である。そのため、人間の数学的思考に先立って形式論理が存在すると考えるよりはむしろ、人間の数学的思考のうち、特に規範性の高いものを一般的に記述することによって論理に関する表現が生まれたと考えるべきである。

例えば、含意命題 $P \implies Q$ と、それに関連する代表的な推論規則、モーダス・ポネンス (modus ponens) について考えよう。モーダス・ポネンスは、次のように表される。

$$\begin{array}{c} P \implies Q \\ P \\ \hline Q \end{array}$$

この場合、モーダス・ポネンスという推論規則の存在が、 $P \implies Q$ と P から Q を推論しなければならない、という規範を生み出しているのではない。そうではなくて、 P があれば Q を推論することができるという状態を、事実として記述するために、含意命題 $P \implies Q$ という表現が作られ、それに対応する推論規則としてモーダス・ポネンスが作られた。こういう順番で考えるべきである。

このように捉えれば、人が何を推論すべきかということは、形式論理に依存しているの

ではなくて、与えられた状況をどのように記述するかに依存している。例えば、その状況が P と $P \implies Q$ の両方が成立する状況であると記述することが妥当であれば、その状況においては Q も成り立っているということを、我々は推論すべきである。したがって、 Q を推論すべきであるという数学的思考の規範性は、与えられた状況が P と $P \implies Q$ の両方が成立する状況であると記述することの妥当性に依存している。一般的に述べれば、数学的思考の規範性は、規範が発生する前段階の、状況の記述に依存している。したがって、数学的思考の規範的側面は、数学的思考の記述的側面に依存していることになり、記述的側面の本性を明らかにすれば、連鎖的に規範的側面の本性の説明にもなる、と言えよう。

2.3 記述性の起源

数学においては、考察中の公理系にいくつかの記述的言明が「仮定」として含まれており、状況の記述の妥当性は、妥当な状況の記述を仮定として与える、という形で保証される。しかしながら、学問としての数学に取り組むときでさえ、我々は常に完全に形式化された公理系に基づいて思考するわけではない。心に抱くイメージに基づいて数学的思考を展開しているという方が、どちらかと言えば、我々自身の経験的感覚に合致していると言えるであろう。

そこで、本研究では、ある瞬間に我々が心に抱くイメージを「心的モデル」と呼ぶこととし、この心的モデルの変化によって数学的思考を捉えることとしよう。そうすることで、数学的思考の記述的側面は、我々の心的モデルに由来するものとして説明することができるようになるであろう。ただし、漠然と「心的モデル」という表現を用いるだけでは、我々は心的モデルについての共通の心的モデルを明確に抱くことができないであろう。以下では、節を改めて、「心的モデル」を中心に据えた数学的思考のモデルを提起することとしよう。

3 心的モデルに対する注意の移行としての数学的思考のモデル化：IDC モデルの提案

本節では、その理論的作業として、数学的思考を具体的に特徴付けしていく。ここでは、特に Mason (1989) の「注意の移行」論を土台とした数学的思考の特徴付けを行うこととしよう。

3.1 「モデル」という語の意味の二重性

数学的思考を心的モデルという観点から議論するにあたって、まずもって、「モデル」という語の意味を明確にしておかなければならない。特に、「モデル」という語は辞書的には多義的であり、十分な定式化が必要である。本研究では、この「モデル」という語について、2通りの意味に注目する。

「モデル」という語の第一の意味は、「具体」としての意味である。辞書的には、「それが極めて良い例であるがゆえに、それに基づいてコピーが作られ得る何か」(Cambridge Dictionaries Online, n.d.-d) という意味の「モデル」である。この意味の「モデル」は、日本語では、例えば、「ロールモデル」、「モデルルーム」、「モデル校」といった形で用いられる。数学的には、第3章でも取り上げたように、主として数学基礎論において、ある条件を満たす数学的対象という意味で「モデル」という語が用いられる(日本数学会, 2007, p. 376)。例えば、整数の加法は、結合則を満たすため、「整数は結合則のモデルである」と言える。数理論理学の教科書においても、「モデルという言葉が強いて日本語に直せば『具体例』という語感かもしれない」(坪井, 2012, p. 61) と述べられており、「モデル」という語には、日常的にも数学的にも「具体」としての意味があると言える。そこで、学習者が心に抱く何かが、何らかの数学的な条件や性質に対する具体例としての機能を果たすとき、その具体的側面を強調して、その心に抱く何かを特に「具体モデル」と呼ぶことにしよう。

「モデル」という語の第二の意味は、「記述」としての意味である。辞書的には、「通常は実物よりも小さい物理的なオブジェクトとして、あるいは、計算に使用され得る単純な記述としての、他のモノを表している何か」(Cambridge Dictionaries Online, n.d.-e) という意味の「モデル」である。この意味の「モデル」は、日本語では、例えば、「水素原子のモデル」、「自然現象の数理モデル」といった形で用いられる。三輪(1983)に代表されるように、数学教育のいわゆるモデル化研究において「モデル」と言えば、普通、この意味である。この意味での「モデル」は、考察対象である何らかの具体物をより単純に理解するための、その具体物が満たす条件を表現したり記述したりしたモデルであると考えられる。そこで、学習者が心に抱く何かが、何らかの考察対象から抽出された数学的な条件や性質を表現する抽象的構成物として機能するとき、その記述的側面を強調して、その心に抱く何かを特に「記述モデル」と呼ぶことにしよう。

数学において、具体モデルと記述モデルは、対をなす概念であると同時に、相対的な概念であるとして捉えることができる。このことは、例えば、三輪(1983)の議論からも示唆される。三輪(1983)は、モデルには、理論から得られるモデルと事象から得られるモデルの2通りがあることを指摘する。本稿の用語を用いるならば、前者は具体モデルであり、後者は記述モデルに相当する。三輪(1983)は、この2つの区別を設けた上で、専ら記述モデルについて考察を進めていくのだが、本稿の関心の下で注目すべき点は、三輪(1983)が、モデルが「理論と事象のジョイントともいうべき地位にある」(p. 118)と述べている点にある。具体モデルから何らかの条件を抽象して、その抽象した条件を記述すれば、その具体モデルに対する記述モデルを得ることができるし、逆に、記述モデルが表現している条件を具体化して、何らかの具体例を作るならば、その記述モデルに対する具体モデルを得ることができる。例えば、整数の体系から、加法に関する閉性や結合性、単位元の存在性、逆元の存在性を抽象すれば、「群の体系」という記述モデルを得ることができるし、逆に、群の条件を充足する具体例を作るならば、その具体例の1つとして、「整数の体系」という具体モデルを得ることができる。

また、数学において、ある対象は、何かの具体モデルであると同時に、何かの記述モデルであり、その意味で、「モデル」という語は、単に2種類あるというよりは、二重性を帯びている。例えば、整数の体系は、先に示したように群の体系の具体モデルであるけれど、それと同時に、自然数の順序対にある種の同値関係を導入することによって構成する

ことができる体系の記述モデルでもある*1. つまり、群は整数の記述モデルであり、整数は群の具体モデルである。また、整数は自然数の順序対の記述モデルであり、自然数の順序対は整数の具体モデルである。したがって、整数は、群の具体モデルであると同時に、自然数の順序対の記述モデルでもある。ある対象が具体モデルであるか記述モデルであるかは、絶対的には決定し得ず、抽象度が異なる何か別の対象との関係性においてのみ決定することができる。

一般的に述べるため、具体モデルと記述モデルを総称して「心的モデル」と呼ぶことにしよう。このとき、ある心的モデルは、それよりも相対的に記述的な心的モデルにとっての具体モデルであると同時に、それよりも相対的に具体的な心的モデルにとっての記述モデルでもある。したがって、以後は、心的モデルを、文脈上、具体としての側面を強調する場合は「具体モデル」、記述としての側面を強調する場合は「記述モデル」と呼ぶこととする。

この具体性と記述性の相対性は、「対象」(object), 「モデル」(model), 「表現」(representation) の3用語の区別が不要であることを示唆する。例えば、数学における「直線」という「対象」は、物理的に鉛筆で引かれた「直線」という「対象」にとって、相対的に記述的なモデルである。それは、物理的な直線の、数学的に興味深い特徴(例えば、直線は2点を結んで描くことができるという特徴)のみを記述し、数学的に興味深いとは言えない特徴(例えば、物理的な直線は幅を持つ)を無視することによって心的に形成される記述モデルである。そして、この記述モデルは、モデルであると同時に、数学的な「対象」なのである。*2元々「記述モデル」の「モデル」が、「模型」という意味であったことを踏まえると、

*1 整数の体系は、自然数の体系から数学的に構成することができる(例えば、足立, 2011)。具体的には、次の通りである。まず、2つの自然数 a, b を順序対にした (a, b) を1つの数と見なす。そして、2つの順序対 $(a, b), (c, d)$ に対して、同値関係 \sim および二項演算 \oplus を次のように定める。

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$$

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

このように定めれば、こうした順序対全体の集合は、整数の加法の体系と同型の体系となる。実際、同値関係 \sim が整数の相等関係と、二項演算 \oplus が整数の加法 $+$ と対応する。したがって、同値関係 \sim および二項演算 \oplus を考える限り、この順序対が持つ詳細な特徴は考慮する必要がなく、実質的に、この順序対全体の主要な特徴を的確に表現した抽象的構成物として整数全体を用いることができる。この順序対が、整数によって表現されるという意味で、整数は順序対の記述モデルになっている(逆に、順序対は整数の具体モデルになっている)。

*2 もっと言えば、ラディカル構成主義の観点から言えば、物理的な直線という存在について、我々は正確なことを何も言うことができない。我々が心的に抱く「物理的な直線」というものも、あくまでも我々が物

直線という数学的対象は、物理的な直線が有する特徴のうち、数学的に興味深い特徴を「表現」したモデルでもある。したがって、心的モデルを考察するにあたっては、モデル、対象、表現の3用語を区別せずに用いることができる。

3.2 「注意の移行」論から見た具体モデルの生成と記述モデルの生成

数学的に興味深い特徴に焦点化することによって心的モデルが形成されるという上記の説明は、Mason (1989) の「注意の移行」論と関連が深い。Mason (1989) は、自身の数学的抽象論において、数学的な抽象とは、「ある表現を一般性の表現として見ることから、その表現を1つの対象や性質として見ることへの、注意の繊細な移行」(p.2, 強調原文)であると述べた。例えば、「自然数 n 」という表現を考えよう。これは、任意の自然数のうちのいずれか1つを表現する変数であろうか、あるいは、自然数という抽象的な数学的対象を表現したものであろうか。Mason (1989) は、この同一の表現を、前者の見方から後者の見方へと注意を移行させることが抽象化であると指摘したのである。1, 2, 3, ... という個々別々の自然数は、例えば、「1は最小の自然数である」、「2は偶数である」、「3は奇素数である」など、それぞれ特殊な性質を有している。こうした特殊な性質を直接考察の対象とはしていなくとも、「自然数 n 」という表現を見た際に、 n に当てはまる数が具体的に何であるかわからないがゆえに、こうした特殊な性質が存在するかもしれないという可能性に注意が向いている間は、「自然数 n 」という表現は、「一般性の表現」としか見えない。しかしながら、そうした特殊な性質の存在可能性から注意をそらし、 n に何が当てはまるかではなく、 n を1つの数学的対象であると見なし始めたとき、抽象化が発生する。つまり、 n が、すべての自然数に共通の性質のみを有する対象であると見なされるようになったならば、自然数 n という1つの数学的対象が認識されることとなる。

抽象化が起こるかどうかは別にして、この「注意の移行」という観点は、本研究の議論において極めて示唆的である。「直線」の例に戻ると、数学における「直線」という「対象」は、物理的な直線の、数学的に興味深い特徴(例えば、直線は2点を結んで描くことができるという特徴)のみに注意を移行させ、それ以外の特徴から注意をそらすことによ

理的な直線を目の当たりにした時に拾い上げることができた特徴のみを記述し、そうでなかった特徴を無視することによって心的に形成された記述モデルにすぎないのである。

て形成される心的モデルであった。他の例の場合でも同様である。群という記述モデルは、整数という心的モデルにおいて、結合則や単位元の存在性など、より一般的な演算体系を考察するにあたって興味深い特徴のみに注意を移行させ、それ以外の特徴から注意をそらすことによって形成される心的モデルである。一般的に述べれば、ある心的モデルに基づいて新しく相対的に記述的なモデルを生成するということは、元の心的モデルが有する特徴の中から、いくつかの特定の特徴のみに注意を移行することに相当している。

一方、今まで意識していなかった特定の特徴について、明示的に注意を移行させる場合を考えれば、逆向きの数学的思考を想定することができる。例えば、群を考察するにあたって抽象度が高過ぎる場合に、群よりも特殊な特徴を有する整数とその加法に特に焦点化して考察を進めてみる場合が、それに相当する。

あるいは、群から整数を想起する場合のように、元の心的モデルがそもそも有していない特徴を新しく想起する場合ばかりではなく、論理的には初めから具備されていたが、人間が心に抱くモデルとしては、新しく注意が焦点化される、という場合も、記述モデルの生成とは逆向きの注意の移行である。例えば、3を、単に2の次の数であるとだけ捉えていた状況から、奇数であるとか、素数であるといった性質にも注意を移行させる場合が、そのような思考の一例として見なすことができるであろう。2の次の数として3が定義された瞬間から、3が奇数であり、かつ、素数であることは、数学的に既に決まっていたことであると考えられるけれど、だからと言って、そのことに人間が注意を向けられていたかどうか、ということは、また別の問題である。

一般的に述べれば、ある心的モデルに基づいて新しく相対的に具体的なモデルを生成するということは、元の心的モデルに対してそのモデルが有していなかった数学的性質を付加した新しい心的モデルを生成することである。このとき、この数学的性質は、元の心的モデルが本来持っていない性質の場合もあれば、元の心的モデルが(ある数学的対象の妥当な表象として)有しているべきではあったが有していなかった性質の場合もある。

3.3 IDC モデル

本章は、第1節で述べたように、仮説的学習軌道の表現形式を提案することが目的としているのであった。ここでは、前小節にて考察した具体モデルの生成と記述モデルの生成という2つの数学的思考のパターンに基づいて、仮説的学習軌道の表現形式を提案するこ

としよう。ここでは、次の2点を仮定することとする。

1. 現在、その人が心に浮かべている、ある名辞 N の「意味」に対応する心的モデルは、 N が満たすべき条件の列挙によって記述できる。
2. N に関する推論は、現在の心的モデルに対する具体モデルを生成するか、現在の心的モデルに対する記述モデルを生成するか、の2種類である。

上記の仮定を単純化して述べるならば、ある数学的対象に対する数学的推論の最小単位は、具体化するか記述するかのどちらかである、ということの意味する。そして、以下では、上記の仮定1に示されている、「ある主体 S にとっての、ある名辞 N の『意味』に対応する心的モデル」を記述するための、 N が満たすべき条件群を、便宜上、「 S にとっての『 N 』の条件群」と呼ぶことにしよう。この「 S にとっての『 N 』の条件群」を用いて、ある瞬間に学習者の抱いていると予測される心的モデルを表現し、各瞬間において刻々と変化する心的モデルの様相を具体化 (Instantiation) と記述 (Description) の連鎖 (Chain) によって捉えようとする、この表現形式を、本研究では、IDC モデルと名付けることにしよう。一口に「数学的思考」と言っても、いろんな思考があるけれど、少なくとも、何らかの問題を解決する際に、ある数学的対象に関連して学習者がどんなことを思惟し得るかを表現するという観点から見れば、この IDC モデルは、仮説的学習軌道を表現するための1つの形式を提供する。

IDC モデルに沿って数学的思考を捉えるとき、具体化 (instantiation)、記述 (description)、抽象化 (abstraction) の3つは、それぞれ密接に関連した心的過程である。いずれの過程も、ある主体 S にとっての、ある名辞 N の「意味」に関わる過程である。これらの用語を、本稿では以下の意味で用いる。

まず、具体化 (=具体モデルの生成) とは、 S にとっての「 N 」の条件群に、 S が新しい条件を増やす思考である。例えば、ある学習者が「自然数 n は奇数かつ素数である」という文を読む過程を、次のように3つに分けて考えよう。

1. 「自然数 n は」という部分を読むことで、その学習者は、その学習者にとっての「 n 」の条件群として、「 n は自然数である」という条件を認識する。
2. 次に、「奇数かつ」という部分を読むことで、その学習者は、その学習者にとって

の「 n 」の条件群に、「 n は奇数である」という条件を追加する。

- 最後に、「素数である」という部分を読むことで、その学習者は、その学習者にとっての「 n 」の条件群に、「 n は奇数である」という条件を追加する。

この $1 \rightarrow 2$, および, $2 \rightarrow 3$ の過程は、どちらも具体化である。文を読み進めるに連れて名辞「 n 」についての条件が心的に増えていき、まさに「 n 」の具体像が徐々に明確化されていく過程として捉えることができよう。

記述 (= 記述モデルの生成) とは、具体化の逆の過程であり、 S にとっての「 N 」の条件群から、 S が条件を減らす思考である。例えば、ある学習者が $25 \times 7 \times 4$ を計算しようとしているとしよう。このとき、その学習者にとって名辞「7」の条件群には、例えば、「7は6の次の数である」、「7は自然数である」、「7は奇数である」等、様々な条件が含まれている可能性がある。しかしながら、前後の25と4から100をつくることできると想起した瞬間、その学習者にとっての「7」の条件群からは、「7は自然数である」以外のすべての条件が一時的に捨象されなければならない。「7」について、それが6の次の数であったり奇数であったりといった情報は不要である。自然数の乗法が可換であることを活かすためには、紙の上では「7」という記号を使いながらも、心的モデルとしては、7そのものを表象するのではなく、「7」が自然数を意味しているということさえ表象すればよい。このことは、換言すれば、7の一部の属性のみを記述している、ということが言えよう。

この例が示すように、記述モデルの生成は、Mason (1989) の抽象化論の言葉を用いれば、「注意の移行」であり、抽象化でもある。時間にすれば一瞬ではあるかもしれないが、自然数の乗法の交換則を適用する一瞬は、「7」という記号を、自然数という抽象的構成物として扱わなければならない。記述と抽象化は、過程としては同一の過程であると言える。したがって、IDCモデルとは、仮説的学習軌道を表現するための理論的枠組の1つであり、ある名辞に関する推論が、実質的に具体化と抽象化 (= 記述) の2種類で説明することを試みる枠組である。IDCモデルを活用することで、仮説的学習軌道を統一した形式で表現することができると期待される。

3.4 IDC モデルによる仮説的学習軌道の表現例

本節では、IDC モデルをどのように用いるかを例示するために、次の例題(以下、「面積問題」)の解決過程に関する仮説的学習軌道を検討しよう。これは、高校数学 I の 2 次関数の応用場面の 1 つである。

幅が 20cm の銅板がある。これを両端から同じ長さだけ 90°折り曲げて水を流す溝を作る。切り口の面積を最大にするには、両端から何 cm だけ折り曲げればよいか。また、そのときの切り口の面積を求めよ。

(高橋他, 2011, p. 98)

この面積問題の、あり得る解決過程の一部に関して仮説的学習軌道を IDC モデルによって示すと、図 4.1 のようになる。ここでは、具体モデルの生成によって条件が追加される箇所を実線の矢印で、記述モデルの生成によって条件が削除される箇所を点線の矢印で示した。

では、図 4.1 について詳述していこう。第一に、時刻 t_0 において、学習者は、問題文の一文目を読み、「銅板」という名辞の意味を、銅板が満たすべき条件によって生成する。

第二に、時刻 t_1 において、学習者は、問題文の解釈を推し進めることで、「銅板」の満たすべき条件を具体化する。それは、少なくとも一定の長さを持つ長方形でなければならない。

第三に、時刻 t_2 において、学習者は、問題解決にあたって銅板の形状や銅板の長さが不要であることを認識し、結局、銅板の幅が 20cm である点のみを記述する。また、銅板がコの字型に加工されたという点を条件として具体化する。

第四に、時刻 t_3 において、学習者は、折り曲げた量が何 cm かあるということを具体化する。また、「切り口」を新しい考察対象の名辞として設定する。学習者は、この対象に、形が長方形であるという条件を追加する。

第五に、時刻 t_4 において、学習者は、「銅板」に関する条件をすべて削除する。これらは、もはや問題解決に不要な情報である。これに対して、「切り口」については、さらなる具体化を行う。つまり、学習者は、問題文の解釈を推し進めることで、さらなる条件を

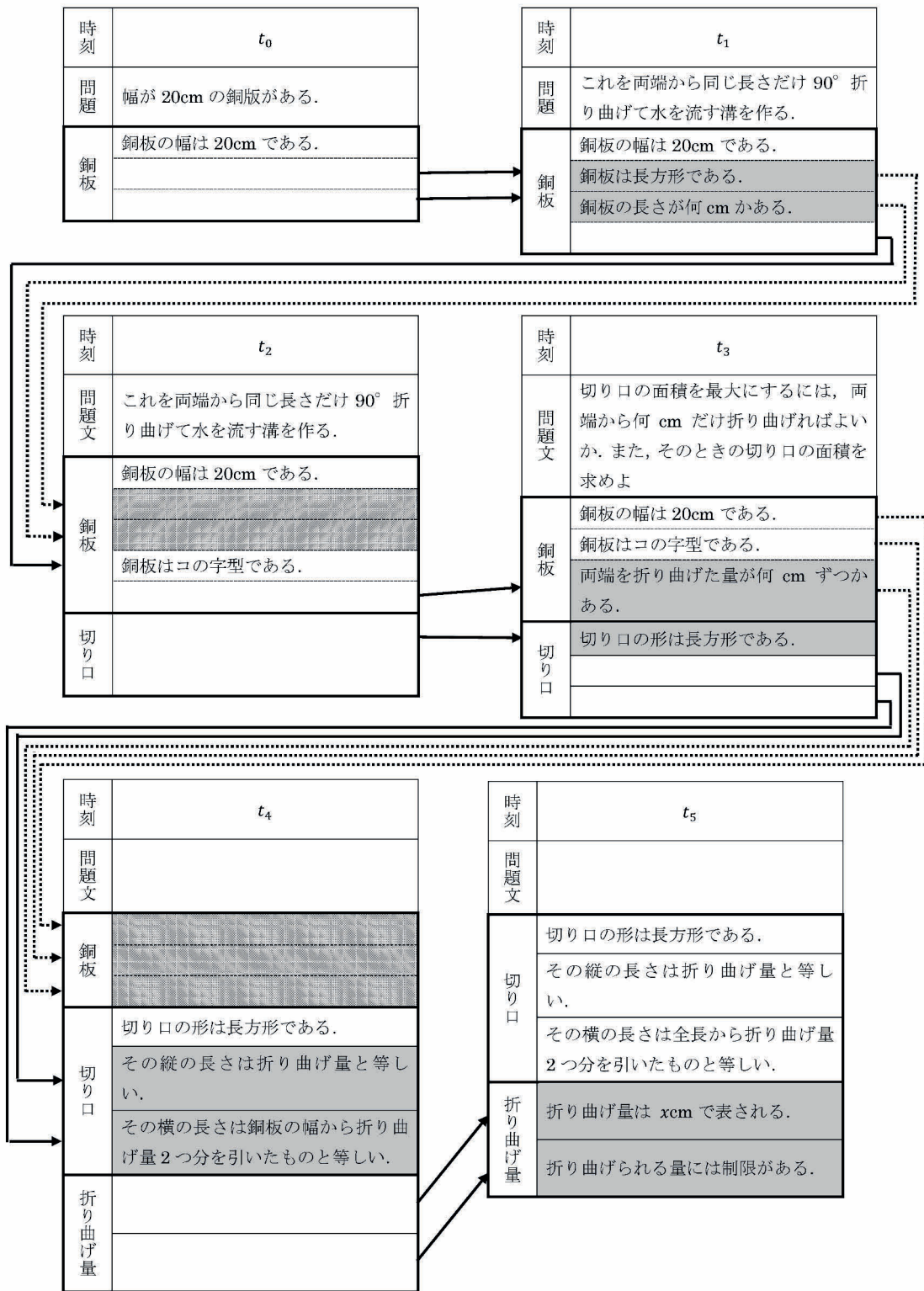


図 4.1 面積問題に対する仮説的学習軌道の IDC モデルによる表現

追加する。それは、切り口の縦の長さが折り曲げ量と等しいことや、切り口の横の長さは銅板の幅から折り曲げ量 2 つ分を引いたものと等しいこと、である。

第六に、時刻 t_5 において、学習者は、名辞「折り曲げ量」を新しい考察対象として追加する。そこでは、折り曲げ量を x と表すことや、折り曲げ量には制限があることが含まれる。

図 4.1 は、あくまでも、こういう過程で推論をする学習者が存在し得ることを表したものである。問題文中から、どういった名辞を拾い上げ、各名辞に対して学習者がどのような条件群を心的に表象していると想定するかは、ひとえに分析者である筆者の主観的で恣意的な判断によるところが大きい。それは、これが仮説的学習軌道である以上、本質的に避けられない問題である。仮説的学習軌道は、投げたボールの軌道を物理的に予測する場合とは異なり、人間の思考過程に関する予測である。学習軌道とは、学習者が教室に 40 人いれば、40 通りの学習軌道があり得るものであり、一人ひとりの学習軌道をすべて網羅的に予測することはほとんど不可能であるとともに、仮にできたとしても、ほとんど無益である。なぜなら、現実的に、授業中に 40 通りすべての予測を頭に入れて授業をするわけにはいかないし、教師の認知的リソースは、事前の予測を頭に留めておくこと以上に、その授業中の一瞬一瞬に起こる出来事に対処していくことに注力されるべきであると考えられるからである。そういう意味で、仮説的学習軌道とは、授業の展開を考える上での学習者の思考過程のアウトラインであり、仮説的学習軌道の予測者の数学教育観や教材観が反映されたものとなるものであるし、反映されてよいものである。

したがって、面積問題に対して図 4.1 の仮説的学習軌道を想定することに対しては異論もあり得るであろうし、図 4.1 の仮説的学習軌道があり得る軌道の 1 つとして認められたとしても、現実的により起こり得そうな仮説的学習軌道が、もっと他にあるとの見解もあり得るであろう。図 4.1 に示した過程には、銅板が長方形であることなど、結果的に必要のない情報に注目する過程も含まれており、効率的な過程というわけでも模範的な過程であるというわけでもない。そういう意味で、図 4.1 は、模範的な過程であろうとなかろうと、数学的推論が、条件を増やす「具体化」と条件を減らす「記述」の組み合わせで表現し得ることを示している。

本研究の主題として重要なことは、図 4.1 の仮説的学習軌道が面積問題に対する仮説的学習軌道として客観的に妥当性の高いものであるかどうかではない。そうではなくて、

IDCモデルという制約の下で仮説的学習軌道を考えることによって、授業設計を検討しやすくなるかどうか、ということである。仮に図4.1に示した仮説的学習軌道が、本研究が参照しなかった他の研究成果の帰結や、今後新しく示される研究成果の帰結に照らして、何らかの意味で妥当性を欠くということが明らかになったとしても、IDCモデルによって仮説的学習軌道を表現することが有用で在り続ける限り、IDCモデルの価値は損なわれない。ただし、現段階で、IDCモデルを使用する利点が十分に示されているとは言い難いから、次小節では、図4.1をIDCモデルの具体的な使用例として念頭に置きながら、IDCモデルの利点を論じることとしよう。

3.5 IDCモデルの利点

IDCモデルを用いて仮説的学習軌道を表現することには、2つの利点がある。

第一の利点は、IDCモデルの表現方法は、数学的対象の定義や数学の公理系の表現方法と同じ表現方法であるため、認識させたい数学的対象と認識している数学的対象を同じ表現形式の上で議論することができるようになる点である。この特性は、問題文の内容と心的モデルの関係を議論することを容易にする。

第二の利点は、心的モデルの変更という心の働きが、Mason (1989)の言う「注意の移行」というアイデアをその基礎として、統一的に説明されることである。数学的対象について推論するというのが、その対象が満たすべき条件群に関して、今まで注目していなかった条件に注意を向けたり、逆に、今まで過剰に注目していた条件から注意をそらしたりするということによって説明できるとすれば、数学的問題解決を支援するために教師が取り組むべきことは、学習者の注意を適切に移行させてやることである。もし数学的対象が目に見えるものばかりであれば、指さし等の物理的な「指示」によって学習者の注意を移行させることも可能であるが、数学的対象というのは、目に見える場合ばかりではない。目に見えない数学的対象に関して、今までとは異なる部分に学習者の注意を移行させようと思ったとき、言葉による「指示」でそれを実現するにはおのずから限界がある。そこは、学習者に「発問」することによって、学習者自身に次に注意すべき事柄を自ら探索させ、自ら見出させるということが必要不可欠である。そのため、検討した仮説的学習軌道がIDCモデルによって表現されていれば、次にどんな条件へ注意を向けさせればよいか明確になり、そのことが、学習者の支援を検討する上で有用な情報を提供することに繋がる

と考えられる。

これら2つの利点により、数学的問題を分析して得た仮説的学習軌道を IDC モデルによって表現することで、適切な注意の移行を支援するという観点から、その軌道上の要支援箇所を検討することができるようになる。IDC モデルは、あくまでも仮説的学習軌道を表現するための理論的枠組であるから、IDC モデルそれ自体が、予測した仮説的学習軌道上のどこが要支援箇所に相当するかを指し示してくれるわけではないが、IDC モデルによる表現は、学習者が適切な注意の移行を自然に実現できない箇所の考察を容易にすると考えられる。

4 第4章のまとめ

本章では、仮説的学習軌道論が数学に十分特化されていないことと、仮説的学習軌道の効果的な表現形式が存在しないことを問題として取り上げ、次の3条件を満たすような、仮説的学習軌道を表現するための理論的枠組の開発を目指した。

[MT1] 数学的活動の本性を反映した表現方法であること。

[MT2] 数学的問題解決における個人の数学的思考について、数学的に洗練された思考もそうでない思考も、どちらも表現し得ること。

[MT3] その学習軌道をたどる上で、洗練されていない学習者がどこでつまづき得るかを表現し得ること。

開発にあたっては、次の2観点に着目した。

- 数学的思考の規範的側面と記述的側面の二重性
- 「モデル」の二重性

第一に、数学的思考の規範的側面と記述的側面とは、数学的推論の帰結として導出された命題 A が、「 A であるべき (であるはず、でなければならない)」という規範を意味しているのか、単に「 A である」という記述を意味しているのかについての議論である。本章

では、数学的体系の内外の区別を導入することで、数学的推論の帰結として導出された命題 A とは、「 A であるべき」という規範と同時に、「 A である」という記述を表し得るものであり、数学的思考には規範的側面と記述的側面の二重性があることを指摘した。その上で、数学的思考の規範的側面の起源は、その記述的側面に還元される、記述的側面の起源は、我々人間が心に抱く「心的モデル」に還元されることを指摘した。

第二に、心的モデルについて議論するにあたって、「モデル」という用語もまた二重の意味を帯びていることを指摘した。「モデル」という語は、第一に「具体」、第二に「記述」としての意味を有するので、本研究では、第一の意味を特に強調する場合は「具体モデル」、第二の意味を特に強調する場合は「記述モデル」と呼ぶこととした。その上で、数学において、具体モデルと記述モデルは、対をなす概念であると同時に、相対的な概念であることを指摘した。この具体性と記述性の相対性は、「対象」(object)、「モデル」(model)、「表現」(representation) の3用語の区別が不要であることを示唆しており、心的モデルを考察するにあたっては、モデル、対象、表現の3用語を区別せずに用いることができることを示した。

こうしたモデル観と、Mason (1989) の「注意の移行」論を組み合わせることで、本章では、仮説的学習軌道の表現形式として IDC モデル (Instantiation-Description-Chain モデル) を提案した。IDC モデルは、次の2点を仮定する。

1. 現在、その人が心に浮かべている、ある名辞 N の「意味」に対応する心的モデルは、 N が満たすべき条件の列挙によって記述できる。
2. N に関する推論は、現在の心的モデルに対する具体モデルを生成するか、現在の心的モデルに対する記述モデルを生成するか、の2種類である。

そして、IDC モデルを用いて、図 4.1 のように仮説的学習軌道を表現することを提案した。

発問行為の設計を考えるにあたって、IDC モデルを用いて仮説的学習軌道を表現することには、2つの利点がある。第一の利点は、IDC モデルの表現方法は、数学的对象の定義や数学の公理系の表現方法と同じ表現方法であるため、認識させたい数学的对象と認識している数学的对象を同じ表現形式の上で議論することができるようになる点である。第二の利点は、心的モデルの変更という心の働きが、Mason (1989) の言う「注意の移行」というアイデアをその基礎として、統一的に説明されることである。これら2つの利点によ

り、数学的問題を分析して得た学習軌道を IDC モデルによって表現することで、適切な注意の移行を支援するという観点から、その軌道上の要支援箇所を検討することができるようになる。本章の提案によって、学習者が適切な注意の移行を自然に実現できない箇所の考察を容易にできることが示唆された。

ただし、IDC モデルで表現される仮説的学習軌道は、あくまでも学習者個人の認識と教材の特性という観点から見た仮説的学習軌道である。もちろん、数学の授業を設計する上で、そうした観点から見た仮説的学習軌道は必要不可欠であるが、数学の授業において集団で数学的活動を営むことを計画する場合、個人と教材の関係性から予測した仮説的学習軌道だけでは、十分な予測であるとは言えないであろう。そこで、次章では、数学の授業において集団で数学的活動を営む場合において活用可能な仮説的学習軌道の予測方略を検討するために、集団での数学的活動を分析するための理論的枠組を新しく提案するとともに、実際にその理論的枠組を通じた数学的活動の分析を行う。

第4章の引用・参考文献

足立恒雄 (2011). 『数とは何か そしてまた何であったか』. 共立出版.

Cambridge Dictionaries Online (n.d.-d). Model. Retrieved from [omhttp://dictionary.cambridge.org/dictionary/british/model_1](http://dictionary.cambridge.org/dictionary/british/model_1)

Cambridge Dictionaries Online (n.d.-e). Model. Retrieved from [omhttp://dictionary.cambridge.org/dictionary/british/model_4](http://dictionary.cambridge.org/dictionary/british/model_4)

Clements, D. H. & Sarama, J. (2004). Learning Trajectories in Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89.

Fallis, D. (2003). Intentional gaps in mathematical proofs. *Synthese*, 134(1), 45-69.

Harel, G. (2008a). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. *ZDM*, 40(3), 487-500.

Harel, G. (2008b). A DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part II: with reference to teacher's knowledge base. *ZDM*, 40(5), 893-907.

- Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 27-50.
- Mason, J. (1989). Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 2-8.
- 三輪辰郎 (1983). 「数学教育におけるモデル化についての一考察」. 『筑波数学教育研究』, 2, 117-125.
- 日本数学会 (2007). 「構造」. 『岩波数学辞典』. 岩波書店.
- 佐々木徹郎 (2004). 「数学教育における「意味の連鎖」に基づいた「学習軌道仮説」について」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 10, 13-19.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.
- 高橋陽一郎他 (2011). 『数学 I』. 啓林館.
- Thompson, P. W. (2000). Radical Constructivism: Reflections and Directions. In L. P. Steffe & P. W. Thompson (Eds.), *Radical Constructivism in action: Building on the Pioneering Work of Ernst von Glasersfeld* (pp. 291-315). Routledge.
- Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundation of mathematics education. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*(Vol. 1, pp. 45-64). Morelia, Mexico.
- 坪井明人 (2012). 『数理論理学の基礎・基本』. 牧野書店.
- Von Glasersfeld, E. (1995b). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. The Flamer Press.
- Weber, E., & Lockwood, E. (2014). The duality between ways of thinking and ways of understanding: Implications for learning trajectories in mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, 35, 44-57.

第5章

集団による数学的活動の質

本章では引き続き、本研究における研究方法1，すなわち，真正な数学的活動を議論するために必要な理論的枠組の定式化に取り組む。特に本章では，研究方法1の第四の着眼点として，集団による数学的活動の質を捉えるための理論的枠組の定式化を試みる。これは，集団による数学的活動の中で個人がどのような数学的活動を展開するか，その質を捉えるための理論的枠組の定式化となる。

1 第5章の論点

第3章でも考察の対象となったように，ラカトシュ(1980)の「数学的発見の論理」は，証明と論駁として知られており，数学教育研究において最もよく引用されている数理哲学の1つである。それは，ともすれば形式的な知識の体系として記述されがちな数学を，予想すること，証明すること，論駁することという非形式的な過程の繰り返しとして数学を記述する。そのため，この数学的発見の論理は，数学学習の可謬主義的本性を主張する際に，しばしば利用される(例えば，Confrey, 1991; Ernest, 1998a; Lampert, 1990)。この数学的発見の論理に基づく数学観の応用範囲は広く，小学校レベルの問題解決(Lampert, 1990)から，大学レベルの定理の再発見(Larsen & Zandieh, 2007)まで全学校種に及ぶ。

しかしながら、Sriraman & Mousoulides (2014) は、次のように指摘する。

ラカトシュの思考実験の教授学的価値は豊かだけれど、ラカトシュによって概念化された『理想的な』教室を再現しようとする教授実験に関する数学教育の文献において、あまりその価値の多くは現れていない

(p. 513).

数学的発見の論理の型で記述可能な活動は、 AM_P の意味で真正な数学的活動であるということが出来るから、上記の指摘が一般に広く当てはまるとすれば、教室における AM_P の意味で真正な数学的活動を実現することの困難性が示唆される。

こうした困難性は、素朴な数学的活動と洗練された数学的活動の間のギャップに由来している。数学的発見の論理は、数学学習の可謬主義的本性を示唆するけれど、予想に対するあらゆる反対意見が、教室における数学的発展に貢献するわけではない。特に、数学的発見の論理という概念が抽出された経緯として、その概念が、初学者による活動ではなくて、プロの数学者による洗練された活動に由来していることに注意しよう。素朴なままでは AM_S の意味でしか真正に振る舞わない学習者達が、 AM_P の意味でも真正に振る舞うようになる過程を議論するために、我々は、素朴な活動と洗練された活動の関係について、より多くの経験的データを必要としている。

そこで、本章では、数学的活動を記述するための代替的な理論的枠組の定式化を試みる。なお、提案される枠組は、ラカトシュ (1980) の数理哲学ではなく、ラカトシュ (1986) の科学哲学、すなわち、科学的研究プログラムの方法論に基づくことになるであろう。なぜなら、数学的発見の論理が相対的に洗練された活動を記述するためにのみ有用 (例えば、Larsen & Zandieh, 2007) なのに対して、科学的研究プログラムの方法論に基づいて提案される枠組は、素朴な数学的活動と洗練された数学的活動の両方を記述することができると見込まれるからである。それは、素朴な活動と洗練された活動を対比するための記述的枠組になり得る。

2 ラカトシュの科学哲学

本節では、ラカトシュ (1986) の科学哲学である「科学的研究プログラムの方法論」について概観する。特に、ラカトシュ (1980) の数学的発見の論理と比較することで、その特徴を明確化しよう。

「科学的研究プログラム」とは、同じパラダイムを共有する科学者間での一連の活動を指す概念である。科学という営みは、提唱される 1 つ 1 つの科学的仮説の妥当性によって評価されると考えられがちであるが、ラカトシュに言わせれば、「重要な科学的業績を記述するための形態的単位は、個々の仮説ではなく、研究プログラムだ」(p. 7) ということになる。例えば、ニュートン物理学は、3 つの力学的法則と万有引力の法則の合計 4 つの仮説をその「堅い核」とする科学的研究プログラムである。

ニュートン物理学の具体例がそうであったように、「すべての科学的研究プログラムは、その『堅い核』によって特徴づけられている」(ラカトシュ, 1986, p. 71)。端的に言えば、「堅い核」とは、理論的仮定の集合である。また、科学的研究プログラムは、この堅い核を守るため、補助仮説としての「防御帯」を創造する。科学的研究プログラムを通じて発見され、正当化されるあらゆる科学的主張は、堅い核と防御帯の両方に基づいて行われる。もし主張の反例が観測されたなら、その核か、いくつかの帯のどちらかが偽である。しかしながら、科学者達は、疑似科学者と同様に、自身の堅い核を諦める必要がない。彼らは、防御帯に含まれるいくつかの言明を改訂することで、自分たちの堅い核を守ることができる。この過程は、「問題移動」と呼ばれる。原理的に、堅い核内の仮定は、任意に選ばれ得る。

問題移動について、ラカトシュ (1986) は次のように一般的に論じる。

T_1, T_2, T_3, \dots という一連の理論を考えてみよう。ここで後続する理論はどれも、変則事例の調整を行なうために、先行理論に補助仮説を加えることによって(あるいは意味論的な再解釈を行なうことによって) 生じたものであり、少なくとも先行

理論の反駁されていない内容と同程度の内容をもっているものとしよう。こうした一連の理論が、理論的に前進的である(あるいは「理論的に前進的問題移動をしている」)と言われるのは、それぞれの新理論が先行理論よりも多くの経験内容を持つ、すなわち、新しい、それまで予期されていなかった事実を予言する場合である。また、一連の理論的に前進的な理論が経験的に前進的である(あるいは「経験的に前進的な問題移動をしている」)と言われるのは、より多くの経験内容が検証^{*1}されている、すなわち、それぞれの新しい理論が何らかの新事実の発見に実際にいたる場合である。最後に、問題移動が理論的にも経験的にも前進的な場合、その問題移動は前進的であると呼ばれ、そうでない場合には後退的と呼ばれる^{*2}。われわれが問題移動を「科学的」なものとして「受容」するのは、少なくともそれが理論的に前進的な場合に限られる。そうでない場合には、「疑似科学」として「棄却」される。進歩の程度は、どのくらい問題移動が前進的であるか、一連の理論がどのくらい新事実の発見をもたらすかによってきめられる。一連中のある理論がより高度に検証された内容をもつ理論によってとって代わられたとき、その理論は「反証された」とみなされる。

(pp. 51-52, 強調原文)

また、次のようにも述べる。

もしわれわれが、先行理論と反証事例との間に生じた矛盾を解決するために、内容を増加させるような(科学的)説明を与えずに、ただ内容を減少させるにすぎない(言葉の上の)再解釈を与えるだけの理論を提出するならば、その矛盾の解決は、単に意味論的なもの、非科学的なものである。事実が科学的に説明されたと言えるのは、当の事実とともに新たな事実もまた同時に説明される場合のみである。

(p. 52, 強調原文)

*1 [筆者注]「検証」(corroboration)とは、科学哲学者ポパーの用語であり、「検証」(verification)と対比的に用いられる。「検証」が理論や言明の真理性を証明することであるのに対して、「検証」は、理論を経験的テストにかけ、肯定的結果が得られることを指す(ラカトシュ, 1986, pp. 452-453, 「訳語解説」)。

*2 [筆者注]用語“degenerative”は、「後退的」・「退行的」等と様々に訳出される。ラカトシュ(1986)では、「後退的」の訳が用いられていたが、管見ながら用例としては「退行的」の方が多いように見受けられ、本研究では以後「退行的」の訳を用いる。

表 5.1 数学的発見の論理と科学的研究プログラムの方法論の類似性 (Yuxin, 1990, p. 380 に基づき作成)

	数学的発見の論理	科学的研究プログラムの方法論
基礎的要素	補題	防御帯
	主たる結論	堅い核
ヒューリスティックス	誤謬性の再伝播の原理	消極的発見法
	基礎原理	積極的発見法
種々の方法論	証明分析の方法	前進的問題移動
	モンスター排除法・例外排除法	退行的問題移動

このようにして説明される科学の方法論を、ラカトシュ (1986) は、科学史から抽象した。ここでいう「方法論」とは、アルゴリズムとしての方法論ではなく、本研究の関心と非常に近親したヒューリスティックス (発見法) としての方法論である (pp. 71-79)。

哲学の分野においては、Yuxin (1990) が、数学的発見の論理と科学的研究プログラムの方法論の類似性を指摘している。具体的には、表 5.1 に示すような対応関係があるという。しかしながら、Ernest (1998a) は、Yuxin (1990) による類似性の指摘を認めながらも、ラカトシュの数理哲学と科学哲学との間にある重大な違いを指摘する。それは、科学的研究プログラムの方法論の思想は、「線引主義」(demarcationism) である一方で、数学的発見の論理の思想は「非線引主義」(anti-demarcationism) であるというものである (p. 111)。つまり、ラカトシュは、良い科学的活動と悪い科学的活動の区別を提供した一方で、良い数学的活動と悪い数学的活動の区別を提供しなかった。

ラカトシュ (1986) の考えによれば、科学が疑似科学と区別されるためには、次の経験的データを予測しなければならない。この規範は、ある科学的研究プログラムが自身に対する反証となるデータを自分自身によって発見した場合や、対抗する別の科学的研究プログラムによって提示された場合に求められる規範である。反証となるデータを突きつけられた科学的研究プログラムは、そのデータをも上手く説明するために、当然、何らかの修正を求められるわけであるが、たとえそうした修正が、防御帯に含まれるいくつかの言明をその場しのぎ的に修正するだけのものであり、任意に選ばれた堅い核に含まれる言明を一切修正しなかったとしても、その修正の結果を踏まえて、次の新しい経験的データの存在が予測できるならば、その修正は妥当な修正であるとみなされる。そして、そうした修

正をし続ける限り、何度、反証となるデータを突きつけられようとも、その科学的研究プログラムは、問題移動について前進的である。逆に、反証となるデータを突きつけられた際に、次の新しい経験的データの存在を予測することなく、防御帯に含まれるいくつかの言明をその場しのぎ的に修正するだけで、任意に選ばれた堅い核に含まれる言明を修正しないようであれば、それは、単に自説に固執し、自説を守るためだけの修正であると見なされる。そうした科学的研究プログラムは、問題移動について退行的である。

Yuxin (1990) の対応付けによれば、表 5.1 に示すように、ラカトシュの数理哲学と科学哲学は、「主たる結論」と「堅い核」が構造的に対応していることになるけれど、一方が非線引主義で他方が線引主義であるという観点から見れば、この対応関係は成立しない。ラカトシュの数理哲学は、数学と擬似数学の関係を主張しているというよりは、

- 数学者による正統な数学の「実践」を完全に形式的なものとして特徴付けることが不可能であり、
- それゆえに、それは、非形式的な数学として特徴付けられ得る

ということを主張している*³。そのため、ラカトシュの数理哲学は、数学者達に規範を求めない。つまり、ある「主たる結論」を主張していた数学者達がいて、その「主たる結論」の証明に不備が見つかったとしても、その数学者達は、その「主たる結論」を諦めなくてもよい。たとえ、ある定義やある前提の下でその「主たる結論」が成り立たないことが明らかとなったとしても、その「主たる結論」を成立させるような定義や前提が別途見つかるのであれば、それはそれで、ある種の数学的発見である*⁴。一方、ラカトシュの科学哲学は、科学者達に規範を求める。つまり、ある「堅い核」を主張していた科学者達がいて、それを反証するデータが得られた場合において、防御帯の修正によって次の経験的データを予測し続けることができなくなったならば、ラカトシュの科学哲学は、科学者達に、その堅い核を完全に諦めることを要求する。

このような違いは、ラカトシュ (1980) の数理哲学と ラカトシュ (1986) の科学哲学の構

*³ ラカトシュの数理哲学は「可謬主義」と呼称されるが、これは、あくまでも正統な数学の「実践」が原理的に可謬であることを、つまり、人間としての数学者によって提案される真偽のラベリングが原理的に可謬であることを示すだけであり、数学という体系そのものが可謬であるという意味で解されるべきではないであろう。

*⁴ もちろん、そのような発見に常に価値があるかどうかは、また別の問題である。

成方法の違いによって生じるものである。ラカトシュは、各哲学を、それぞれ数学史と科学史を参照しながら構成しているが、そうであるにもかかわらず、ラカトシュ (1986) の科学哲学で考慮されている疑似科学者に対応する存在として、擬似数学者なるものの存在は、ラカトシュ (1980) の数理哲学において考慮されているわけではない。標語的にまとめるとすれば、ラカトシュの科学哲学が「科学 vs. 疑似科学」という構図であったのに対して、ラカトシュの数理哲学は、「数学 vs. 擬似数学」ではなくて、「形式数学 with 非形式数学」であったのである。

もちろん、これは、Yuxin (1990) の対応付けが誤っているということではなくて、単に本研究と Yuxin (1990) とでは着眼点の抽象度が異なる、というだけの問題である。数理哲学と科学哲学は、別種の議論であるから、ラカトシュの数理哲学と科学哲学は、ある抽象度で議論すれば対応関係が見出せ、具体的に検討すれば対応関係が崩れる場面が生じるという、ただそれだけの問題である。ただ、本研究の議論にとっては、ラカトシュの数理哲学と科学哲学の差異を考慮することが重要である。次節では、この観点から数学的活動の質を捉えるための理論的枠組を考えよう。

3 集団による数学的活動の質を捉えるための理論的枠組

本節では、科学的研究プログラムの方法論から示唆を得た新しい理論的枠組を提案する。この理論的枠組は、特に、本研究がその学習観として基底部分に置いているラディカル構成主義の下で、高い効果を発揮すると見込まれる。というのも、第2章でも取り上げたラディカル構成主義の行為シエムというアイデアと、科学的研究プログラムというアイデアの間には、構造的な類似性が存在するからである。本節では、以下、次の手順で論証を進める。第一に、科学的研究プログラムが、行為シエムの一種であることを、その定義に基づいて示す。第二に、逆に行為シエムが、科学的研究プログラムのものである可能性を論じる。これは、第一の議論と合わせると、要するに、行為シエムが科学的研究

プログラムと同義である可能性を論じることに相当する。第三に、行為シエムが科学的研究プログラムと同義である可能性が、数学的活動の質を捉えるための理論的枠組になることを示す。

3.1 ある種の行為シエムとしての科学的研究プログラム

まず、行為シエムは、第2章の第3節で定式化したラディカル構成主義の知識観に基づけば、暗黙的な方法知の一種として、次の3つの特徴を持たなければならない。

1. もしその行為シエムが次の期待される結果を予測するなら、その行為シエムやそれに関連する方法知は生存可能性を維持する。もしそうでないなら、その行為シエムやそれに関連する方法知は生存可能ではなくなる。
2. たとえその行為シエムやそれに関連する方法知がある瞬間において生存可能であっても、期待される結果と実際の結果に関して、次の整合性は保証されない。
3. 非整合 (特に、攪乱) に直面したとき、その行為シエムやそれに関連する方法知は、修正によってそれが生存可能になろうとならなかりと、任意に修正され得る (生存可能性の低い行為シエムや方法知は、知識としての有用性を失うかもしれないが)。

同様に、科学的研究プログラムも次の3つの特徴を有する。

1. もしその科学的研究プログラムが次の経験的データを予測するなら、その科学的研究プログラムは前進性を維持する。
2. たとえその科学的研究プログラムがある瞬間に前進的であったとしても、予測されたデータと実際のデータに関して、次の整合性は保証されない。
3. 非整合に直面したとき、その科学的研究プログラムは、修正によってそれが前進的になろうと退行的になろうと、任意に修正され得る (退行的な科学的研究プログラムは科学としての資格を失うかもしれないが)。

上記の記述を比較すればわかるように、生存可能性と前進性という2つの概念が対応していると考えれば、行為シエムと科学的研究プログラムは、その特徴が非常によく似ている。実際、科学者の問題解決活動を行為シエムという観点で記述するとすれば、その特徴

は必然的に類似する。

具体的に述べるならば、あらゆる科学的研究プログラムは、それが前進的に問題移動している限り、一種の行為シエムである。このように捉えることができる。

ラディカル構成主義の観点に立てば、すべての知識を方法知として見なす必要があるから、(科学者達はその運営を自覚しているか否かにかかわらず) 前進的に問題移動する科学的研究プログラムを運営するというのもまた、次の経験的エヴィデンスを予測するための方法知である。科学的研究プログラムの目的は、単一の目的に還元できるとは限らないが、例えば、ニュートン物理学の科学的研究プログラムを方法知として見なしたときの、あり得る1つの目的は、物体の運動を予測することであると述べることができよう。

その上で、前進的に問題移動する科学的研究プログラムについては、そのプログラムにおける中心的な理論について、次の3つが成り立つ。

- (i) 現在の状況を「その理論を用いて次の経験的エヴィデンスを予測すべき状況である」と知覚する「状況の知覚」がある。
- (ii) その理論を適用するという「活動」がある。
- (iii) その理論によって予測される「期待された結果」がある。

この3つが成り立つということは、前進的に問題移動する科学的研究プログラムを運営するということが、一種の方法知として、ある種の文脈において生存可能な行為シエムをなしているということである。科学的研究プログラムは、たとえ正しい予測ができなくとも、新しい経験的エヴィデンスを予測し続ける限り前進的に問題移動していると見なされる一方、その科学的研究プログラムは、たとえ正しい予測ができなくとも、方法知として使用され続ける限り生存可能であると見なされるから、前進性と生存可能性は、実質的に同義の概念である。

反対に、退行的に問題移動する科学的研究プログラムについても考えてみると、そのプログラムにおける中心的な理論について、次の3つのうちのいずれかが成り立つ。

- (i) 現在の状況を「その理論を用いて次の経験的エヴィデンスを予測すべき状況である」と知覚する「状況の知覚」がない。
- (ii) その理論を適用するという「活動」が生まれない。

(iii) その理論によって予測される「期待された結果」がない。

この3つのいずれかが成り立つということは、どんな文脈においても、この科学的研究プログラムが一種の方法知として生存可能な行為シエムになり得ないということである。科学的研究プログラムは、たとえそれが実際には真理を言い表していたとしても、方法知として使用される文脈が存在しない限り非生存可能である。すなわち、退行性と非生存可能性は、実質的に同義の概念である。

以上より、

1. 前進的／退行的と生存可能／非生存可能が実質的に同義であるということ
2. 科学的研究プログラムが、行為シエムの一種であるということ

この2点が明らかとなった。

3.2 ある種の科学的研究プログラムとしての行為シエム

今、科学的研究プログラムが、行為シエムの一種であることを述べたが、本研究では、科学的研究プログラムが単に行為シエムの一種であるというだけでなく、逆に、行為シエムも、局所的に見れば一種の科学的研究プログラムであると考えことにしよう。「科学的研究プログラムが行為シエムの一種である」という言い方は、科学的研究プログラムの集合が行為シエムの集合の部分集合であることを示唆するが、本研究では、科学的研究プログラムと行為シエムが同義であると考えてるのである。

こうした考え方は、必ずしも本研究において特異な考え方であるというわけではない。それは、構成主義においてしばしば採用されてきた考え方である。学習者をミニ数学者・ミニ科学者と見なしたり、学習者の形成したコンセプションを、一貫性の程度の差こそあれ、ある種の理論構築であるから見なすことは、構成主義研究において一般的に見られる考え方である(例えば、Smith, diSessa, & Roschelle, 1994)。したがって、科学的研究プログラムがある種の行為シエムであるから見なすだけでなく、行為シエムをある種の科学的研究プログラムと見なすということは、ラディカル構成主義を標榜する本研究において自然な考え方である。

また、こうした考え方は、単に構成主義において一般的であるだけでなく、既存の概念

を拡張的に取り扱う際に一般的であるとも考えられる。例えば、実数体を複素数体に拡張した場合、数体系から順序構造が失われる。しかし、そうであるにもかかわらず、複素数は、順序構造以外の「数」の特徴を有しているので、我々は、複素数体を「数」の一種であるとする。同様に、1つ1つの行為シエムは、ニュートン物理学のようなメジャーな科学的知識から見れば、知識と呼べるほど体系立って整理されたものではない。しかし、そうであるにもかかわらず、もし行為シエムが、体系性以外の「科学的研究プログラム」の特徴を有しているならば、我々は、行為シエムを「科学的研究プログラム」の一種であると考えることができるであろう。

ただし、数学の場合とは異なり、行為シエムが体系性以外の「科学的研究プログラム」の特徴を有しているかどうかは、経験的な検証を必要とする問題である。なぜなら、「行為シエム」の定義と「科学的研究プログラム」の定義から言えることは、科学的研究プログラムが行為シエムの一種であるということであって、その逆ではないからである。したがって、行為シエムが実際に方法知として活用されている場面を調査することによって、行為シエムが科学的研究プログラムの特徴を有しているということを確認する必要がある。

そして、行為シエムが有しているかどうかを確認すべき科学的研究プログラムの特徴とは、典型的には、「防御帯」と「堅い核」であろう。我々は、現在の行為シエムの定義に基づいて、行為シエムが「防御帯」と「堅い核」を有しているということを主張することはできない。そのため、この点は、実際の数学的活動を観察することによって確認されなければならない。したがって、ここで言えることは、行為シエムが科学的研究プログラムと同義であるということではなくて、行為シエムが科学的研究プログラムと同義である可能性があるということである。

3.3 行為シエムと科学的研究プログラムの類似性に基づく理論的枠組

行為シエムが科学的研究プログラムと同義であるという可能性を念頭に置いて事例を観察することは、ある種の理論的枠組に基づいて事例を観察するということである。そのように捉えることによって、我々は、行為シエムにおける防御帯と堅い核を次のように規定

することができる。まず、行為シエムにおける防御帯とは、「その学習者がある結果を予測するために用いたけれど、(意識的であれ無意識的であれ) その使用が適切でなかったと評価した知識の断片」として定義され得る。また、行為シエムにおける堅い核とは、「(意識的であれ無意識的であれ) その学習者が守り続けたい、修正されない仮定の集合」として定義され得る。

行為シエムにおける防御帯および堅い核は、観察によって一意的に確定できるような対象ではない。二人の人間が同一の観察記録から防御帯と堅い核の推定を試みたとしても、観察記録の解釈の微妙な違いにより、同じ防御帯と堅い核が推定されないかもしれない。また、そうして推定される防御帯や堅い核という対象は、その観察の一場面を整合的に説明するために存在が仮定される対象であり、何度でも繰り返し類似の場面において観察される対象ではない。しかしながら、行為シエムにおける防御帯や堅い核の存在を仮定して事例を観察することで、数学の指導、数学の学習、数学の本性、あるいは、人間の数理認識の本性などについて、我々が今まで想像することさえもしなかった新たな一面を発見できるのであれば、そうした仮定を採用することは、観察を通じた仮説形成の方法知として価値がある。そして、そうした仮定の採用は、観察者の観察を、ある特定の方向へと志向付ける働きを持っていると考えることができるから、その仮定は、理論的枠組の一種であると考えられる。行為シエムにおける防御帯と堅い核の存在を仮定することは、ラディカル構成主義が、ちょうど、理論的枠組としてすべての認識は主観的であると仮定することによって、今まで数学教育研究が気づき得なかった学習の本性に気づき得るようになったのと同じ意味で、理論的枠組をなしていると言える。

なお、本研究と類似した試みとしては、布川(1994)と野口(2001, 2002)を挙げることができる。本研究が、行為シエムと科学的研究プログラムの構造の同型性に注目しているのに対して、布川(1994)は、問題場面の構造と科学的研究プログラムの同型性に注目し、「問題場面の構造に基づく解決には、研究プログラムの基本的要素の対応物を見いだすことができる」(p. 28)と述べる。また、野口(2001, 2002)は、布川(1994)を援用しながら、堅い核を意識化させることによって学習者の肯定的発見法を促進し、授業において学習者の誤りを活かす方策を検討している。しかしながら、本研究は、それら、いずれの研究よりも一般的な形で科学的研究プログラム論の援用を試みるものである。

具体的には、布川(1994)は、問題場面の構造と科学的研究プログラムの構造の同型性に

注目した議論を展開しているため、科学的研究プログラム論の適用範囲が限定的である。それに対して、本研究の提案は、行為シエムという数学に限定されない人間の認識一般に関わる部分が、そもそも科学的研究プログラムそれ自体を直接的に支えているという考察を手がかりに、その関係性を逆向きに捉えることが示唆的であることを主張するものであるから、単純に構造が類似しているということを越えた応用を試みるものである。また、野口 (2001, 2002) は、科学的研究プログラム論から示唆される指導原理を導くことに軸足を置いたため、数学の授業における学習者達の問題解決活動が、前進的問題移動の形式を取ることができるように介入することが強調されている。それに対して、本研究は、そもそも前進的問題移動の形式がどのようにして発生するのか、あるいは、前進的問題移動と退行的問題移動の関係がどのようなものであるかを調査するための理論的枠組を提案するものである。したがって、布川 (1994) や野口 (2001, 2002) の研究よりも、本研究の提案の方が、科学的研究プログラム論をより根本的に援用していると言える^{*5}。

そこで以下では、行為シエムにおける防御帯および堅い核の存在を仮定した理論的枠組を、「科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組」と呼ぶことにしよう。学習者達による数学的活動を、この新しい理論的枠組を用いて記述することの利点は、2つある。

第一に、数学的発見の論理に基づいて数学的活動を議論する従来の考え方と比較すると、この新しい理論的枠組は、数学的活動の質を前進的か退行的かという形で記述することができるようになる。数学的発見の論理に基づいて数学的活動を記述しようとした場合、そのような枠組では数学的活動の理想的な状態しか表現できないから、例えば、数学的問題の解決に繋がっていく数学的活動と、必ずしも解決に結びつかない数学的活動との間の関係性や、それらの間の変化を記述することに適していない。それに対して、科学的研究プログラムの方法論に基づいて数学的活動を記述しようとする場合、少なくとも、数学的問題解決に関して、前進的問題移動をしている局面と退行的問題移動をしている局面を分けて記述することができる。前者は、問題解決が進展している場合であり、後者は、問題解決が停滞している場合と捉えられ、学習者の望ましい振る舞いと望ましくない振る

^{*5} もちろん、根本的であるがゆえに、本研究から得られる知見は、布川 (1994) や野口 (2001, 2002) の示した知見よりは相対的に実践へ応用しづらいという側面はある。しかしながら、本研究の提案は、建設的に経験的データを蓄積するために有用であると考えられるから、長期的に見れば、こうした根本的な理論的な整備を経ることによって、将来的に、布川 (1994) や野口 (2001, 2002) の知見の妥当性をより強固にしたり、あるいは、それらの知見の修正に寄与したりするデータの収集に役に立つことになるであろう。

舞いの両方を記述することが可能となる。

もちろん、数学的活動の理想形を提示したという意味で、数学教育研究の関心として、数学的発見の論理に基づく数学的活動像も、価値のある表現形式ではある。しかしながら、例えば、どのような過程を経て、学習者が問題解決の停滞を打破し、問題解決を進展させていくのかや、どういう指導が契機で学習者が数学的問題解決を進展させられるようになるのかを明らかにすることを通じて、数学教育への示唆を得ようとするならば、問題解決の進展状態と問題解決の停滞状態の両方について統一的な視座から経験的データを収集することもまた、価値のあることであると考えられる。

第二に、科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組を通じた観察を繰り返し累積することは、これまで個人の認識と教材の特性という観点にばかり重きを置いて議論されてきた仮説的学習軌道のアイデアを、他の学習者との相互作用にも注意を払いながら、拡張することを可能にすると考えられる。本研究がここまで議論してきた理論的枠組は、他の学習者との相互作用に十分配慮した仮説的学習軌道の検討に有用であるとは言い難い。例えば、第2章で提案した動機付けに関する仮定を導入したラディカル構成主義が有用であるのは、数学の教師(あるいは、数学の成績が良いなどの理由で、その教室において中心的であると評価されている他の学習者)との相互作用を考慮するときである。また、第4章で提案したIDCモデルが有用であるのは、教材の特性との相互作用を考慮するときである。そういう意味では、数学の授業設計にあたって実際的な仮説的学習軌道を考案するためには、教師や教材という観点のみならず、学習者が参加の度合いが自分と同程度の他者と相互作用する場面をも想定することが必要であろう。その点、科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組は、そうした仮説的学習軌道を検討する基礎資料の収集に貢献し得る。なぜなら、科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組を通じた観察は、学習者が他者と関わり合う中でどのように堅い核を維持し続けたり、あるいは、防御帯を修正したりするのかを記述できるからである。参加の度合いが同程度の学習者達同士で議論をする中で、どんな仮説を支持し続け、どんな仮説を放棄するのかという問題は、本研究がこれまで論じてきた理論的枠組からだけでは簡単に予測することができない問題である。また、この問題は、従来のように、数学的発見の論理の考え方に基づく理想的な教室を考えるだけでは、予測し得ない問題である。もっと実際的な教室の場面についての経験的事実を集積するところから、我々はその第一歩を始めなければならない。

以上、2つの利点を有する視座の1つとして、数学的活動の質を、行為シエムにおける堅い核と防御帯という観点から捉えることには意義がある。次節では、この科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組を用いて、実際の数学的活動の事例分析を試みるとともに、そうした分析から得られる示唆について検討しよう。

4 サンプル分析のための事例

本節では、集団として取り組まれた数学的問題解決の実際の事例を示す。これは、次節にて、科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組がどのように活かされ得るかを例示するために使用する事例である。

4.1 サンプルの背景

サンプル分析で分析の対象となるエピソードは、筆者によって実施された数学の授業の一部である。これは、ある国立大学の附属高等学校の2年生のグループワークの様子を記録したものである。彼らは、前時までに常用対数表を用いた $\sqrt[3]{2}$ の近似値の計算方法を学んでいる。授業に参加した学習者達は、4~5人で構成される9つの小グループに分割され、常用対数の応用問題の解決にグループで取り組んだ。彼らが取り組んだ問題の1つは、 2^{54} の各位の数について、他のグループよりも詳しい情報を明らかにせよというものであった。ここでは、9つのグループのうち、特に興味深い活動の様相を見せたグループに焦点化して、分析を行う。そのグループのメンバーは、表5.2の通りである。このグループの活動の様子は、5人全員の動きがカメラに収まる位置から、ビデオカメラによって記録された。

このグループは、次の3点を理由に、今回、サンプル分析の対象として選定された。第一に、ビデオカメラによって活動の様子が比較的詳細に記録されていたこと。第二に、問題解決の途中、5人グループの内部において解決方針に関して対立が生じており、協同的な問題解決を考察する上でサンプルとして興味深いこと。第三に、筆者による恣意的なグループ選定となってしまうという問題点はあるが、本研究が提案する理論的枠組の有効性

表 5.2 グループのメンバー構成

仮名	役割	性別
Ham	リーダー	男
Ike	記録係	男
Tak	計算係	男
Hor	プレゼンター	女
Uts	サブリーダー	女

について示す良い事例となること。

活動の円滑化や活性化を図る目的で、各グループは、授業者より予め、リーダー・サブリーダー・記録係・計算係・プレゼンターの5つの役割をメンバーに割り振るよう指示をされていた。しかしながら、少なくともここで着目したグループに関して言えば、議論が白熱するあまり、自分達で割り振った各自の役割を無視して活動していたように思われる。

4.2 エピソード

以下は、このグループの問題解決の様子について、ビデオ記録に基づいて筆者が記述したものである。各メンバーの発話記録は、発言番号、仮名、発言内容の形で文字起こしされた。発言内容と合わせて丸括弧に囲われて示されている内容は、発言の趣旨を理解しやすくするための、筆者による補足である。また、以下では、発話記録以外の状況を補足説明するために、筆者による状況の叙述と合わせて報告することとする。なお、発言番号は、「#*n*」という記号表現で参照することとする。例えば、「#1」は、Hamによる「ぶっちゃけ、(グループ活動の)ルール全然わかってないんやけど。」という発言を指す。

まず、以下は、 2^{54} の問題が示される前の発話である。この段階で、既にIkeは、常用対数の必要性を予期していた。その予測は、直前の授業で学習した内容が常用対数であるということに由来しているようであった。

- 1 Ham ぶっちゃけ、(グループ活動の)ルール全然わかってないんやけど。
- 2 Ike どうせ常用対数使えっていう・・・

- 3 (しばらく無言)
- 4 Ike 教科書，教科書，何かある？
- 5 Hor 教科書・・・
- 6 Ike たぶん，常用対数表使うことになる
- 7 Ham あ，そういうこと？・・・そういうことか。

このような議論を課題提示前にしていたこともあって，課題が提示された後，Ham は直ちに常用対数の使用を提案した。

- 8 Ham はーい，じゃあまず常用対数を取ろう． $\log_{10} 2$ ．常用対数の・・・
- 9 Ike たぶん 0.3 くらい
- 10 Ham $\log_{10} 2$ ．0.30・・・10 とかやろ？ ここさ (記録用紙を見ながら)，誰か書くよな．誰だっけ．記録係．
- 11 Hor 記録係．
- 12 Ham Ike，じゃあ，書いてくれ．式を． \log_{10} ，常用対数取って， \log_{10} ・・・で， \log_{10} ， $\log_{10} 2^{54}$ は，54 がここに来て， $54 \log_{10} 2$ ．で， $\log_{10} 2$ が，たぶん，0.3010．
- 13 Ike $\log_{10} 2$ ってどこで見えるん？ (教科書の常用対数表を覗き込みながら) どこやっけ？
- 14 Ham 10，2 だから・・・
- 15 Uts ここまでしか出てない
- 16 Ham ここは $\log 0$ ・・・ $\log 2.00$ ，0.2，0.1 (常用対数表の $\log_{10} 2.00$ 付近をペンで指しながら)
- 17 Ike ああ，なるほど．じゃあ，0.3010．

このときまでは，グループ全体で一体感のある取り組みをしていた．しかし，常用対数を用いたアプローチが Ham や Ike を中心に進展していく中で，次第に Hor や Uts の発言は少なくなっていくた。

- 18 Ham 54×0.3010 やってくれん？ (計算係の Tak に向かって)

- 19 Tak 50?
- 20 Ham $4 \times \dots$
- 21 Ike 0.301.
- 22 Tak (電卓を叩いて) 16.254.
- 23 Ike とりあえず 16 桁っていうことはわかったな.
- 24 Ham あ, そういうことか. あー, そういうことね.

なお, この議論から得られる桁数は, 正しくは 17 桁であり, Ike の # 23 の発言は誤りである. あとで # 74 においてグループ内で書き出した数が 17 桁の数であるにもかかわらず, 考察対象が 16 桁であるという発言自体は, 一貫してグループ内で修正されることはなかった.

女子達が沈黙をし始めてしばらくしてから, 突然, Hor は Uts に 2^{54} を手で計算することを提案した.

- 25 Hor (聞き取れず) \dots (Uts へ向かって) 計算しよう (黙々と 2^{54} を手で計算し始める).
- 26 Uts あー

女子 2 人が独立に計算をし始めてもなお, 男子達は自分達の対数のアプローチを進めていった. ここから, 大きく分けて男子と女子とで異なるアプローチが同時的に進行することとなった. 以下, # 27 から 38 の間, 女子達は発言がないが, それは, 黙々と計算を進めていたからである.

- 27 Ham っていうことは何, 10 の 16 (乗) から, 10 の 17 (乗) の間にあるってこと?
- 28 Ike そうそうそう.
- 29 Ham あー \dots , で, こうなるか. てことは, 16 桁が, え.
- 30 Ike で, あとは, その, 対数を取ったら 16., 16.254 ということじゃけえ, 16.254 にできるだけ近い数をどんどん探して行って, で, それを, 真数を元に戻すっていう作業をたぶんすればいい.
- 31 Ham 10 の, 10 のってこと? 10 の 16. \dots

- 32 Ike そう、じゃけえ、10 の対数取ったら、16.2 とか 16.3 とかを調べて、それだったら、たぶん、それでできるかな？
- 33 Ham 16.3 ··· 10 の 16.3 乗とか？ それって、(笑みをこぼしながら) ということ？ はいはい、じゃけえ、10 の 16.3 (乗) を調べるん？
- 34 Ike そうそう.
- 35 Ham そういうことね.
- 36 Ike たぶんそういうこと.
- 37 Ham 10 の 16.3 乗は、待てよ、対数を取って $\log_{10} 10$ の $16 \cdot \dots$.
- 38 (男子達もそれぞれ黙々と作業を始める.)

この段階では、一見すると男子と女子でアプローチに対立が生じていたように見えた。しかしながら、Ike や Ham の議論をここまで黙って聞いていた Tak が、ほどなくして、女子達のアプローチに目を止めるようになった。そして、手元に持っていた電卓を用いて 2^{54} を直接計算し始めた。

- 39 Tak (Uts や Hor が計算しているのを見て、少し笑ってから黙って $2 \times 2 \times 2 \dots$ を電卓で計算し始める)

Hor と Uts は、こうした Tak の動きの変化に気付いて、手計算を中断した。そして、Tak にコミュニケーションを持ちかけた。一方で、その間、Ham と Ike は Hor, Uts, Tak の 3 人とは独立に、対数でのアプローチについて議論を続けていた。

- 40 Uts (Hor に向かって笑いながら) (聞き取れず。Tak の動きの変化を知らせているのか?)
- 41 Hor (Tak に向かって) それさ、それ、何桁まで出せるの？ (電卓の表示桁数を問うている)
- 42 Tak えっとねー、1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
- 43 Ham 10 の 16.3 乗とかってどうやってやるん？ (Ike に向かって)
- 44 Hor (Tak の答えを聞いて) ダメだ.
- 45 Ike 10 の 0.3 乗が出せればできる.

- 46 Uts (Hor に向かって) ダメ？
 47 Ham うあー，だ，そういうことだ！

手計算せずとも，単純に電卓で 2^{54} を計算しきれのではないかと期待していた Hor は，#42 において Tak から電卓が 8 桁までしか計算できないと知って，#44 において落胆した様子を見せた．これを受けて，Uts は，#46 において Hor に疑問形で問い返している．Hor が，このときに 8 桁では計算しきれないと判断した理由は定かではない．#23 において，Ike が，答えが 16 桁になると主張していたことを理解していたからなのか，手計算の手応えや 2^{10} が約 1000 であることから桁数に見積もりがついていたからなのか，それは，わからない．ただ，少なくとも，Tak や Uts は，8 桁ではダメであるということに，ほとんど察しがついていないようであった．

これと時を同じくして，#43 において，Ham は Ike に対して，10 の 16.3 乗を計算する術について問うている．Ham は，そこまでの議論で，10 の 16.3 乗が 2^{54} に近い値となることを理解していたようであるし， $\log_{10} 10^{16.3} = 16.3$ より，常用対数表から，値が約 16.3 となる真数を見出すことができれば，その真数がおよそ 2^{54} となることも理解しているように見えた．しかしながら，教科書の巻末の常用対数表には，常用対数の値が 0.0 ～ 1.0 の間に収まるような値しか見つからない．そのため，その方向でのアプローチに行き詰まったようであった．

そうした中，#45 において，Ike から次のアプローチが提示される．#47 の感嘆からも伺えるように，ここで指数法則を応用するという発想は，Ham にとって衝撃の大きなアプローチだったようである．

同時に，この Ham の大きな感嘆は，グループ内の動向に変化を生じさせる契機にもなった．Hor が，Ham の感嘆に興味を示したのである．Hor は，Ham の感嘆を受けて，すぐさま Ham に問い返した．

- 48 Hor (Ham に向かって) 10 の何ていった？
 49 Ham えっと，だから，分解して，16.3 乗だったら・・・，10 の 0.3 乗．10 の 16 乗がまずなんなんや？ 0 が 16 個？ (紙に書き出しながら) 10 の 10 分の 3 乗だから・・・

- 50 Ike ああ、じゃけえ、常用対数で、常用対数が 0.2 になる値を調べてくれれば。
- 51 Ham それな。
- 52 Ike (常用対数表を見ながら) 限りなく 0.2 に近い数。いやー、どっちにする？ (1.58 と 1.59 の常用対数を見比べて)
- 53 Ham こっちやなあ。(1.58 の方)
- 54 Ike ぎりぎりこっちやなあ。1.58 で近似するか。(記録用紙にメモを取る) で、0.3 は？
- 55 Ham ああ、待ってよ、じゃけえ、待てよ、どうするんやっけ？ 10 の 0.3？

しかしながら、Hor の発言は、Ham には届かなかった。Ham と Ike は、自分たちの思考に没頭していて、(おそらく意図せず) Hor を無視した。そして、Hor は、彼らとコミュニケーションを図ることを諦め、Hor と Uts は、再び一緒に手計算の続きに没頭することとなった。

ここで、Ike と Ham の発話記録から推定される彼らのアプローチは、次の通りである。 $10^{16.3} = 10^{16} \times 10^{0.3}$ かつ $10^{16.2} = 10^{16} \times 10^{0.2}$ であり、 $\log_{10} 10^{0.3} = 0.3$ かつ $\log_{10} 10^{0.2} = 0.2$ であるから、 $10^{0.3}$ と $10^{0.2}$ であれば手元の常用対数表より近い値を見出すことができる。したがって、 $\log_{10} X \doteq 0.3$ および $\log_{10} Y \doteq 0.2$ を満たす 2 つの数 X, Y を常用対数表より見つけ出すことができるとすれば、 $10^{16} \times Y < 10^{16.254} < 10^{16} \times X$ と値の範囲を絞ることができる、というものである。

ただし、このアプローチは、 \doteq の扱いが杜撰である。 2^{54} のおおよその値を知るためだけならまだしも、 2^{54} の各位の数をできるだけ正確に求めるという目的の下では、誤った結論を導き得るアプローチである。Ike 自身、誤差の扱いの不正確さについては自覚していたようで、# 52 や # 54 において、アプローチに迷いが生じ始めた。たまたま Hor が Ham の動向に注目を向け始めていたこともあって、ここでグループ全体として数学的に意味のある発話が途切れることとなる。具体的には、Tak が本研究の撮影用ビデオカメラに興味を示し始めたことを契機として、5 人全員がビデオカメラについて雑談をし始めることになってしまった。

56 (約 15 秒間, 雑談)

そうした状況を破ったのは、雑談をしながらも次のアプローチを検討していた Ike であった。

57 Ike ちょ、待って、一瞬で終わるかもしれん。

58 Ham Ike 一人で解決するっていう・・・

59 Uts, Hor (笑う)

Ike は、この瞬間においては、まだ次のアプローチを明瞭に言語化できないようであったが、それを契機として、グループの話題が再び数学的内容に向き付けられることとなった。特に、グループ全体での議論を進めていく上で、Ike が、思いつきかけた次のアプローチを直ちに言語化できなかったことは、大きな意味を持ったように思われる。#57 の Ike の発言の後、Ike がすぐに自分のアイディアを示さなかったことで、Tak が、冗談交じりに手計算によるアプローチを提案することとなった。

60 Tak 地道に 2 の 54 乗やろうぜ。

61 Ike やめとけ

62 他 (笑う)

Tak の提案は、思考中の Ike の耳にも入ったようで、Ike は、それを実現不可能な冗談だと解釈し、笑いながら、Tak に計算をやめるよう述べた。#62 で笑いが起こっているように、グループ内の他のメンバーも、これを冗談として受け止めたようであった。しかしながら、この、Tak による冗談めかした発言が、今まで一人で常用対数を用いたアプローチを捻出し続けてきていた Ike に対して、Hor 達が発言する機会を導いた。具体的には、メンバー達の笑いを受けて、Uts が、他のメンバー達に Hor のアプローチを紹介した。

63 Uts (Hor を指して) ここ、やってるやつがいるから。

64 Hor 普通にさ、あの、1024 の 5 乗かける 16 でいいじゃん。

65 Ike それを計算する勇気がある？

66 Hor そう、それを計算する。

- 67 Uts 今、でも、やってる(笑う)
- 68 Hor 今やってる.
- 69 Ham すごいな、数学じゃないのがすごいな. Ike 見ていい? (Ike のそばに移動して)
- 70 Tak (一人で独立に地道に計算し始める)

しかしながら、 2^{54} を手で計算するというアプローチは、Ike や Ham にとっては、依然として馬鹿げたアプローチに聞こえるようであった。特に、Ham は、# 69 においてそのアプローチを「数学じゃない」と評した。その上で、Ham は、Ike がどのようなアプローチを取ろうとしているのか、Ike が手元で行っている計算に関心があるようであった。一方、Tak は、仕方なく 2^{54} を一人で計算し始めた。Ike や Ham の常用対数を用いたアプローチが理解できないという諦め的一方で、Hor や Uts の女子達の輪にも入り難いという状況のように見受けられた。

こうして、Ike・Ham, Tak, Hor・Uts というグループ内の3つの下位グループが、一時的な交流を経て、またバラバラに活動をし始めた。しかしながら、ここに来て、Ike の方針が、不安定になり始めた。ここまで、Ike は、常に Ham に対して次々と次なるアプローチを提供してきたが、すぐに次のアプローチを言語化できない状況に陥ったようであった。このことは、Ike の発現頻度や、発言の正しさに対する確信の度合いが減るという事態を招き、Ham が Ike のアプローチを理解しようと後追いしているという状況が崩れることとなった。結果として、Ham も Ike に対して意見を述べるできるようになり、Ike と Ham は、これまでとは異なり、互いに互いを支援し始めることとなった。そして、Ike は、Ham に対して解決アプローチがすぐに思い浮かばない旨を告げるようになり始めた。

- 71 Ike? とりあえず、こうするより、ダイレクトにやったほうがいいかもしれん。えっと 10 の 16.254 乗やけん、(常用対数表を見ながら) 0.254, 254. だいたい 1.8?
- 72 Ham いや、1.79の方が近いかな?
- 73 Ike 1.79・・・うわー、ここからどうやる?

このように Ike が弱音を吐き始めたことが、Ham が主体的に問題解決に関与し始める

大きな契機となった。

- 74 Ham 10 の 16 乗かけて・・・ (“17900000000000000” を書き出す).
ニアリイコールじゃわからんな. 「以上」 ってことよね? 「よ
りでかい」 んよね?
- 75 Ike でも, この常用対数表じゃこれ以上無理じゃない?
- 76 Ham んー. ってことは, (常用対数表の 1.8 を指しながら) こっちも
出せばいいんか. 1.8 だから, 2.54 倍? 違う, そういうことか.
- 77 Ike こういうことよ ($179 \times 10^{14} < 2^{54} < 180 \times 10^{14}$ を書き出す).
- 78 Ham ってことは, 一桁目は, 16 桁目は, 違うな, 第 16 桁は, 1 に
なるのは確定で・・・
- 79 Ike 二桁目は・・・
- 80 Ham 7 か 8.
- 81 Ike いや, 7.
- 82 Ham あー, そうかそうか.
- 83 Ike 8 より小さいけえ.
- 84 Ham 7 やな.

一方, この頃, Uts と Hor は, 計算がある程度まとまったようで, 互いにコミュニケーションを取り始めた.

- 87 Uts せん・・・16384.
- 88 Hor 16384 (笑う). やってみよう.

このとき, Hor の「やってみよう」という発言は, $16384 = 2^{14}$ であることから, $2^{40} \times 2^{14}$ を実行しようとしているものだと思われる. Uts に計算させていた 2^{14} の値が 16384 であったため, その値を自分の計算に組み入れようとしているようであった.

Ike と Ham は, Uts と Hor のコミュニケーションには気にも留めず, そのまま議論を続けていた.

- 89 Ike 170・・・179. なんぼ×10の14乗やけん, 3桁目は, 9か. こっからどうするかやな. 詰んだで.
- 90 Ham 常用対数表的にもう無理じゃね?
- 91 Ike どうしよう?
- 92 Ham (自分の席に戻る) どうするかな.

彼らの計算は常用対数表それ自身が有する誤差を十分に考慮できていないので, 正確な値の判定ではなかったが, 仮に誤差を考慮できていたとしても, 手元にある精度の常用対数表ではすべての桁を決定することはできない. その意味で, これ以上, 常用対数表を用いてアプローチできないという彼らの判断は, 概ね正しい. 彼らは, 自分達のアプローチに限界を感じ, 周囲の様子を伺い始めた.

- 93 Ike 4桁目以上いくやつおるかな?・・・え, みんなガチで計算しとるん?

このIkeの発言の前半部分「4桁目以上いくやつおるかな?」は, 自分達のグループ以外の方向へ視線を向け, 少しキョロキョロしながらの発言であり, 他のグループが自分達のグループよりも詳細に 2^{54} を特定しているかどうかを気にした発言であった. その一方で, 後半の「みんなガチで計算しとるん?」は, 自分達のグループの内部へ視線を向けて放った言葉である. 2^{54} を手計算するというアプローチを一度一蹴しているIkeにとって, 他のメンバー達が本当に手計算を実行し続けるとは, 予想だにできなかった事態のようであった.

この発言に対して, 手計算のアプローチを主導したHorが反応した.

- 94 Hor ガチで計算しとる.
- 95 Ike マジで?
- 96 Hor これの計算が終わったら全部計算できる.

ここでいう「これの計算」とは, $2^{40} \times 2^{14}$ の計算のことだと思われる. これには, IkeもHamも驚きを隠せず, 苦笑いするしかなかったようである.

表 5.3 主な出来事に基づくエピソードの整理

	主な出来事	発言番号
(1)	常用対数への着目	# 1 ~ # 7
(2)	常用対数の計算	# 8 ~ # 24
(3)	分裂	# 25, # 26
(4)	絞込方略への移行	# 27 ~ # 38
(5)	合流	# 39 ~ # 42, # 44, # 46
(6)	交流の試み(女子)	# 48
(7)	無意識的無視	# 43 ~ # 51
(8)	近似値への注目	# 52 ~ # 59
(9)	Tak の提案	# 60
(10)	Hor の提案	# 63 ~ # 69
(11)	計算	# 70
(12)	長考の失敗	# 71 ~ # 73
(13)	上位桁の特定	# 71 ~ # 84
(14)	$2^{14} \times 2^{40}$	# 87 ~ # 88
(15)	近似の限界	# 84 ~ # 92
(16)	交流の試み(男子)	# 93 ~ # 99

- 97 Ike マジか.
- 98 Ham (笑う)
- 99 Ike どうするー? どうするー? (笑いながら)

なお, Tak については, この段階に至っても発言が一切なく, ここまで黙々と一人で計算を続けていた. また, このエピソードの一連の流れを, 大まかに整理するとすれば, 表 5.3 のようにまとめられる.

5 サンプル分析：理論的枠組を用いた数学的活動の質の記述

ここでは、上で示したエピソードを、理論的枠組に当てはめながら記述することにしよう。そうした記述を通じて、授業における集団での数学的問題解決を、科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組を利用して記述することの意義を示す。これは、いわばサンプル分析の提供に相当する。理論的枠組の有用性を主張するためにサンプル分析を提供するという方法は、例えば、Cobb et al. (2001)などで採用されており、本研究も、この方法に倣うこととする。なお、行為シエムは、第2章の第3節で定式化したように、分析の必要に応じて細かく分析することもできれば、粗く分析することも可能である。そのため、今述べた意義を示すという目的を達成するにあたっては、科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組を利用したことが最も効果的かつ印象的となる分析単位を設定し、記述することが最適である。したがって、本節での記述は、学習者の一挙手一投足を詳細に記述するのではなく、表5.3に示された(1)～(15)という大局的な流れを1つずつ取り上げて記述する。

■(1) 常用対数への着目

#1～#7は、IkeとHamが常用対数へと着目し始める場面である。これは、問題提示前の場面であるが、彼らは、(おそらく、常用対数を学習中であることを理由に)この段階で既に常用対数の必要性を予期している。この必要性の予期は、結果的に、Hor達による手計算というアプローチが、現実的に有力性を帯びてきてもなお、彼らが常用対数によるアプローチにこだわった1つの理由となった。この場面は、まだ具体的な数学的活動が始まる前の段階であるが、その数学的活動において彼らが「常用対数によるアプローチ」にこだわるに至る経緯を特徴的に示唆している。

これらのことから、「常用対数によるアプローチを採用する」ということは、彼らの堅い核をなしていると考えられる。また、その堅い核は、前時までの学習内容に由来して構

成されたものと考えられる。

■(2) 常用対数の計算

Ham や Ike が主導権を取る形で、常用対数による計算が始まった。#8～#24 は、常用対数によるアプローチの初動的部分として特徴的な場面である。

この場面において、彼らの数学的活動は、行為シエムを用いて次の期待される結果が予測され続けているので、定義より、前進的に問題移動していると評価できる。実際、例えば、#8 における Ham の発言では、 $\log_{10} 2$ の値を得ることによって次に進むことができるという期待感が、#18 における同じく Ham の発言では、 54×0.3010 を求めることで次に進むことができるという期待感が、それぞれ現れていると考えられる。また、#13 において、常用対数表の参照方法を Ike が確認していることも、それがわかれば次に進めるといふ期待感の現れであると読み取ることができる。次の期待される結果が予測され続ける限り、行為シエムの問題移動は前進的であると評価されるのであったから、ここでの数学的活動は、全体として前進的である。

■(3) 分裂

#25 の発言を契機として、Hor 達は Ham 達とは独立に、手計算によるアプローチを試み始めた。あとで#64 において Hor が述べた「普通にさ、あの、1024 の5乗かける16 でいいじゃん」という発言には、「普通にさ」という言葉が含まれており、Hor が、Ham や Ike 達のアプローチを複雑すぎるものとして認識していることがうかがわれる。つまり、複雑であるということが、Hor が Ham や Ike 達のアプローチに迎合せず、手計算によるアプローチにこだわった主たる理由となっていると考えられる。もちろん、男女で協同するよりは女子同士で議論する方が気楽であるという要素もあったであろうけれど、主たる理由は、この対数によるアプローチの複雑性にあると考えて良いであろう。

これらのことから、「手計算によるアプローチを採用する」ということは、Hor の堅い核をなしていると考えられる。また、その堅い核は、男子達のアプローチを批判的に捉えたことに由来して構成されたものと考えられる。

■(4) 絞込方略への移行

#27～#38 は、Ike と Ham が絞込方略へ移行する様子の現れである。Ham による#27 の発言は、二人のアプローチを、真の値を不等式で評価し、少しずつ絞り込んでいくとい

う方向性へと移行させる契機として機能していると考えられる。

Ike と比較すると、Ham はまだ、「10 の有理数乗」を上手く概念化しきれていないようで、Ike に 1 つ 1 つのステップを確認しながらではある。しかしながら、いずれの確認の後も、Ham が納得を表現していることから、Ham は、今のアプローチに対して疑念を抱いているのではなくて、期待感を抱いていると理解することができる。今の対数によるアプローチに期待感を持っているため、Ham は、Ike から 16.254 という数値への着目を提案されたり、 $10^{16.3}$ という表現を示されたりして面食らった際も、対数によるアプローチを採用するというのを疑うのではなくて、自分の行為シエムを調節することを通じて対応しようとしている。このことは、次の 2 点を意味する。

- 今まで自分の行為シエムを調節するという行為が、その当該の行為シエムが彼の防御帯の一部であったこと。
- 防御帯の一部であったその行為シエムが、彼を取り巻く環境に適合しないため、適合するように修正されていること。

つまり、活動をしている最中に結果的に予想していなかったような結果が得られたとしても、防御帯の一部を捨て去ることによって、堅い核は守られていると見ることができる。

また、Ike も、自身のアプローチに対して期待感があるからこそ、Ham に議論のペースを合わせながら、1 つ 1 つのステップを確認しているものと思われる。したがって、この場面において、Ike と Ham による数学的活動は、全体として前進的に問題移動していると評価することができる。

なお、ここまでの彼らの数学的活動の問題移動の変遷を整理すると、図 5.1 のようになる。

■(5) 合流

39 ~ # 42, # 44, # 46 は、Uts, Hor, Tak の 3 人が合流する様子の現れと捉えることができる。また、単に 3 人が合流する場面というだけでなく、手計算というアプローチの有効性に関して、Hor 自身、期待感が揺らいでいることの現れであるとも捉えることができる。この一場面から、Hor は、初めから電卓を使うということを念頭に置いていなかったこと、Tak の行為に刺激されて電卓を使う可能性を思いついたことの 2 点が伺える。

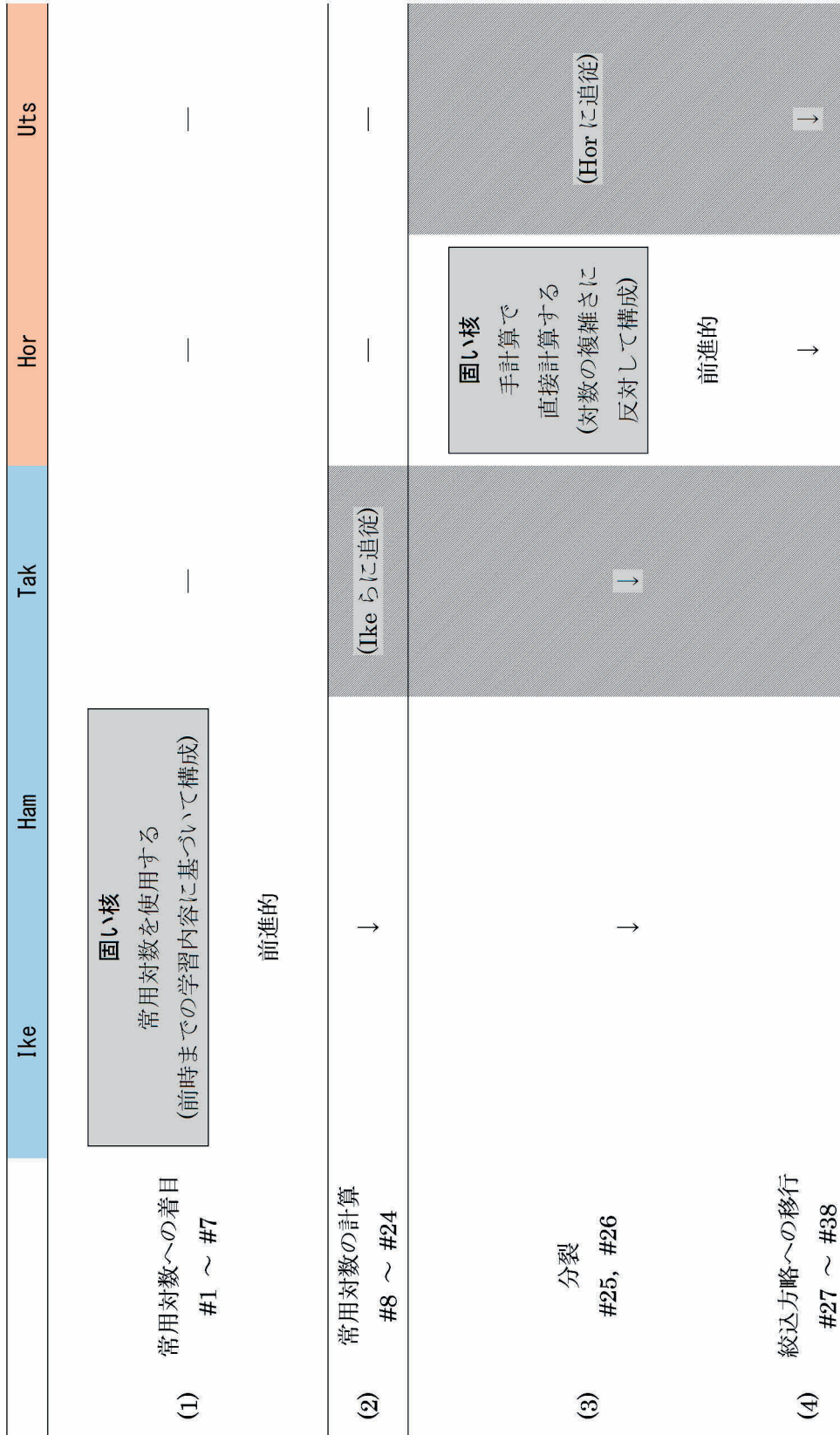


図 5.1 科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組による分析結果 1

Tak が電卓で表示可能な桁数を数え終わるまでのわずかな時間ではあるが、Hor は、次に取り組むべき手計算を提案できなくなっており、手計算という数学的活動は一時的に退行的になっていると評価することができる。また、手計算による直接計算というアプローチを微修正した電卓による直接計算というアプローチも、電卓の表示桁数の限界から、すぐに退行的な数学的活動となってしまったと言える。

■(6) 交流の試み (女子)

電卓によるアプローチが期待できないと知り、落胆する Hor であったが、#47 の Ham の感嘆を聞き、Ham や Ike のアプローチに興味を示すようになる。続く #48 の発言は、Hor による Ham や Ike への交流の試みとして理解できる。

ここでは、2つの理由が Hor に交流を試みさせようとしたと考えることができる。1つは、Ham が今までになく大きな感嘆の声を挙げたことである。これまで、Ham は幾度となく感嘆の声を挙げていたけれど、それまでの発言と比較して、ひときわ大きな声で感嘆した。このことは、Hor に対して、Ham や Ike が問題解決上、重要な発見をしたようにであることを示唆する役割を果たしたと考えられる。もう1つは、Hor にとって、手計算や電卓による直接計算というアプローチに対する期待感が低下していたことである。自分自身のアプローチが前進的に問題移動し続けている状況下では、他者のアプローチについて興味を持つ必要性は低い。とりわけ、Hor の場合、Ham や Ike のアプローチが複雑過ぎることを1つの契機として、独立に手計算によるアプローチを試み始めたわけであったから、自分のアプローチが上手く行っている限り、なおさら Ham や Ike のアプローチを気に留める必要はないと言える。しかし、実際には、Hor の数学的活動は退行的に問題移動しつつあったため、Ham や Ike のアプローチに関心を寄せることとなった。このように考えると、Hor を取り巻く状況を整合的に説明することができる。また、その後も #56 や #59 で Hor と Uts は、(数学的な発言ではないものの) グループ全体でのコミュニケーションに参加しており、手計算によるアプローチが、この時点では退行的であったことを示唆している。これらはいずれも、この時点において Hor の数学的活動が退行的に問題移動していたことの傍証と捉えることができる。

■(7) 無意識的無視

#43 ~ #51 は、Ham や Ike が Hor による問いかけを結果的に意図せずに無視してし

まっている状況である。退行的に問題移動していた Hor の数学的活動に対して、Ham や Ike の数学的活動は、前進的に問題移動している最中であつたと考えられる。自分達の活動に夢中になるあまり、そもそも Hor に問いかけていたことさえ、気付いていない状況であると考えられる。Hor の場合とは反対に、自分達のアプローチが前進的に問題移動している間は、他者と積極的にコミュニケーションを図る必要性が生じない。そういう意味で、この状況は、Ham や Ike の数学的活動が前進的に問題移動していることを印象的に示唆していると言えよう。

■(8) 近似値への注目

52 ~ # 59 は、常用対数表を用いて $10^{0.254}$ の近似値を求めようと言う場面である。数学的処理の正確さを欠いてはいるものの、Ham と Ike は、引き続き自分達のアプローチに期待感を有しており、彼らの数学的活動は、まだこの段階では、前進的に問題移動していると評価できる。しかしながら、途中、# 56 のように、メンバー達は全体で雑談をし始めることとなった。これを契機に、Ike を残して、Ham も一時的に対数のアプローチから離脱することとなった。

Ike にとっては、引き続き前進的な問題移動であるようであつた。このあと、Ike は黙り込んで長考に突入してしまうが、長考しているということは、数学的活動が前進的に問題移動していることを意味する。それは、長考という現象が、次の3ステップからなる過程を繰り返し行っていることの現れであると考えられるからである。

- 堅い核として対数によるアプローチは維持している。
- その堅い核に基づいて、ある行為シエムを用いるものの、期待された結果が得られない。
- 使用された行為シエムは、防御帯の一部として切り捨てられる。

この過程が繰り返し頭の中で行われていると考えれば、「長考する」という現象を上手く説明することができる。堅い核がしっかりしているため、次々と次の一手を思い付きはするものの、その一手は、頭の中で少し考えるだけで、ことごとく期待した結果を生み出すものではないことが判断でき、結果として、長考してしまうのである。

一方、Ham にとっては、Ike が次のアイディアを供給してくれるのを待つ場面となって

しまった。Ham にとっては、自ら期待感を持って対数によるアプローチに取り組んでいる状況ではなくなってしまったという意味で、彼の数学的活動は退行的な問題移動をしているようであった。

■(9) Tak の提案

今まで Ike が常に主導的な立場で次の方向性を示し続けてきたにもかかわらず、ここに来て、Ike が、対数を用いた新しいアプローチを言語化できなくなった。このことが、冗談まじりながら、Tak が手計算によるアプローチを提唱する契機を作った。#60 の発言は、Tak にとって手計算によるアプローチが前進的であることを示している。一方、#61 においてすぐさま Ike がそのアプローチを否定する様子から、Ike にとって、手計算によるアプローチは前進的ではなかったようである。そのため、すぐに対数を用いた次のアプローチを言語化できなかったにもかかわらず、Ike は手計算によるアプローチに興味を示さなかったと考えられる。

なお、ここまでの彼らの数学的活動の問題移動の変遷を整理すると、図 5.2 のようになる。

■(10) Hor の提案

#63 ~ #70 は、Tak に続いて Hor が自身のアプローチを Ham や Ike に示した場面である。Tak の提案のときは異なり、Hor が #64 で具体的な可能性を示唆したため、Ike は、単に一蹴するのではなく、#65 にて Hor に計算する勇気を問うている。しかし、Ike や Ham にとっては、依然として直接計算が非現実的なアプローチであるように聞こえたようで、二人とも、すぐに対数を用いた次のアプローチを言語化できないにもかかわらず、手計算によるアプローチに興味を示さなかった。

■(11) 計算

#70 は、Tak が他の 4 人と独立に計算を始めた場面である。以後、Tak は他の 4 人とコミュニケーションがなくなってしまう。Tak にとって、手計算によるアプローチは期待感の持てるアプローチであったようだが、かといって、女子達と協同的に問題解決に当たるといえることができなかつたようで、地道に一人で計算を続けることを選んだようであった。

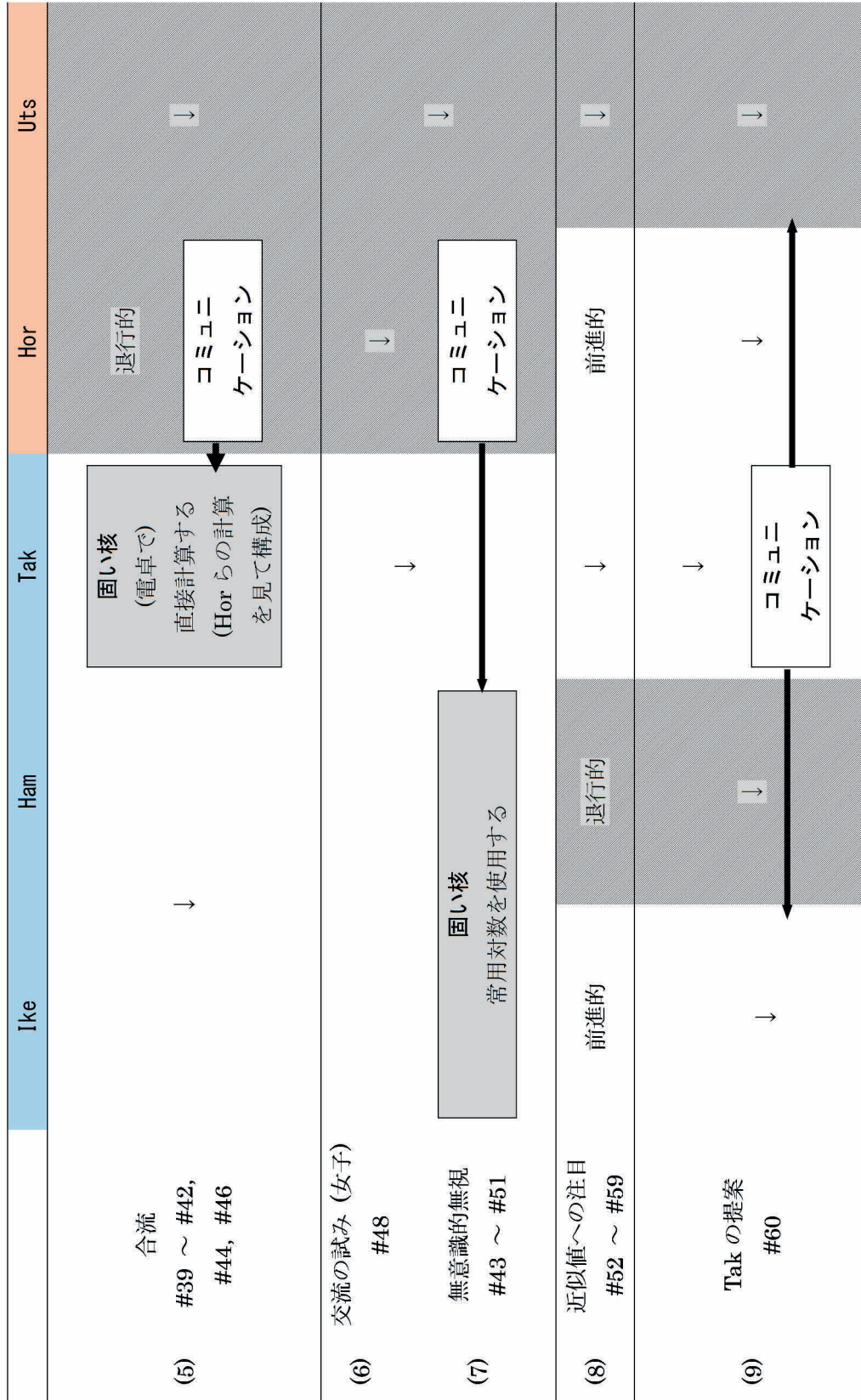


図 5.2 科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組による分析結果 2

■(12) 長考の失敗

#71～#73は、Ikeの長考が、一時的に失敗の兆しを見せる場面である。Ikeは、長考に突入した後でも、対数によるアプローチを採用するというのが、堅い核として保持されているように見受けられた。自身の行為シエムによって期待された結果が得られそうにない場合は、そうした行為シエムを防御帯として位置付けることで棄却し、対数によるアプローチを守り続けてきた。しかしながら、ここでのIkeの防御帯の棄却は、#27～#38でHamが自分の行為シエムを調節することによって防御帯を棄却したときとは、様相が異なる。Hamの場合は、有理数を指数に持つ表現のような、まだ十分に慣れていない表現を目の当たりにした際、そうした表現に抵抗感を示し、対数によるアプローチという堅い核の方を棄却するのではなく、自分が既に有している何らかの行為シエムを修正して、そうした表現を数学的に正統な表現として意図的に同化できるようにするという形で、対数によるアプローチを保護してきた*6。それに対して、Ikeは、思いついた行為シエムの実行を試してみても、上手く機能しなかった行為シエムを棄却するという過程を単純に繰り返すことで、対数によるアプローチという堅い核を保護してしまっていた。彼は、自分がすでに有している行為シエムを修正し、更新することで、新しい事態に対応するための新しい行為シエムを生み出し、その行為シエムを用いて、新しく期待される結果を予測することを実行しなかったのである。これは、退行的な問題移動の定義に合致する状況である。特に、#73において「ここからどうやる？」と述べている点は、決定的である。

■(13) 上位桁の特定

#71～#84は、 2^{54} の上位桁を特定し始めた場面である。直前においてIkeは退行的な問題移動の様相を示したが、そうした様子を見て、Hamが積極的に発言をするようになった。Hamの発言に触発されて、Ikeも自分の考えが整理できてきたのか、二人は相互に意見を出し合いながら上位桁を特定していくことができた。例えば、#74と#76のHamの発言からは、 2^{54} が近似値として得られているという状況に何がしかの操作を加えることで、いくつかの桁がはっきりわかるような形を得たいという、漠然とではあるが、期待される結果を予測している様子が伺える。そうした期待は、続く#77のIkeの発言で充足

*6 そういう意味では、Horは、有理数の指数といった表現に抵抗感を示し、自分の有している何らかの行為シエムを修正するのではなく、対数によるアプローチを棄却した例と言うこともできる。

される。また、#79のIkeの発言は、#78においてHamが最上位桁を特定したのを受けて、Ikeが、次の桁も特定できるという期待される結果を保持していることを示唆するものである。この場面においては、二人とも次の期待される結果を予測しており、二人の問題解決は、前進的な問題移動へと復帰したことを表している。

■(14) $2^{14} \times 2^{40}$

#87, #88は、Utsらが $2^{14} \times 2^{40}$ によいよ取り組もうとしている場面であり、彼女らのアプローチが前進的に問題移動していることを示唆する場面である。#88の「やってみよう」という発言は、大変であるという予期がありながらも、その一方で、答えが得られるという予期があることを伺わせる発言である。なお、まだこの段階では、UtsらやHamらは、まだコミュニケーションを試みようという傾向を見せていない。

■(15) 近似の限界

#89～#92は、HamとIkeが、自分達のアプローチの限界に気付いた瞬間である。このときを境に、彼らの数学的活動は退行的問題移動へと移行した。数学的に、教科書の常用対数表からだけでは、これ以上近似の精度を挙げることができないという気付きから、彼らは、常用対数を用いたアプローチの限界を認識したものと考えられる。そうした期待感が失われたからこそ、わざわざ席を移動して身を乗り出してまでIkeと議論していたHamも、自分の元の席に戻ってしまった。

■(16) 交流の試み (男子)

#93～#99は、問題移動が退行的になってしまい、次に取り組むべき行動がなくなってしまったIkeが、女子達のアプローチの状況に対してコミュニケーションを試みようとした場面である。しかしながら、Horらは、自身達のアプローチが前進的に問題移動していることから、Ikeが自分達に興味を示しているということを理解しながらも、Ikeの相手もそこそこに、引き続き計算に取り組んでいる。Ikeは、Hor達に相手にされなかったこともあって、誰に言うわけでもなく、周りを見渡ししながら、次のヒントを求めて「どうするー?」という以外、振る舞いようがなかったようであった。

なお、ここまでの彼らの数学的活動の問題移動の変遷を整理すると、図5.3のようになる。

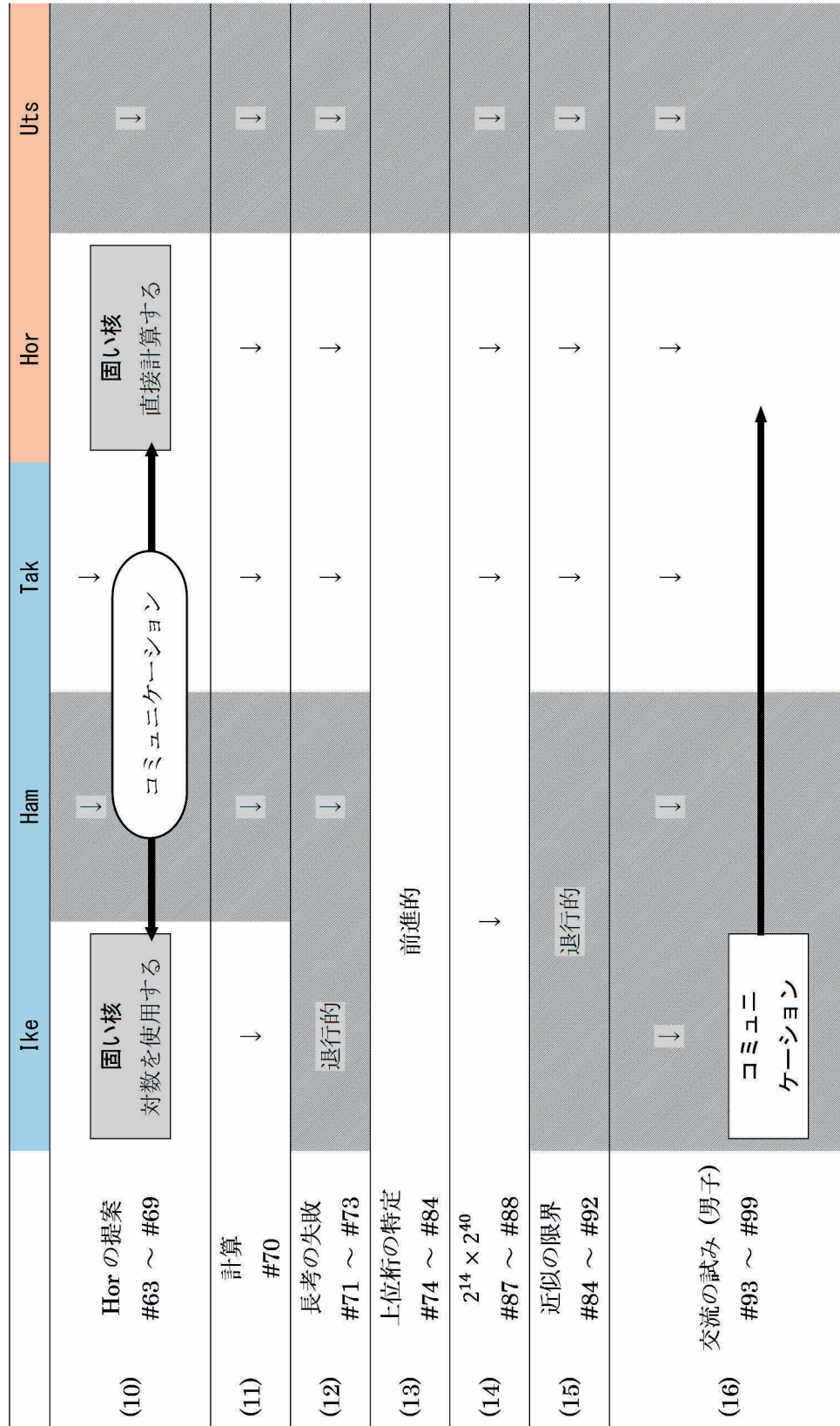


図 5.3 科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組による分析結果 3

6 サンプル分析に対する考察

前節では、科学的研究プログラムに基づく理論的枠組を用いたサンプル分析として、高校2年生によるある数学的活動の事例がどのような様相で展開されたかを記述した。そこで本節では、そのサンプル分析に対する考察を示す。特に本節では、次の3点に分けて議論する。

- 堅い核の源
- 防御帯の様相
- 異なる科学的研究プログラム同士のコミュニケーション

また、その上で最後に、科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組の実践的役割について考察する。

6.1 堅い核の源

科学的研究プログラムに基づく理論的枠組は、「(意識的であれ無意識的であれ) その学習者が守り続けたい、修正されない仮定の集合」として堅い核が存在することを仮定していた。しかしながら、このように定義され、この定義に基づいて観察された堅い核が、実際的な場面においてどのような性質を有するものとして観察されるかは、この規定を参照するだけでは明らかにならない。この規定に基づいて観察された堅い核を、実際に調べることによって明らかにすることができる。

そこでここでは、特に堅い核の源について考察することにしよう。学習者が守り続けたいと思うような堅い核が、一体何に基づいて形成されているのか、この点が明らかになることは、数学教育として授業において数学的活動を促進するために有益な情報となるであろう。

図 5.1, 5.2, 5.3 には、新しく堅い核が生成された場面において、推定されるその堅い核の源を合わせて示した。Ike, Ham, Hor, Tak の4名について、時系列順にその堅い核

の源について検討しよう。

まず、図 5.1 の (1) において Ike と Ham が堅い核を構成した際、その堅い核は、前時までの学習内容に基づいて構成されているように思われた。彼らは、自分達が直前まで常用対数を学習していたということを根拠に、常用対数の使用にこだわった。こうした理由は、決して数学的に合理的であるとは言えず、どちらかと言えば自分達の置かれた社会的状況を自分達で解釈した結果であると考えられる。しかしながら、数学的に合理的でないことが、彼らにとって合理的でないことまでを意味するわけではない。動機付けに関する仮定を導入したラディカル構成主義の原理と、今回、Ike や Ham が意欲的に様々な考察を展開している点に基づくと、彼らは、とにかく与えられた問題を解決したいという動機が働いている状況下において、この数学的活動に従事していることがうかがえる。問題の解決に重きが置かれているとすれば、純粋に数学的な合理性を追究して解法を探索するというよりはむしろ、使える情報はすべて活用する形で、とにかく解決の取っ掛かりを得ようとすることは、合理的な姿であり、自然な姿でもあると言えるであろう。

とは言え、実際問題として、前時までの授業の流れに即しているというだけでは、問題解決の最後の最後まで常用対数によるアプローチにこだわり続ける理由にはならないであろう。そこから先も常用対数によるアプローチがこだわられた理由は、実際に常用対数によるアプローチを選択してみて、臆気ながらではあるものの行為シエムによって予期される結果が、問題解決として実際に得たい結果と合致しているという期待感があったからこそであると考えられる。

また、女子達とのコミュニケーションを経て、直接計算するというアプローチの存在に気が付きながらも、彼らは、自分達の常用対数を用いるというアプローチに固執した。彼らは、多少複雑なアプローチになったとしても、手続きとして理解しやすい直接計算というアプローチよりも、結果的に計算量を減らすことができると期待される常用対数によるアプローチを好んで選択した。#65 における Ike の「それを計算する勇気がある？」という発言からもうかがえるように、Ike は、その計算量を、それなりに大きなものとして見込んでいるようであった。実際に計算量を定量的に評価したわけではなく、主観的に大変そうであると判断しただけであるが、そういう主観的な判断が、堅い核の維持に大きな影響を及ぼしているようであった。

次に、図 5.1 の (3) において Hor が堅い核を構成した際、その堅い核は、Ike や Ham ら

のアプローチが、与えられた問題の解決手続きとして複雑過ぎるということが一因となって構成されたものと考えられる。それは、#64におけるHor自身の発言「普通にさ、あの、1024の5乗かける16でいいじゃん。」などからもうかがえる。もちろん、この理由が唯一の理由であるという保証はない。例えば、男子達と協同的に問題解決をするということに対して多少なりとも抵抗感や対抗意識があり、別のアプローチを考えようとして思いついたという可能性もある。実際、図5.2の(7)においてHorがHamにコミュニケーションを試みた際、(おそらく、単に聞こえていなかっただけで、意図的に無視したわけではないにせよ)Hamに無視された、ということが、Horに、独力での問題解決を決意させる決め手になった可能性がある。あるいは、Hor自身、対数の概念を上手くまだ理解できておらず、自分の理解できないアプローチであるからこそ、必要以上に「複雑さ」を感じてしまい、地道に1024を5回掛ける方が心理的負担が小さいと感じた可能性もある。しかし、いずれにせよ、常用対数の利用を複雑に感じたという点は、少なからず認められるであろう。

彼女達のアプローチは、実行そのものに時間がかかるため、その堅い核は、IkeやHamらとは異なる流れで揺らいでいた。具体的には、図5.2の(5)において、Horの堅い核は、Takの電卓利用に興味を持つという形で揺らいだ。手計算による直接計算という行為シエムによって期待される結果と、実際の結果が異なったことによって揺らいだのではなく、手計算による直接計算という行為シエムの実行過程を監視する概念的枠組が、電卓利用という行為シエムに対してより短時間で解決できることを期待して、元々の手計算の行為シエムを中断させたものと考えられる。あるいは、図5.2の(7)において、HorがIkeやHamのアプローチに興味を持った際も、もし短時間で解決できるならばそれに越したことはないという認識で、手計算による直接計算という行為シエムを中断させる概念的枠組に、現在の状況が同化されたものと考えられる。しかし、このとき、Hamに無視されたことが多かれ少なかれ影響したのか、以後、Horは、決意を固めて、自分達の手計算に固執するようになった。

最後に、図5.2の(5)においてTakが堅い核を構成した際、その堅い核は、Horのアプローチに影響されて構成されたものと考えられる。また、TakがHorと独立に、特に電卓を用いてアプローチしようと試みた背景には、Takがグループ内において計算係(電卓を操作する係)に割り当てられていたからであると考えられる。最初は、IkeやHamの指示

によって電卓を使用していた Tak であったが、Ike や Ham らが、自分達のアプローチに電卓を必要としなくなったことで、やる事がなくなってしまったようであった。元々、Ike や Ham に協力していた段階から、なぜ自分がそのような計算をしているのかははっきり理解していない様子であったから、Ike や Ham からの指示がなくなったことで、Ike や Ham のアプローチにはついていけなくなったようでもあった。しかしながら、それでいて、Hor らのアプローチに対して積極的に協力していこうという姿勢を見せることもできなかったようで、結果的に、Tak は、自分の手元にあった電卓で独自にアプローチすることになったようである。

なお、Uts については、終始 Hor のアプローチに追従するに留まっており、彼女が何らかの堅い核を構成しているようには見えなかった。このことは、Hor と Uts の関係が、Ike と Ham の関係と様相を異にしていたことから、推定することができる。具体的に、Ike と Ham の関係については、最初の方こそ Ike が主導的な役割を果たしたものの、後半からは、Ham が Ike に代わって主導的な役割を果たす場面も見られ、双方が共通した堅い核を構成していなければ成し得なかったであろうコミュニケーションが、二人の間で展開されたと見て取ることができる。一方、Hor と Uts の関係については、一方的に Hor が次に何をするかを提案する一方であり、Uts は、分担をこなすだけに留まっていた。もちろん、Hor のアプローチは、実行していること自体が小学生でも実行できるような単純な計算だけであったため、単に Uts が自ら発言する必要がなく、それゆえに主導的な役割を果たす必要もなかった、と考えることもできる。そういう意味で、まったく堅い核を持っていないと言うことはできない。しかしながら、Uts が # 63 において「(Hor を指して) ここ、やってるやつがいるから」と発言しているところを見ると、自分が主体的に計算をしているという意識は希薄であるように思われる。もし Uts が Hor と同じくらい堅い核を構成していたとしたら、ここでの発言は、「私達、今、やっているから」という趣旨の発言になるのが自然であろう。そういう意味で、Uts の核は、十分な状態で構成されていないと考えられる。

さて、以上、5 人の堅い核の構成状況を踏まえると、極めて多様な要因によって堅い核が構成されているということがうかがえる。しかしながら、堅い核の構成やその維持に関して、少なからず共通して言えることとして、次の点を挙げることができるであろう。それは、必ずしも数学的な判断によって堅い核が構成されているわけではなく、自身の置か

れている社会的状況・文化的状況の主観的解釈によって堅い核が構成されている点である。前時までの学習内容を考慮に入れたり、異性の提案したアプローチに多かれ少なかれ対抗意識を持ったりしたことによって堅い核を構成するという状況は、一般的な形で述べるならば、このように述べることができるであろう。しかも、学習者が、自分達の置かれている状況をどのように解釈するかが完全に任意であるという点は、注目に値する。かつて、ラディカル構成主義の限界を乗り越えようと様々な社会的構成主義が台頭したことは第2章でレビューした通りであるが、今回の分析は、そうした社会的構成主義が理論的枠組として有益であったのかに疑問を投げかける結果であると捉えることができる。

Lerman (1996) は、ラディカル構成主義から派生した社会的構成主義に対して、次のような批判を述べる。

知を構成する際の個人の主体性について構成主義の見方を採用することは、その個人の特定の概念的システムとその特定のフィルターが与えられることで、とても制限されてはいるけれど、一貫した見方を導いている。統合された社会的見方に賛同することは、時折、そのフィルターにはとても大きな穴が空いていて、個人を越えて存在していることが、どういうわけか制限なしに入ってくるということを主張することである。そこで私は、社会的構成主義の中で「社会的なもの」の機能を強調することは意味がないと主張する。文化的な知識とディスコース的な実践へと向かう力は、存在しないか、あるいは、存在するかのどちらかである。もし前者なら、有機体の認知的構造の生存可能性に挑戦したりしなかったりし得る過程の1つとして社会的相互作用を捉える Piaget 派の見方は、独我論を避けるには無力であるとは言え、ポスト認識論理論として、このことは問題ではない。もしそれが問題であるならば、その答えは構成主義の中には見つからない。

(p. 140)

また、次のようにも述べる。

私は、そのような立場〔ラディカル構成主義〕が、社会的生活や文化的生活の多くを説明しないという点でとても制限的であると主張するであろうけれど、それは、認識論と存在論に対する含意を伴う学習観として、少なくとも無矛盾であり一貫し

ている。相補的な方略〔Piaget ベースの社会的構成主義〕は、2つの異なる世界観を接合しようと試みているが、一貫性を達成していない。

(p. 141, 括弧内筆者)

彼の主張の要点は、知識の獲得が個々人のフィルターを通してのみ達成し得るものであるとすれば、何か「社会的なもの」がそのフィルターを貫通して個人に影響するとは主張し得ないはずである—すなわち、ラディカル構成主義において、社会的なものが影響するかしないかは議論できない—ということである。そして、そうであるがゆえに、それは非常に制限された見方である、ということである。

この指摘の通り、ラディカル構成主義は、数学学習の社会的側面や文化的側面を説明するにあたって有用ではない。しかしながら、このことは、今回の分析を踏まえると、ある意味で当然のことである。なぜなら、確かに数学の学習は、個人の認知の構造だけでは説明し得ないような、何らかの「社会的なもの」の影響を受けているのかもしれないが、数学の学習に対してどんな社会的影響が働くのかについては、結局のところ主観に依存しているからである。前時までの学習内容に影響されたり、異性間の人間関係に影響されたりといったことは、確かに数学の内容に関する個人の認知だけでは説明し得ない現象かも知れないが、これらの影響を全部ひっくるめて「社会的」と言うてしまうことは、「主観的」と言うてしまうことと、説明力という点においては大差がない。ある学習者にとっては、前時までの学習内容がその学習者のフィルターを通過し、別のある学習者にとっては、男女間の人間関係がその学習者のフィルターを通過したという、ただそれだけのことである。重要なことは、個人と社会のどちらに重きを置いた立場を取るにせよ、そうした重きの置き方は、あくまで枠組でしかないわけであるから、その枠組の範囲内で、いかに具体的な情報を収集するかということに尽きるであろう。

そこで、今回の分析を、理論的枠組の正当性を主張するために用いるのではなくて、具体的な経験的情報を得るという観点から眺め直すことにしよう。今回の分析から得られる具体的な示唆としては、次の2点を挙げることができよう。

第一に、各学習者は、自分にとって心理的負担が少ないアプローチを堅い核として構成する傾向にある。その心理的負担は、対数という数学の内容の難しさに起源を有するもの、ひたすら乗法の筆算を繰り返すという作業の単調さに起源を有するもの、男女間の協

力への抵抗感に起源を有するものなど、多様な起源を有する。ラディカル構成主義は、プラグマティズムの一種であるという意味で、結局のところ生存可能な知識とは、個人が主観的に有用性を感じている知識である、ということになるのだが、今回の分析を踏まえると、その主観的有用性とは、心理的負担の小ささという観点で評価されるものである可能性が示唆される。

第二に、研究として、堅い核の存在と問題移動の状況をどのように評価するかについては、次の3点が示唆される。

- 実際に観察可能なものは、当該の数学的問題解決に関して新しいアイデアを次々と提案できているかどうかであり、その提案されるアイデアの系列から、その学習者が全体としてどのような方向性で問題解決を行っているかを推定し、その学習者の堅い核を解釈する必要がある。
- 方法論的に、アイデアを提案する様子が観察されない学習者は、堅い核を構成していないものと見なさざるを得ない。
- 堅い核を構成していると考えられる学習者のうち、問題解決の過程で提案されたアイデアが、棄却されるよりも使用される傾向にある限り、そうした数学的活動は、前進的な問題移動と見なすことができる。逆に、次々と新しいアイデアが提案されるものの、そのアイデアが、使用されるよりも棄却される傾向にあるならば、そうした数学的活動は、退行的な問題移動と見なすことができる。

科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組を理論的に議論した段階においては、その枠組において使用される個々の概念を、哲学的観点から規定することはできていたが、そうした概念と経験的事象をいかに結びつけるかについては、十分に議論できていなかった。そうした哲学的観点と経験的観点の溝は、理論的発展の初期段階においては不可避免的に生じるものである。今回、具体的な分析を行う中で、堅い核の存在と問題移動の状況について、試行錯誤的にはあるが、上述した3点の示唆を1つの基準として評価した。概念的に規定された理論的構成物は、そのままでは再現可能性を備えた形で観察できないため、しばしばブリッジマン(1941)を引き合いに出しながら、操作によって定義されることが推奨されるが、哲学的観点と経験的観点の溝を埋める1つの基準として、上述の3基準は有望であろう。もちろん、今後も様々な数学的活動を同様の基準での評価する

中で、上述の基準は、より一層の洗練が必要ではあるが、本研究が提案する理論的枠組の運用に具体性を帯びさせるという点で、今回得た経験的情報に対しても一定程度の価値を認めることができよう。

6.2 防御帯の様相

科学的研究プログラムに基づく理論的枠組は、堅い核と同様、防御帯の存在を仮定していた。実際的な場面において防御帯がどのような性質を有するものとして観察されるかについても、具体的に検討しよう。

防御帯の様相が顕在化する瞬間とは、理論的には、攪乱が発生した状況下であると考えるのが自然である。この状況が生じるまでの過程の具体例として、特徴的なものを、今回の観察結果の中から2つ示そう。

1つは、#43のHamの発言のように、既存の行為シエムに則って実行した結果を、予期された結果を判定する概念的枠組に意図的に同化させることに対して、はっきりと困難を示す場面である。直前まで、 $10^{16.3}$ の値を求めることが重要であるということに賛意を示していたが、いざ常用対数表を用いてその値を求めようとする、直接的には求められないことに気付いた。その上での、「10の16.3乗とかってどうやってやるん？」という#43の発言である。これは、常用対数表を調べることによって、 $10^{16.3}$ の値を求めることができるという行為シエムを実行したHamが、実際に常用対数表を調べても当該の値を求められないという攪乱状態に陥った場面であると見なすことができる。しかし、この攪乱のあと、#45においてIkeに「10の0.3乗が出せればできる」と示唆され、#47においてHamは「うあー、だ、そういうことだ！」と感嘆している。この様子は、現在の状況を、

- (A) 常用対数表を調べても当該の値を求められない状況から、
- (B) 常用対数表を調べることで当該の値を求められる状況

として同化し直す場面である。この場面は、常用対数表を用いるという行為シエムが、一工夫^{*7}加えた後に常用対数表を用いるという行為シエムに微修正されている場面でもある。

^{*7} 一工夫とは、 $10^{16.3} = 10^{16} \times 10^{0.3}$ と考えたとき、 10^{16} は手計算できるので、 $10^{0.3}$ を常用対数表を用いて求められさえすれば良いということである。

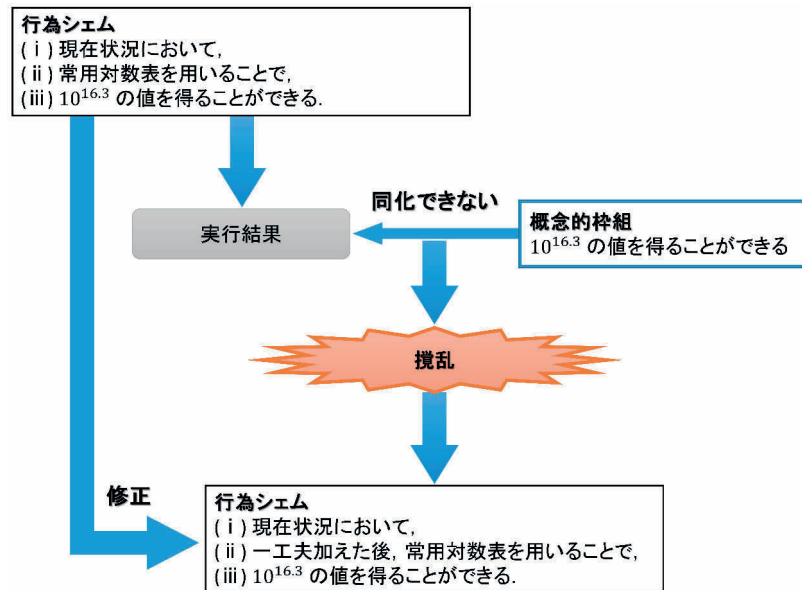


図 5.4 既存の行為シエムが修正される場面の具体例の記述 (前進的問題移動)

この過程を図示すると、図 5.4 のようになる。この過程においては、攪乱を経験した後、既存の行為シエムが修正され、新しい行為シエムが形成されている。そして、その新しい行為シエムによって、次の期待される結果が予測される状況へと推移している。これは、問題移動という観点から見れば、前進的に問題移動している場面である。このとき、修正された古い行為シエムは、防御帯として機能していると捉えることができる。その行為シエムがその状況に適していないと発覚し、攪乱が生じるまでは、どの行為シエムが防御帯であるのかを決定することはできない。この防御帯の機能によって、Ham にとって、常用対数を用いてアプローチするという堅い核は、この場面において保護されることとなった。

もう 1 つの例は、Ike の長考場面である。図 5.2 の (9) から図 5.3 の (11) までの間、Ike は次なる具体的な手続きを探して長考している。しかし、この場面において、彼が次なる具体的な手続きを示すことはなかった。ここまでの傾向として、Ike は、完全な解決の手続きを発見してから他のメンバーに説明するのではなくて、思いついたらすぐにその場で、どんどん他のメンバーに自分の導いた手続きについて説明する、というスタイルを取ってきていた。そのため、ここで次なる具体的な手続きを言語化せずに長考しているという状況は、一瞬有望であると感じられるような何らかの手続きを見つけはしたものの、すぐにそれが有望でないということが発覚し、棄却する、という過程を、Ike は頭の中で

繰り返したものであると推察される。それは、有望な行為シエムを想起し、頭の中で実行してみるものの、得られる結果が期待される結果と一致しないがゆえに攪乱を引き起こし、行為シエムの実行そのものが有望でないという判断をしている、という場面であると捉えることができる。

この過程を図示すると、図 5.5 のようになる。この過程においては、攪乱を経験した後、既存の行為シエムが修正されるのではなく、棄却されている。そして、既存の行為シエムが棄却されたことによって、次の期待される結果が予測できない状況へと推移している。このとき、棄却された行為シエムは、防御帯として機能していると捉えることができる。その行為シエムがその状況に適していないと発覚し、攪乱が生じるまでは、どの行為シエムが防御帯であるのかを決定することはできない。特に、今回の場合、Ike はあまり具体的な発言をしなかったため、具体的にどんな行為シエムを棄却したのかを推定することはできないが、それでも、考えることを諦めず、頭の中でいろいろと試行錯誤している様子がうかがえることから、防御帯の一部である何らかの行為シエムを次々と棄却する過程を繰り返していたものと推定される。これは、問題移動という観点から見れば、退行的に問題移動している場面である。しかしながら、防御帯の機能によって、Ike にとって、常用対数を用いてアプローチするという堅い核は、この場面において保護され続けることとなった。

さて、堅い核の場合と同様に、今回の分析から得られる具体的な示唆を考えよう。ここでは、次の 2 点を挙げることができる。

第一に、どこまでが堅い核でどこからが防御帯であるかという境界線は、必ずしも明確ではなく、場合によっては時間的に推移するものであるかもしれない。例えば、図 5.4 の過程は、現在の状況に対する解釈が修正されるとともに、その状況で使用可能な新しい行為シエムが構成する過程を表しているが、このとき、行為シエムの記述として、「常用対数表を用いる」という表現を使用すべきか、あるいは、もっと仔細に「常用対数表の中から 0.3 に近い値を探す」という表現を使用すべきかは、微妙な問題である。それに対応して、堅い核の記述も、今回は「常用対数を用いる」という表現によって記述してきたが、実際のところは、「常用対数表を用いる」と表現すべきものであったかもしれない。問題解決の鍵として、学習者が常用対数という概念を用いることに重きを置いていたのか、あるいは、常用対数表という道具を用いることに重きを置いていたのか、どちらであるか

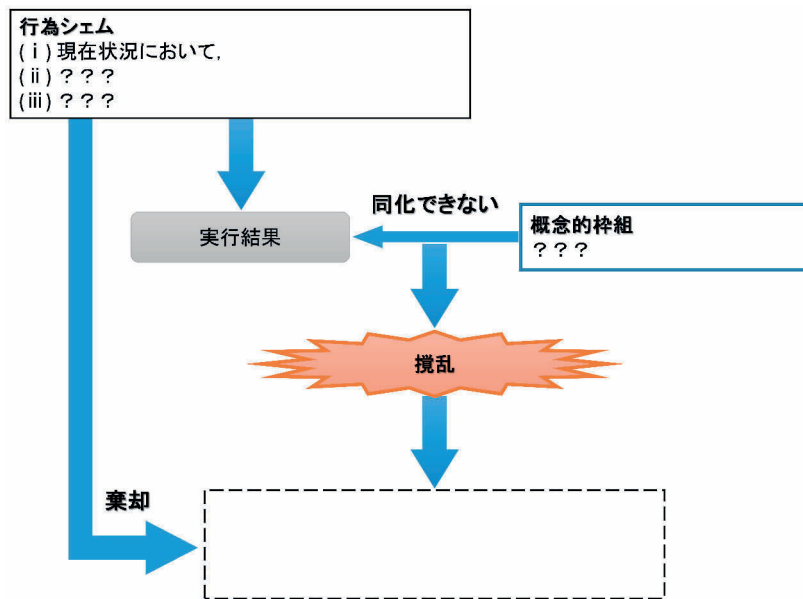


図 5.5 既存の行為シエムが棄却される場面の具体例の記述 (退行的問題移動)

は、観察によって決定することができないのである。そういう意味で、人間の数学的活動の実際としては、「堅い核」と呼べるほど固い信念は存在せず、もっと流動的な直観の集合のようなものしか存在しないのかもしれない。その場合、ある程度の時間の間、たまたま観察者から見て変化していないように見える直観の集まりが、単に「堅い核」に見えるに過ぎないということになるから、防御帯との切り分けの問題もますます曖昧になる。とは言え、プラグマティズムの一種であるラディカル構成主義としては、究極的には、役に立ちさえするのなら、存在しない者を存在するかのように記述することは、理論的に妥当である。目的に応じて柔軟に使い分ければよいため、どんな目的に対してどんな使い分けが有効であるかの検討が、今後は重要になってくるであろう。

第二に、図 5.5 が示唆するように、どんな知識が防御帯の一部として棄却されたのかが不明であったとしても、何らかの知識が防御帯の一部として棄却されたことがわかる場合がある。学習者が、問題解決へあまり寄与しないと判断した内容をわざわざ口に出すというのは、単独での問題解決活動としても、協同的な問題解決活動としても、どちらの場合においてもやや不自然な状況であると考えられるから、こうした口には出さないが防御帯が更新されている状況に対する分析というのは、今後一層深められていく必要があるであろう。

6.3 異なる科学的研究プログラム同士のコミュニケーション

今回の分析結果は、異なる科学的研究プログラム同士のコミュニケーションの様相についても示唆的である。図 5.1, 5.2, 5.3 のそれぞれについて、コミュニケーションが発生した状況を整理してみると、次のようになる。第一に、図 5.1 においては、コミュニケーションの発生場面がない。第二に、図 5.2 においては、(5) において退行的に問題移動している Hor から Tak へ、(6) と (7) においても同様に Hor から Ham へコミュニケーションの試みがなされている。これは、特に、自分の直面している手計算によるアプローチの実行の困難さを解消する手立てを模索するためのコミュニケーションであった。また、(9) においては、前進的に問題移動している Tak から他のメンバー全員に対して提案をする形でコミュニケーションが発生している。第三に、図 5.3 の (10) においては、先の Tak の提案を受けて、わずかではあったが Ike と Hor の間で意見が交わされた。また、最後の (16) においては、退行的に問題移動している Ike から、まもなく計算を終えようとしている Hor に対してコミュニケーションの試みがなされている。

これらの状況を総括すると、事例的ではあるが、次の 2 点を指摘することができる。

- 前進的に問題移動をしている科学的研究プログラムを採用している学習者は、他の科学的研究プログラムを採用している学習者とコミュニケーションをする必要がない。また、コミュニケーションが発生したとしても、建設的なコミュニケーションになるわけではない。もしコミュニケーションが必要になる場合があるとすれば、分業の提案である。
- 退行的に問題移動をしている科学的研究プログラムを採用している学習者には、他の科学的研究プログラムを採用している学習者とコミュニケーションをする必要が生じる。

以下、これら 2 点について補足しよう。

第一に、前進的に問題移動をしている科学的研究プログラムを採用している学習者は、他の科学的研究プログラムを採用している学習者とコミュニケーションをする必要がない。この点は、図 5.1, 5.2, 5.3 のそれぞれを見比べたとき、全体として、前進的に問題移動している最中はコミュニケーションがあまり生じていないことから支持される。実際、

前進的に問題移動している最中というのは、自分の有する行為シエムを実行すれば、良い結果が得られると期待される場面であるから、他者とコミュニケーションをするというよりは、むしろ、まずは、その行為シエムを実行してみたくなるというのが、自然な心理であると言えよう。

また、図 5.3 の (10) の場面において、それぞれ前進的に問題移動をしている Ike と Hor が、Tak の影響でコミュニケーションをすることになったものの、お互いにお互いのアプローチにほとんど理解を示さぬままであったように、前進的に問題移動をしている異なる科学的研究プログラム同士が、第三者の影響でコミュニケーションをすることになったとしても、お互いにお互いのアプローチに理解を示すとは限らない。とりあえずコミュニケーションを試みてみて、自分とアプローチが根本的に異なると感じるようであれば、自然な心理という点では、先と同様に、まずは、自分の行為シエムを実行してみたくなるものであると言えよう。

もちろん、前進的に問題移動している場合であるとは言え、積極的なコミュニケーションが必要な場合も存在する。それは、図 5.2 の (9) における Tak の提案のような場合であり、一般化して述べるならば、自分が期待感を抱いているアプローチが、一人で実行できる類のものではなく、他者との協同や分業が必要とされる場合である。しかしながら、上で示した理由により、Ike は Tak と建設的にコミュニケーションしようとはしなかった。

第二に、退行的に問題移動をしている科学的研究プログラムを採用している学習者には、他の科学的研究プログラムを採用している学習者とコミュニケーションをする必要が生じる。図 5.2 の (5) ~ (7) における Hor や、図 5.3 の (16) における Ike は、いずれもこのパターンである。自分のアプローチに期待感がなくなったとき、他の有望なアプローチに興味が出ることは自然なことである。逆に言えば、そういう状況でなければ、他のアプローチに興味を持つことが難しいとも言える。

これらの示唆は、科学哲学としての ラカトシュ (1986) の議論を改めて振り返ると、ある意味で当然の示唆である。異なる科学的研究プログラム同士は、通約不可能であるからこそ、異なる科学的研究プログラムなのである。堅い核に据える前提が異なる以上、建設的なコミュニケーションは成り立たない。今回の分析は、このことが、行為シエムに対しても類推的に成立していることを示している。

6.4 科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組の実践的役割

最後に、ここまでの考察を踏まえた上で、科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組の実践的役割について考察しよう。第3節では、次の2点を述べていた。

- 科学的研究プログラムは行為シエムの一種であるが、行為シエムは科学的研究プログラムであるとは限らない点。
- しかし、それでいて、行為シエムを科学的研究プログラムとして見なすことによって、数学的活動の質を評価することが可能になるとともに、仮説的学習軌道のアイデアを他者との相互作用の問題にまで拡張し得る点。

今述べたように、科学哲学として立証され得る科学的研究プログラムの理論的性質と類似の性質が、行為シエムの性質として経験的に観察され得るということは、科学的研究プログラムの理論的性質を用いて、行為シエムの経験的性質を推定できる可能性を示唆する。これは、仮説的学習軌道のアイデアを他者との相互作用の問題にまで拡張し得ることを、まさに意味している。

もちろん一般化にあたっては更なる検証が必要であるが、科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組を用いて数学の授業を設計するということは、具体的には、次の3点を踏まえて数学の授業を設計することが有望であると考えられる。

- 教室内にいるすべての学習者が、単一の堅い核を構成するという状況を仮定できないこと。
- 前進的に問題移動するためには、自身の堅い核に対して漠然とした期待感を持つてなければならないこと。
- 異なる研究プログラム同士は、コミュニケーションをする必要性が生じないこと。

第一に、堅い核の源は、完全に主観的に決定されるものであるから、教室内にいるすべての学習者が、単一の堅い核を構成するという状況を仮定できない。社会的・文化的な要素が、堅い核の構成に影響を与えるということは大いに有り得るが、しかしながら、固定

的な影響を確実に与えると言い切ることはできない。社会的・文化的な要素が、堅い核の構成にどんな影響を与えるかは、その学習者がその社会的・文化的な状況をどのように解釈しているかに依存する問題であり、結局のところは主観的であるとしか言いようがない。したがって、教室内にいる学習者は、それぞれ多様な堅い核を構成し得る存在であるという仮定の方が、より自然な仮定である。このことは、教師の側がどんなに授業を工夫したとしても、多様な堅い核の発生を防ぐことができない可能性を示唆する。

実際、今回の分析で明らかとなったように、ある学習者 L_1 が、他の学習者 L_2 に対する対抗意識によって L_2 とは異なる堅い核を構成する、というような場合があり得る。そういう場合というのは、 L_1 が何らかの堅い核を先に構成したという偶発的な出来事が引き金となっているため、教師の側で制御できるような問題ではない。数学の教師は、異なる複数の堅い核が発生することを防ぐというよりはむしろ、発生することを前提として、その後、どのように立ち振る舞うかということ計画する必要がある。

第二に、自分の堅い核に対して確固たる期待感を持てる場合というのが、解法をアルゴリズムとして掌握している場合であるとすれば、熟考する価値のある有意味な数学的な問題解決活動として前進的に問題移動するためには、自分の堅い核に対して漠然とした期待感を持つことができなければならない。あまり期待感がなさすぎると、退行的になってしまうが、かと言って、確固たる期待感がある状態というのは、その問題の解決方法が既知の場合ということになる。単に解法の定着を目指すのではなくて、新しい解法を見出していくということにも価値をおくのであれば、各学習者が、絶妙なバランスの期待感を有していることが必要となる。

こうした期待感が行為シエムによって生み出されているということは、これまで理論的に検討してきた通りである。逆に言えば、行為シエムが適切な形で構成されていなければ、適切な期待感を得ることができないとも言える。しかしながら、その行為シエムの構成の適切な形というのは、単純に議論できる問題ではない。今回の事例において Ike がそうであったように、対数を用いれば解決できるであろうという信念を持ちながらも、はっきりとどのように対数を用いるのかまで確信した状態でその信念を保持しているわけではなかった。途中で、問題解決の主導的役割を Ham に譲り渡した経緯から考えても、Ike は、対数によるアプローチに対して、漠然とした期待感しか持っていなかったと考えられる。言うなれば、「見切り発車」の状態の問題解決を始めていたことになるのだが、数学

的問題解決という過程を、見切り発車で複数の手続きを試行錯誤し、解決に寄与しそうな手続きだけを生き残らせていく過程であると考えるのであれば、むしろ、その「見切り発車」にこそ価値がある。

このように考えたとき、数学学習の問題として一番厄介なことは、そうした見切り発車を実現するためには、行為シエムの発動条件が、意外と緩く構成されていなければならない、ということである。つまり、自分の有する方法知がどんな場合に使用することができ、どんな場合に使用することができないのか、ということ、明確に認識してしまっている学習者は、かえって問題解決に柔軟に取り組むことができないということである。

Lampert (1990) は、数学的活動に取り組む中で生じる、「たぶん」や「かもしれない」という学習者の呟きを、ラカトシュ (1980) の可謬主義的な数理哲学の象徴として価値付けている。今回の事例においても、前進的に問題移動している状況下で、そうした様子は散見されている。例えば、「たぶん」について言えば、# 6, # 30, # 32, # 36 が、「かもしれない」について言えば、# 57, # 71 が挙げられる。こうした呟きは、方法知の有効範囲に明確な認識がないからこそ生じた呟きであり、見切り発車で行為シエムを試行錯誤的に実行していたものの証であると考えられる。

ただ、その一方で、自分の有する方法知がどんな場合に使用することができ、どんな場合に使用することができないのか、ということ、明確に認識させないという数学教育は、単純には受け入れがたい教育スタイルである。実際、学習の成果をまとめるというときに、そうした曖昧な状態に放置することは不自然である。この逆説的な状況をどのように数学教育が受容すべきであるかは、今後も経験的な研究を通じて追究していかねばならないが、いずれにせよ、今回の分析からは、有意義な数学的問題解決活動を展開するために、絶妙な行為シエムの構成を日頃から支援する必要性が指摘される。

第三に、異なる堅い核を有する学習者同士は、コミュニケーションを取る必要性があまりないということである。そうした学習者同士に無理矢理コミュニケーションを取らせようとしても、長続きしないということが指摘できる。そこで、次に続く自然な発想としては、学習者同士が共通の堅い核を持つことができるように、上手く示唆するような指導が必要である、と考えることであるが、今回の分析からは、このように考えることができない。なぜなら、上でも述べたように、堅い核の源は、完全に主観的に決定される問題であり、教師の介入という社会的アプローチが、個人の認識のフィルターを貫通して常に作用

するという事は、考え難い。つまり、教師が介入することで、ある一定のアプローチを取らざるを得なくすることはできるかもしれないが、それは、無理矢理そうさせられているだけであって、その個人が正しいと信じている堅い核であるとは限らないのである。したがって、たまたま近くにいた学習者が、同じ堅い核を構成するという前提は、採用しがたい。

そこで、1つの柔軟な発想として、ある程度、予め決められていたグループで議論させるのではなく、その授業においてたまたま同じ堅い核を持った者同士で寄せ集めて議論させる、という方法であれば、採用可能かもしれない。もちろん、現実に授業でその方法を採用するとなると、まずもって、どれくらい似通っていれば「同じ堅い核」と見なすか、そもそも、そこまで多様な堅い核が1つの問題から生まれ得るのか、そして、生まれた多様な堅い核は議論するにあたって都合がよいように、バランスの良い人数でばらけるのか等々、簡単には解決できないであろう問題がある。しかしながら、今回の分析を踏まえると、有意義な議論が展開されるための必要条件として堅い核の共有があるという視点は、グループで議論するにせよ教室全体で議論するにせよ、授業運営上考慮されるべき問題である。

7 第5章のまとめ

本章では、ラカトシュ(1980)の数理哲学に基づいた従来の数学的活動観では、教室における理想的な数学的活動を記述することはできても、理想的に進むとは限らない実際の活動を記述することができないという点を問題意識として、数学的活動を記述するための代替的な理論的枠組の定式化を試みた。本章では、そうした枠組として、ラカトシュ(1980)の数理哲学ではなく、ラカトシュ(1986)の科学哲学、すなわち、科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組を提案した。

具体的には、本章の第3節では、まず、ラカトシュ(1986)における「科学的研究プログラム」というアイディアは、ラディカル構成主義における「行為シエム」の一種であり、そうであるがゆえに、2つの概念は類似性が指摘できることが指摘された。また、その類

似性から、逆に「行為シエム」をある種の「科学的研究プログラム」として見なすことによつて、行為シエムの実行の様子をより詳細に記述することができるようになることが明らかとなった。特に、科学的研究プログラムを考える際に観察される「堅い核」と「防御帯」が、「行為シエム」を考える場合においても観察されると仮定することで、その数学的活動全体を評価することができると思込まれた。そのため、科学的研究プログラムを評価する基準である「前進的問題移動」と「退行的問題移動」という2つのラベルが、数学的活動を評価する基準としても用いることができると考えられた。

このような理論的枠組は、次の2点の価値を有する。第一に、数学的発見の論理に基づいて数学的活動を議論する従来の考え方と比較すると、この新しい理論的枠組は、数学的活動の質を前進的か退行的かという形で記述することができるようになる。第二に、科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組を通じた観察を繰り返し累積することは、これまで個人の認識と教材の特性という観点にばかり重きを置いて議論されてきた仮説的学習軌道のアイディアを、他の学習者との相互作用にも注意を払いながら、拡張することを可能にすると考えられる。

このようにして定式化された理論的枠組の実際的な使用を示すため、サンプル分析を実施した。分析の対象としたエピソードは、筆者によつて実施された数学の授業の一部であり、ある国立大学の附属高等学校の2年生のグループワークの様子であった。エピソードの一連の流れは、大まかに整理するとすれば、表5.3のようにまとめられた。その上で、科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組に当てはめてこの事例を記述すると、図5.1, 5.2, 5.3のように分析することができた。

また、本章の第6節では、サンプル分析の結果から得られる示唆を検討した。

まず、堅い核の源について、次の2点が得られた。第一に、各学習者は、自分にとって心理的負担が少ないアプローチを堅い核として構成する傾向にあった。第二に、実際の分析において、堅い核の存在と問題移動の状況をどのように評価するかについては、次の3点が示唆された。

- 実際に観察可能なものは、当該の数学的問題解決に関して新しいアイディアを次々と提案できているかどうかであり、その提案されるアイディアの系列から、その学習者が全体としてどのような方向性で問題解決を行っているかを推定し、その学習

者の堅い核を解釈する必要がある。

- 方法論的に、アイデアを提案する様子が観察されない学習者は、堅い核を構成していないものと見なさざるを得ない。
- 堅い核を構成していると考えられる学習者のうち、問題解決の過程で提案されたアイデアが、棄却されるよりも使用される傾向にある限り、そうした数学的活動は、前進的な問題移動と見なすことができる。逆に、次々と新しいアイデアが提案されるものの、そのアイデアが、使用されるよりも棄却される傾向にあるならば、そうした数学的活動は、退行的な問題移動と見なすことができる。

次に、防御帯の様相については、次の2点を挙げることができた。第一に、どこまでが堅い核でどこからが防御帯であるかという境界線は、必ずしも明確ではなく、場合によっては時間的に推移するものであるかもしれない。第二に、どんな知識が防御帯の一部として棄却されたのかが不明であったとしても、何らかの知識が防御帯の一部として棄却されたことがわかる場合がある。

そして、異なる堅い核を有する学習者同士(異なる研究プログラム同士)のコミュニケーションについては、次の2点を指摘することができた。

- 前進的に問題移動をしている科学的研究プログラムを採用している学習者は、他の科学的研究プログラムを採用している学習者とコミュニケーションをする必要がない。また、コミュニケーションが発生したとしても、建設的なコミュニケーションになるわけではない。もしコミュニケーションが必要になる場合があるとすれば、分業の提案である。
- 退行的に問題移動をしている科学的研究プログラムを採用している学習者には、他の科学的研究プログラムを採用している学習者とコミュニケーションをする必要が生じる。

最後に、上述のサンプル分析の結果を踏まえた授業設計への実践的な示唆としては、次の3点が得られた。

- 教室内にいるすべての学習者が、単一の堅い核を構成するという状況を仮定できないこと。

- 前進的に問題移動するためには、自身の堅い核に対して漠然とした期待感を持ってなければならぬこと。
- 異なる研究プログラム同士は、コミュニケーションをする必要性が生じないこと。

以上のようなサンプル分析の結果とその実践的示唆を踏まえると、科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組の使用は、確かに、数学的活動の質を前進的か退行的かという形で記述することを可能にするとともに、集団内での学習者の仮説的学習軌道を予測するための手がかりとなり得るデータ収集を可能にするということが明らかとなったと言えよう。

第5章の引用・参考文献

- ブリッジマン, P. W. (1941). 『現代物理学の論理』. (今田恵・石橋榮 訳). 創元社.
- Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in Classroom Mathematical Practices. *Journal of the Learning Sciences*, 10(1-2), 113-163.
- Confrey, J. (1991). Learning to Listen: A Student's Understanding of Powers of Ten. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 111-138). Springer Netherlands.
- Ernest, P. (1998a). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. SUNY Press.
- ラカトシュ I. (1980). 『数学的発見の論理：証明と論駁』(ウォラル J. & ザハール E. 編, 佐々木カ 訳). 共立出版.
- ラカトシュ I. (1986). 『方法の擁護：科学的研究プログラムの方法論』(村上陽一郎・井山弘幸・小林傳司・横山輝雄 訳). 新曜社.
- Lampert, M. (1990). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal*, 27(1), 29-63.
- Larsen, S., & Zandieh, M. (2007). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics

- classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 205-216
- Lerman, S. (1996). Intersubjectivity in mathematics learning: A challenge to the radical constructivist paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 133-150.
- 野口勝義 (2001). 「誤り」を生かす数学の授業に関する研究 (III): 反例の扱い方に対する示唆. 日本数学教育学会『数学教育論文発表会論文集』, 34, 67-72.
- 野口勝義 (2002). 「誤り」を生かす数学の授業に関する研究: 実験授業の実践的検討. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 8, 119-128.
- 布川和彦 (1994). 「ラカトシュ理論の数学的問題解決論への援用」. 上越教育大学数学教室『数学教育研究』, 9, 23-32.
- Smith, J. P., diSessa, A. A., & Roschelle, J. (1994). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences*, 3(2), 115-163.
- Sriraman, B., & Mousoulides, N. (2014). Quasi-empirical Reasoning (Lakatos). In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 511-513). Springer Netherlands.
- Yuxin, Z. (1990). From the logic of mathematical discovery to the methodology of scientific research programmes. *British Journal for the Philosophy of Science*, 41(3), 377-399.

第 6 章

数学の授業を設計するためのヒューリスティックス

本章では、本研究における研究方法 2 として、研究方法 1 で定式化した理論的枠組を活用した分析を実施し、数学の授業を設計するためのヒューリスティックスを開発し、提案する。本章では、まず、ヒューリスティックスと理論的枠組の関係を精査する。その上で、

- 教科書に基づく数学的活動の分析
- 全国学力・学習状況調査に基づく数学的活動の分析

を通じてヒューリスティックスを導出し、それを言語化した理論的枠組を定式化する。また、

- 本研究の提案する理論的枠組からの理論的帰結の分析
- 本研究が収集した経験的データから得られる示唆の分析

を通じて、さらなる理論的枠組の開発を試みる。

1 理論的枠組とヒューリスティックス

第0章第4節で述べたように、本研究においては、ここまで、「理論的枠組の定式化」という言い回しを、「哲学よりも形式的な体系に整理する作業」という意味で用いてきた。哲学を理論的枠組として定式化することの価値としては、その哲学の解釈について、曖昧さを排除することが可能であることを挙げていた。しかしながら、その実、「理論的枠組」それ自身については、理論的枠組を使用することが方法知を使用することに相当するということ以上には、ほとんど何も述べてこなかった。本節では、この「理論的枠組」という概念を改めて整理し、本研究の最終成果をどのような形で取りまとめるべきであるのかを明確化する。

1.1 枠組

ポリア(1954)は、方法知を伝える意図でヒューリスティックスをリスト化して示したけれど、そうしたリスト化された情報は、内容知とも方法知とも言えない知識である。それは、真偽で評価することができないという点で、内容知とは言い難いし、かといって、そのリストを手に入れるだけで全くの初学者が問題解決の熟達者へと急成長するわけではないという点で、方法知であるとも言い難い。そのリストがある個人の方法知へと内面化されるためには、具体的な数学的問題解決場面における状況判断の経験が必要不可欠である。

そこで、新しい用語を導入しよう。こうしたリスト化された情報は、もしそのリストが効果的に運用されたならば、人間の素朴な振る舞いを補正する役割を果たすという意味で、ある目的を果たすために有用な知識である。本研究では、これを「枠組」と呼ぼう。例えば、ポリアのリストは、ヒューリスティックスを伝える意図で書かれているかも知れないが、そのリストそれ自身は、数学的問題解決のための枠組である。

こうした枠組の開発方法については、少なくとも2通りの方法が考えられる。1つは、ポリアがそうしたように、熟達者の振る舞いの分析から抽出する方法であり、もう1つ

は、関連理論の含意を整理する方法である。本研究では、前者の方法で開発される枠組を「経験的枠組」、後者の方法で開発される枠組を「理論的枠組」と呼ぶことにしよう。

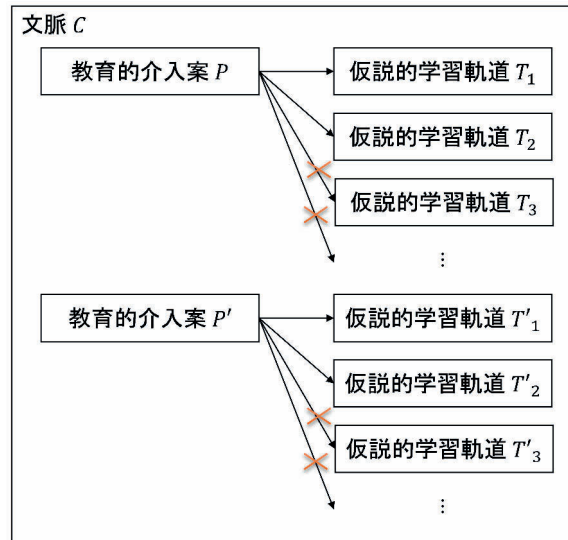
1.2 理論的枠組

「理論」という用語がどのような意味を有するかについては様々な捉えがあるけれど、Cobb (2002) が主張するように、「理論」とは、どのように数学を指導すべきであるかについての直接的な規範 (prescription) を提供するものではなく、教育者 (教師やカリキュラム設計者) が起こり得る学習軌道に関して具体的で検証可能な予想を定式化することを支援し得るものである。科学一般において、「理論」がどのような意味を有するかまでは、ここでは論及し得ないが、少なくとも数学教育に限定した場合、本研究でも、この性質を満たすような体系的なアイデアの集合を「理論」と呼ぶことにしよう。

このことをモデル化して示すため、教育者がある文脈 C における教育的介入案として P および P' のどちらが適切であるかを検討しているとしよう。このとき、数学教育の理論は、介入 P によって学習軌道 T_1, T_2 は引き起こされやすいが、 T_3, \dots は引き起こされにくい、あるいは、介入 P' によって学習軌道 T'_1, T'_2 は引き起こされやすいが、 T'_3, \dots は引き起こされにくい、といったことを示唆する役割を果たす (図 6.1)。理論は、 P および P' のどちらがよい介入であるかは示唆しないし、 $T_1, T_2, T_3, \dots, T'_1, T'_2, T'_3, \dots$ のどれがよい学習軌道であるかも示唆しない。理論は、あくまでも、どの介入に対してどの学習軌道が起こりやすく、どの学習軌道が起こりにくいかにについての参考情報を示すに過ぎないのである。

そういう意味では、否定的な見方をすれば、理論とは、教育者が経験的に当たり前のように予期する仮説的学習軌道を示唆するだけに留まり得るものである。一方で、肯定的な見方をすれば、理論とは、教育者が何となく起こりそうだと信じていることが実は起こりにくいこと、あるいは逆に、教育者がその発生を微塵も予期しなかったようなことが実は起こり得ることを示唆し得るものである。ただ、理論が、意外性の高い現象を予測するかどうかという問題は、完全に主観的な問題である。その予測を聞いた者が、その予測を意外に感じるかどうかという問題であり、理論が理論であるための要件に、本来的にこの「意外性」は不要である。重要なことは、理論が何がしかを予測するという点である。これは、第 5 章で詳しく取り上げたラカトシュ (1986) の科学哲学が示した科学の

図 6.1 教育的介入案から仮説的学習軌道を予測する場面のモデル



基準に照らし合わせても、重要であると言える。そして、理論とは、自動的に何かを予測してくれる機械ではないから、理論を用いて適切にその何かを予測するためには、予測者が理論の使用について適切に習熟している必要がある。しかし、ここで問題が生じる。

一般的に言って、理論とは、論文を通じて公表されるものであり、内容知として提示されることが多いものである。しかしながら、今、ここで問題としていることは、「理論を使用する」という方法知である。論文の読者が、内容知として提示されているものを、方法知として獲得できなければ、理論は、その読者にとって、何がしかを予測するための道具として有益なものとはなり得ない。

そこで、理論を、内容知としてではなく、方法知として提示する試み、すなわち、理論を、方法知として言語化する試みが必要である^{*1}。このとき、言語化された方法知は、ポリア (1954) のヒューリスティクスのような、一種の枠組となる。

なお、上記のように考えると、どんな介入案があり得るかや、どの仮説的学習軌道を目指すことが適切であるか、そして、実際にどの介入案を採用するかは、教育者の価値判断に委ねられる問題となる。ただし、このことは、数学教育の理論があらゆる価値観から独立であることを意味しない。たとえ経験的に事実としてある仮説的学習軌道 T_i が起こり

^{*1} 有名な理論であれば、学会や研究会が主導するワークショップのように、理論を体験的に方法知として習得できるような催しも存在するのかもしれない。しかし、そうした体験的な機会がより一層充実したものとなるためには、まずは、より形式的な形で方法知を言語化することが必要であるであろう。

やすい学習軌道であったとしても、理論が、そもそもその学習軌道の起こりやすさに関心を持たないということがあり得る。その意味で、理論は特定の価値観と結びついており、物の見方を決める枠組として機能する (Cobb, 2007)。

以上より、まとめると、「理論的枠組」とは、教育者 (教師やカリキュラム設計者) が起こり得る学習軌道を予測する際の、素朴な思考を補正する方法知を言語化した知識であり、素朴なままでは予測しなかったかもしれないような学習軌道を予測することを可能にし、素朴なままでは抽象的で検証不可能な予測をしてしまったかもしれないところを、具体的に検証可能な形で予測することを可能にする道具である。また、特に、理論的枠組は、熟達者の経験を言語化することを通じて開発される道具ではなく、根拠となる理論からの含意を明確化することによって開発される道具である。

1.3 ヒューリスティックス

上述の議論においては、枠組とヒューリスティックスという語をそれぞれ相互互換的に用いてきたけれど、ここまでの議論を経て、これら 2 つの差が明確となる。ヒューリスティックスが、個人が主観的に有する方法知であるのに対して、枠組は、そのヒューリスティックスを対象化し、言語によって表現したことによって得られる、メタ的な性格を帯びた知識である。枠組は、言語化された情報であるから、そうした情報は、そうした情報が「あるヒューリスティックスを言語化すると『XXX』と表せる」という情報を意味しているという意味では、その枠組を知っている者にとって内容知である*2。

本研究の目的の 1 つは、教室において真正な数学的活動を実現するための授業設計ヒューリスティックスを開発することであった。しかしながら、ヒューリスティックスを開発したからといって、そのヒューリスティックスをヒューリスティックスのまま、論文を通じて他者に伝達することはできない。原理的に実現可能であるのは、そのヒューリスティックスを枠組という形で言語化して、論文で論究することである。そこで、本研究は、ヒューリスティックスの開発を目的とするが、本章では、枠組の提案を行うことに

*2 この文脈において本質的な問題ではないけれど、もし読者がラディカル構成主義の立場に徹底して立つことを望むならば、枠組が内容知であると宣言することに意味はないであろう。方法知でない以上、ラディカル構成主義にとって、枠組それ自身は知識ではない。ヒューリスティックスになって初めて、知識となる。意味があるように述べるとすれば、枠組についての文字情報を記憶していることで、それが何らかの役に立つのであれば、枠組についての文字情報を記憶から再構成するという行為が、一種の行為シエムをなしていると述べなければならない。

よって、本研究による研究成果とする。

なお、枠組の提案が研究成果になると明確にしておくことは、次の混同されやすい2つの視点を区別するという意味でも有用である。その2つの視点とは、1つが、授業設計のヒューリスティックスそのものについての議論であり、もう1つは、授業設計のヒューリスティックスをどのように身につけるかという教師教育の議論である。何らかの形で適切に論究されたヒューリスティックスが、枠組として表現されたとしても、その枠組は、あくまでもヒューリスティックスの一表現でしかないことに注意しなければならない。

例えば、ある定理の証明を読んだからといって、その定理を直ちに学習者が理解できるとは限らないし、理解できたとしても、その定理を別の問題解決において活用できるとは限らない。それと同様に、あるヒューリスティックスを表現した枠組を知ったからといって、そのヒューリスティックスを直ちに教師が理解できるとは限らないし、理解できたとしても、実際に授業設計を行う際に活用できるとは限らない。しかしながら、例えば、定理の証明を読むことができるということと定理を活用できるということがイコールでないからと言って、その定理の証明それ自体に価値がなくなるわけではないのと同様に、ヒューリスティックスを表現した枠組を知ることとヒューリスティックスを実際に活用できることがイコールでないからと言って、そのヒューリスティックスやそれを表現した枠組、および、それらの妥当性の論究に価値がなくなるわけではない。本研究は、将来的に教師教育へと繋がる可能性を視野に入れつつも、まずは、本章において、ここまで考察してきた内容を精査することによって、教室において真正な数学的活動を実現するための授業設計ヒューリスティックスを理論的枠組として示すことに注力するものとする。

2 教科書に基づく数学的活動の分析

前節で議論したように、本章においては、教室において真正な数学的活動を実現するための授業設計ヒューリスティックスを理論的枠組として精査する。そのために、本節では、特に教科書に基づく数学的活動を、本研究が前章までに提案してきた複数の理論的枠組を用いて分析することを試みる。

2.1 分析目的

本節では、本研究が前章までに提案してきた理論的枠組に対して、さらに抽象的な考察を加え、そこから示唆を引き出すという方法は、適切ではないと考えられる。本研究は、そのそもそもの目的がヒューリスティックスの開発にあるわけであるから、まずは、提案した理論的枠組が具体的に活用可能であることを示すべきである。そうした試みを通じて、そうした具体的活用を理論的に精査することによってこそ、ヒューリスティックスを理論的枠組として表すことができるようになるであろう。

本節では、そうした理論的精査のための具体的場面として、教科書に基づく数学的活動の分析を取り上げる。数学の教科書には、一定程度、当該单元において実施可能な数学的活動案を示唆するような記述が含まれる。そのため、数学の授業において実施する数学的活動案を実際に数学の教師が設計する場合、そうした教科書の記述を参考にしながら、当該单元における数学的活動を立案するということが考えられる。そこで、その教科書の記述を数学的活動案の骨子として取り込んだ場合に予測される仮説的学習軌道を批判的に検証することは、具体的な授業設計過程の一部として重要である。ここでは、この具体的な過程から、授業設計への示唆を得る。

2.2 分析対象

ここでは分析対象として、岡本他(2012)に掲載されている表 6.1 の 3 題を扱う。問題 1 は、同書の 4 章「変化と対応」1 節「関数」の最初に掲載されている問題であり、「関数」の導入として用いることが想定されていると思われる数学的問題である。同書 p.96 には、この問題と合わせて、けいたさんのつくった箱とかりんさんのつくった箱が、違う箱となった様子が描かれている。これは、切り取った正方形の 1 辺の長さが異なっていたためである。また、同書 p.97 には、小学校での学習内容の振り返りが示されており、身の回りにはたくさんのともなって変わる数量があること、そして、小学校ではそれらを表や式、グラフを用いて調べたことが、けいたさんやかりんさんの発言として示されている。これらの記述と「みんなで話し合ってみよう」として示される問いに基づく、問題 1 の解決にあたって期待される学習者の活動は、

- (a) 実際に箱を組み立てる活動を行う中で、箱の高さ・底面積・表面積・容積などが、切り取る正方形の1辺の長さにもなって変わることが予想する
- (b) 2つの数量の関係を、表や式、グラフを用いて調べ、実際にともなって変わっていることを確認する

などが考えられる。また、問題2は、ともなって変わる2つの数量の関係について、特に、一方を決めると他方がただ1つに定まるような関係に目を向けさせるための問題であると考えられる。そして、問題3は、関数を「ともなって変わる2つの変数 x, y があって、 x の値を決めると、それに対応して y の値がただ1つに決まるとき、 y は x の関数であるといいます」(p.98)と定義した後に掲載されている最初の数学的問題であり、関数の意味理解を定着させるための問題として解釈できる数学的問題である。ここでは、この3題を、関数を指導する際に用いる代表的な数学的問題群であると考え、分析対象とする。

本節の分析において、具体的な場面として関数の導入場面を選択した理由は、次の通りである。

平成25年度全国学力・学習状況調査において適切に関数を弁別できた中学校3年生が13.8%であったことを受け、「様々な事象の中の2つの数量 x, y ついて、 y が x の関数であるかどうかを見いだすために、具体的な数を x に当てはめて、 y が一意に決まるかどうかを確かめられるように指導することが必要である」(文部科学省・国立教育政策研究所, 2013, p.65)とされている。定義に立ち返る習慣を身につけることは、関数という領域に限らず重要なことであろう。しかし、関数の定義の強調は、関数領域の大局的な学習を阻害する恐れがある。

第4章でも取り上げた Gray & Tall (1994) のプロセプト論に基づくと、具体的な数を x に当てはめて y が一意に決まるかどうかを確認するという手続きを強調することは、「入力と出力の関係に対する焦点化を減じ」(p.132)てしまう。一方、関数指導の研究においては、入力と出力の関係に焦点化することで関数を対象化することが、各種関数の性質やその微積分を考察していかなければならないという大局的な学習にとって必要であると考えられている(例えば, Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon, & Reed, 2012, 布川, 2014)。そのため、関数の定義の強調は、関数の弁別能力を高めるのに効果的であると思われる一方で、その過度な強調は、関数の対象化を妨げる一因となる可能性がある。

表 6.1 分析対象である関数に関する数学的問題

問題番号	内容
1	<p>小物入れの箱をつくろう</p> <p>けいたさんとかりんさんは、次の方法でふたのない箱をつくります。</p> <p>●つくり方</p> <p>(1) 1 辺の長さが 16cm の正方形の厚紙を用意する。</p> <p>(2) 四すみから、同じ大きさの正方形を切り取る。</p> <p>(3) 右の図の破線にそって折り曲げ、重なりあう辺をテープなどでとめる。</p> <p>●みんなで話し合ってみよう切り取る 1 辺の長さを変えると、それにともなって、どんな数量が変わるでしょうか。</p> <p style="text-align: right;">(岡本他, 2012, p. 96)</p>
2	<p>次の数量は、何を決めると決まるでしょうか。</p> <p>(1) 面積が 24cm^2 の長方形の横の長さ</p> <p>(2) 700g のバケツに水を入れたときの全体の重さ</p> <p>(3) 分速 70m で歩くときの進んだ道のり</p> <p style="text-align: right;">(岡本他, 2012, p. 98)</p>
3	<p>次のうち、y が x の関数であるものはどれですか。</p> <p>(1) A 市から 30km 離れた B 市へ行くとき、進んだ道のり x km と残りの道のり y km</p> <p>(2) 毎分 4L の割合で、水そうに水を入れるとき、x 分間にはいった水の量 y L</p> <p>(3) x 歳の人の身長 y cm</p> <p>(4) 半径 x cm の円の面積 y cm^2</p> <p style="text-align: right;">(岡本他, 2012, p. 99)</p>

こうしたジレンマを防ぐということを課題意識に据えながら、教科書に基づく数学的活動を分析することで、本研究では、単に本研究が提案する理論的枠組の具体的使用例を示すだけに留まらず、数学教育への示唆を論じることも、合わせて試みる。こうした示唆の導出は、理論的枠組単体に対する抽象的な考察だけでは不可能であり、具体的な場面で具体的な課題意識を持ちながら考察するからこそ可能となる。

なお、ここでは、各用語を以下の意味で用いることとする。関数の意味理解とは、

- (1) 関数関係と非関数関係を適切に弁別できるとともに、
- (2) 状況に応じて柔軟に、関数に関して、後述するプロセプト的思考を実行できる状態

のことである。特に、高等学校での数学学習を効果的に進めるためには、(2)の状態への到達が必要である。また、数学的問題とは、日常的な場面が題材の場合であれ、純粋に数学の内容のみが題材になっている場合であれ、数学に関連した思考や判断を伴う問い・問題・作業課題のことである。そして、局所的学習(局所的指導)とは、1つの数学的問題を通じて行われる学習(指導)のことであり、大局的学習(大局的指導)とは、複数の数学的問題を通じて全体として達成される学習(指導)のことである。

2.3 分析方法

ここでは、次の理論的枠組を用いた分析を行う。

- RCMA
- クリスタリン・コンセプト論(プロセプト論)

第一に、RCMAは、第2章で提案した学習観についての理論的枠組であった。第二に、クリスタリン・コンセプト論は、第3章で数学的活動の本性を議論した際や第4章でIDCモデルを定式化した際に活用した数学的概念の本性に関わる理論である。そのうち、代数や関数に特殊化されたクリスタリン・コンセプトは、プロセプトと呼ばれる(Gray & Tall, 1994, Tall, 2011)。

プロセプト(procept)とは、ある種の数学的な記号がプロセス(process)とコンセプト(concept)の二重の役割を果たしていることを表すため、Gray & Tall(1994)によって導入された造語である。彼らは、次の3つの混合物を基本プロセプトと呼ぶ。その3つとは、

表 6.2 記号「 $f(x)$ 」に関するプロセプト

(a) 過程	(b) 対象
1 特定の x に対応する値を求める過程.	特定の x に対応する値.
2 一般の x に対応する値を求める過程.	対応する過程そのもの.

- (a) ある数学的対象を生成する過程
- (b) その過程によって生成される対象
- (c) その過程とその対象の両方を表す記号

である。そして、同一の対象と関連付けられる基本プロセプトの集まりが、プロセプトと呼ばれる (p.121)。

例えば、 $3+3$ や 2×3 、 $8-2$ という記号表現について、それぞれが学習者達にとってその計算過程と計算結果の両方を表しているならば、それらは基本プロセプトである。そして、そのいずれもが同一の数 6 と結び付けられたとき、それらは 1 つのプロセプトとなる。

プロセプト 6 を $3+3$ や 2×3 、 $8-2$ へ分解したり、逆にそれらを 6 へ再合成したりといった、概念的思考と手続き的思考を組み合わせた柔軟な思考は、プロセプト的思考と呼ばれる (p.122)。プロセプト的思考は、「記号使用を、手続きを実行するためのトリガーとしても見なす柔軟な働き〔facility〕を含む」(p.125, 括弧内原語) ような思考である。

プロセプトという考え方は、関数概念にも応用されている (p.137)。例えば、記号「 $f(x)$ 」には、少なくとも、表 6.2 に示す 2 つの基本プロセプトからなるプロセプトが関連していると考えられる。

上述の理論を活用しながら、本節では、数学的問題を対象とした分析によって次の 3 点を同定する。

- (i) その数学的問題はどんなプロセプトと関連するか？
- (ii) そのプロセプトが必要となるのは、問題解決中のどのような段階においてか？
- (iii) ある学習者が、実際にはプロセプト的思考を行っていないにもかかわらず、他者から見てその数学的問題を解決したように見えるのはどのような場合か？

このとき、学習者が (iii) で同定されたような場合、すなわち、プロセプト的思考を行っていないにもかかわらず、他者から見て数学的問題を解決したように見えるような状態に陥っているならば、その学習者にとって、その数学的問題の解決過程における (i) のプロセプト的思考の生存可能性が低下するものと考えられる。それは、次の理由による。まず、RCMA に基づくと、あらゆる学習者は、共同体の一部となるために、学習者なりに最大限合理的に振る舞っていると見なされる。この仮定は、数学の授業に参加する学習者が、他者から見て与えられた数学的問題を解決したように見える状態に到達することを上位目的に据えた活動を展開し得ることを意味する。しかし、実際の学習は、そうした活動の中でどんな方法知が生存可能になるかによって決まるから、(iii) で同定されたような場合に陥ってしまった場合、プロセプト的思考以外の方法知を駆使して、とにかく学習者は、他者から見て与えられた数学的問題を解決したように見える状態に到達することを目指そうとするものと考えられる。逆に言えば、そのような状態に陥っていないならば、そのとき、プロセプト的思考の生存可能性は高まっていると考えられる。

なお、分析にあたって、(i) に関しては、先に引用した基本プロセプトの定義に則り、(a) 過程、(b) 対象、(c) 記号、の3つ組を1つのプロセプトと見なす。

2.4 分析結果

分析結果は、表 6.3 の通りである。各問題について、分析手続き (i), (ii), (iii) の結果を示してある。なお、(i) については、見やすくするため、「(b) 対象・(a) 過程・(c) 記号」の順で示した。

分析結果を要約すると、いずれの問題も、答えの候補を試行錯誤的に探索する過程のみ、プロセプト的思考が必要とされる問題であった。特に、関数の意味を理解するために重要になると思われる問題 2 と問題 3 は、

- (1) 問題の答えの候補を試行錯誤的に探索し、
- (2) 関連するプロセプトを通じて手続き的思考を呼び起こした上で、
- (3) その答えの妥当性を手続き的に確認する

という3つの段階を経ることで、初めてプロセプト的思考を生存可能なものへ変化させられる問題であると考えられる。ここでの課題意識である局所的学習と大局的学習という観

表 6.3 関数に関する数学的問題の分析結果

		(b) 対象	(a) 過程	(c) 記号	
		問題 1	(i)	箱の高さ	箱を組み立てる際に切り取った正方形の辺と辺が重なり合うことで箱が立体的になる過程
箱の底面積	四隅の正方形を切り落とすことで, 底面の形状が決定される過程			(物理的あるいは図中の) 箱の底面, 「箱の底面積」という文字列など	
箱の表面積	四隅の正方形を切り落とすことで, 展開図が決定される過程			切り落とした直後の物理的な厚紙, 箱の展開図, 「箱の表面積」という文字列など	
箱の容積	箱の空洞部分と合同な直方体の体積と, 箱の容積を同一視する過程, および, 底面積×高さによってその直方体の体積を得る過程			(物理的あるいは図中の) 箱の空洞部分, 「箱の容積」や「直方体の体積」という文字列など	
(ii)	これらのプロセプトは, 概念的な観点から答えを自力で試行錯誤的に探索する段階において必要.				
(iii)	視覚的判断に基づいて, つくった複数の箱の間の違いがどこに現れているかを述べれば, この問題には答えたことになる. したがって, 視覚的判断を行っている場合, プロセプト的思考は不要.				
問題 2	(i)	問	(b) 対象	(a) 過程	(c) 記号
		(1)	長方形の面積	縦×横によって面積を得る過程	「長方形の面積」という文字列など
		(2)	全体の重さ	2つの重さを足す過程	「全体の重さ」という文字列など
		(3)	分速	道のり÷時間(分)によって分速を得る過程	「道のり」という文字列など
	(ii)	これらのプロセプトは, 答えを自力で試行錯誤的に探索する段階において必要.			
(iii)	見出された答えの候補が, 与えられた数量を確かに一意に定めるものであるかを判断するにあたっては, 手続き的思考のみで判断することができる. したがって, 他者から答えの候補を示唆されてしまった場合は, たとえ学習者が, それが答えであるかどうかの判断それ自体を自力で行った場合であっても, プロセプト的思考が不要.				
問題 3	(i)	問	(b) 対象	(a) 過程	(c) 記号
		(1)	30km	進んだ道のりと残りの道のりを足す過程	「30km」という文字列など
		(2)	毎分 4L	はいた水の量÷時間(分)で水のはいる速さを求める過程	「毎分…L」という文字列など
		(3)		プロセプトは含まれていない	
	(4)	円の面積	半径×半径×円周率で面積を得る過程	「円の面積」という文字列など	
(ii)	これらのプロセプトは, 与えられた数量の関係式を導き出す段階において必要.				
(iii)	見出された関係式が関数か否かを弁別するにあたっては, 手続き的思考のみでできる. したがって, 他者から関係式を示唆されてしまった場合は, たとえ学習者が関数か否かの判断それ自体を自力で行った場合であっても, プロセプト的思考が不要.				

点から見れば, この3つの段階において, 局所的学習に寄与しているのは段階(3)であり, 大局的学習に寄与しているのは段階(1)および(2)である. したがって, 局所的学習の場面が大局的学習を阻害し得るのは, 局所的指導が重視されるあまり, 学習者が, 「答えの候補を試行錯誤的に探索することを通じて問題解決に至る」ということを経験できなかった場合である, と言うことができる.

2.5 考察

プロセプト的思考を生存可能なものとするためには、答えの候補を試行錯誤的に探索させるだけでも、具体的な数を x に当てはめて、 y が一意に決まるかどうかを確かめさせるだけでも不十分である。試行錯誤的な探索過程が、方法知として、関数か否かの弁別の前段階として有効な方法であるということを、学習者が感じなければならないのである。そのため、関数の定義の強調は、試行錯誤的な探索が既に方法知として定着している学習者に対しては有効な指導であると考えられる一方で、そうでない学習者に対しては、Gray & Tall (1994) の指摘通り、「入力と出力の関係に対する焦点化を減じ」(p. 132) てしまい、プロセプト的思考への移行を阻害してしまう恐れがある。

この分析結果は、プロセプト的思考の指導の難しさを示している。例えば、一斉授業において問題2を学習者に出题する場合を考えよう。このとき、複数の答えの候補を自分で見出し、そのうちのいくつかが答えとして妥当であることを自分で確認した学習者は、その後の教室全体の議論において、自分で見出した答えの候補が答えとして妥当であることを承認されるならば、その議論において同時に他者から他の答えの存在を指摘されたとしても、最初に自分で行った試行錯誤的な探索が有効であるということを実感できるであろう。一方、答えの候補を自分で見つけられなかった学習者は、教室全体の議論において他者から他の答えの存在を示唆され、その妥当性の確認方法を手続き的に学ぶだけとなり、プロセプト的思考の有効性を原理的に実感し得ない。このことは、現行の教科書の数学的問題をそのまま出题するだけでは、学習者によっては、適切な学習が成立しない可能性を示唆している。しかしながら、だからと言って、試行錯誤の重要性を口頭で伝えるだけでは、学習者がプロセプト的思考を通じた試行錯誤ができるようになるわけではない。もちろん、学習者が「プロセプト」という用語を理解できるわけでもない。そのため、この分析結果からの直接的な示唆としては、数学の授業には、学習者が自然と試行錯誤に取り組めるような授業設計が必要であるということである。

この示唆は、プロセプトがクリスタリン・コンセプトの一種であるということから、容易に他の数学的内容に対しても一般化することができる。プロセプト的思考は、主として代数や関数に関連する数学的対象を、それに関連する相等性に基づいて柔軟に取り扱う思考であったが、これを一般化したクリスタリン・コンセプト的思考とは、言うなれば、相

等関係を一般化した同値関係に関わる思考である。つまり、クリスタリン・コンセプト的思考とは、数学的対象や数学的関係を、それに関連する相等性や同値性に基づいて柔軟に取り扱う思考のことである。一般的に言って、数学的な問題解決の最中に試行錯誤をする場合、その解決過程には、考察対象である数学的対象を相等関係に基づいて様々に変形したり、数学的関係を同値関係に基づいて様々に変形したりする中で、答えの候補を探索する、といった過程が含まれ得る。しかしながら、他者から与えられた答えの妥当性を単に確認するという過程は、どのようにしてその答えを得たかに関する情報が必ずしも含まれていない^{*3}。そのため、試行錯誤して答えの候補を得る過程を経験することが、問題解決の要ともなり得る相等関係や同値関係を柔軟に用いるという思考方法が生存可能になるためには決定的に重要であると考えられる。つまり、学習者が数学的活動において試行錯誤する機会を得ることは、数学的活動を授業に取り込むにあたって極めて重要な視点である。その視点を欠いたままでは、局所的学習の場面が大局的学習を阻害し得ると言える。

2.6 授業設計のヒューリスティックスの形成

以上より、本節の考察を整理すると、次の3点を数学の授業を設計するためのヒューリスティックスの一部として主張することができる。

- その数学的活動は、個人による試行錯誤の過程を含み得るか？
- その数学的活動は、試行錯誤を通じて、1つ以上の答えの候補を自分の力で発見できたと感じられるような過程を含み得るか？
- その数学の授業は、「数学的活動を通じて」と称しながらも、単に他者から示唆された答えの候補の妥当性を確認するだけの活動になっていないか？

これらを充足する数学的活動を実施することは、数学的な相等関係や同値関係を柔軟に利用して問題解決をするという方法知の生存可能性を高めるために必要である。

^{*3} 逆に言えば、数学という学問において、どのようにして答えを得たかということは瑣末な問題であり、目の前にある答えの妥当性がきちんと証明される限り、それは答えなのである。

3 全国学力・学習状況調査に基づく数学的活動の分析

本章においては、教室において真正な数学的活動を実現するための授業設計ヒューリスティックスを理論的枠組として定式化する。そのために、本節では、特に全国学力・学習状況調査に基づく数学的活動を、本研究が前章までに提案してきた複数の理論的枠組を用いて分析することを試みる。

3.1 分析目的

本研究の目的は授業設計ヒューリスティックスの開発にあるから、提案した理論的枠組が具体的に活用可能であることを示すべきである。本節では、そのための具体的場面として、全国学力・学習状況調査に基づく数学的活動の分析を取り上げる。全国学力・学習状況調査の解説には、出題された問題を授業で扱う場合を想定した数学的活動案についての記述が含まれる。そのため、数学の授業において実施する数学的活動案を実際に数学の教師が設計するとなった場合、そうした記述を参考にしながら、関連単元における数学的活動を立案するということが考えられる。そこで、その記述を数学的活動案の骨子として取り込んだ場合、そうした数学的活動案から予測される仮説的学習軌道を批判的に検証することは、具体的な授業設計過程の一部として重要である。ここでは、この具体的な過程から、授業設計への示唆を得る。

3.2 分析対象

本節で分析の対象とする記述は、国立教育政策研究所(2015)が「予想する」ことに関して示した学習活動案に注目する。それは、平成27年度全国学力・学習状況調査の中学校数学B問題2を踏まえて提案されたものである。ここでは、

連続する3つの整数の和について成り立ちそうな事柄を、具体的な数を用いて調べ

て予想し、それが他の数でも成り立つかどうかを確かめる活動を取り入れることが考えられる

(p. 101)

と述べられている。ただし、この活動案が、どのような問い掛けを契機として始まる活動なのかについては明確ではない。

そこで本節では、この活動案の解釈を2つ示し、そのそれぞれについて検討することとする。まず、第一の解釈は、「予想する」ことに関する部分を素直に読んで、「連続する3整数の和について成り立ちそうな事柄を予想してみよう」という問い掛けで始まる活動として解釈する。これを活動案1とする。次に、第二の解釈は、ストレートに「予想してみよう」と問い掛ける活動である必要はない、と解釈することにする。なぜなら、上記の活動案においては、学習者が何をきっかけに予想するに至るべきかについて言及がないからである。そこで、次のような3つの問いからなる活動を考える。

- 「連続する3整数の和で、13の倍数になる場合を作れるか？」
- 「同様に、37の倍数になる場合を作れるか？」
- 「他にどんな数の倍数なら作れるか？」

これを活動案2とする。

なお、ここで「予想する」ことに関する活動に注目する理由は、次の通りである。

ポリア(1954)の発見法に代表されるように、数学教育において「方法知」は、古くから関心の的であった。ある種の方法知は、近年の新しい学力観を構築する試みの中でも重要な位置付けを有しており(清水, 2015)、数学的なプロセスに焦点化した実践や研究が求められている(清水, 2012)。そうした中、平成27年度全国学力・学習状況調査の中学校数学B問題2では、連続5整数の和について成り立つ事柄を予想させる問題が出題されている(国立教育政策研究所, 2015, pp. 94-101)。これは、「どのように予想するか」という方法知に関心が寄せられていることの一例として見ることができる。

一般的に言って、数学における方法知とは、その大部分が暗黙知である(Ernest, 1998b, pp. 13-16)。そのため、Lesh & Caylor (2009)が指摘するように、ある方法知を言葉で教えたとしても、そのことがその方法知の学習に繋がるとは限らない(pp. 335-337)。構成

主義流に言えば、学習とは、「方略それ自身の内容における変化以上に、方略の適用範囲の移行に関係している」(Smith, diSessa, & Roschelle, 1994, p. 137) のであって、いつどのように振る舞うべきか(あるいは、べきでないか)という、言葉では正確に表現できない状況判断能力が、暗黙知の中核をなしているのである。しかしながら、この事実は、数学教育研究に対して、「数学的な暗黙知は意図的に教授可能なのか？」という根源的な問題を突きつける。

暗黙知は、言葉では正確に表現できない以上、その妥当性について社会的交渉の余地がある形式知に比べると、極めて個人的な構成物にならざるを得ない。そのため、その必然的帰結として、暗黙知の教授可能性が問題となる。どんな暗黙知を学び得るかが個人の主観に大きく依存するならば、数学教育は、個人の暗黙知獲得に対して、せいぜい数学に触れる機会を作ることくらいでしか貢献できないことにもなりかねない。もしそうだとすれば、近年の数学的プロセスへの注目とは裏腹に、数学教育があまりにも無力すぎる。

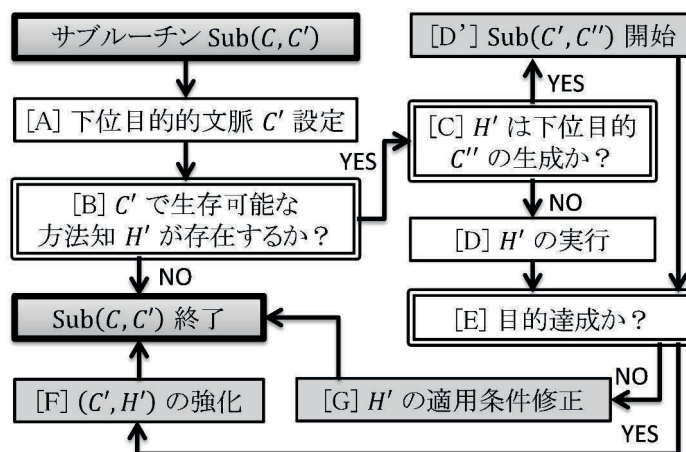
本節では、こうした課題意識を背景に据えながら、全国学力・学習状況調査に基づく数学的活動を分析する。そして、単に本研究が提案する理論的枠組の具体的使用例を示すだけに留まらず、数学教育への示唆を論じること、合わせて試みる。こうした示唆の導出は、理論的枠組単体に対する抽象的な考察だけでは不可能であり、具体的な場面で具体的な課題意識を持ちながら考察するからこそ可能となる。

3.3 分析方法

ここでは、RCMAを用いた分析を行なう。ある方法知をいつ使うかということは、何の目的で使うかということに等しいから、RCMAにおいて、暗黙知は、目的的文脈 C と方法知 H の2要素で規定できる。また、生存可能性の定義より、ある学習者が暗黙知 (C, H) を有しているとは、その学習者にとって、 H が C において生存可能であるということと同じである。このとき、同一の C において生存可能な方法知は、複数存在し得る。生存可能な方法知の数だけ、学習者は、その C において多様な試行錯誤が可能である。

この試行錯誤可能性が、暗黙知の形成にとって重要である。上記の暗黙知観に則るならば、上で取り上げた Smith, diSessa, & Roschelle (1994) と Lesh & Caylor (2009) の指摘は、次の2点を示唆する。

図 6.2 暗黙知形成過程のフローチャート



- (1) 学習とは、 H の変容以上に、 C の変容が重要である。
- (2) 暗黙知 (C, H) について、 H は言葉で教授可能だけれども、 C は言葉での教授が難しい。

そのため、学習者は、既知の H の適用範囲 C を、主観的な判断で変容させなければならない。このとき、その判断のためのデータを与えてくれるのが、試行錯誤の結果から得られるフィードバック情報である。学習者が、 H の結果に寄せる期待と、実際の結果の差異が、 H の適用条件 (生存可能性の範囲) 修正の情報源となる。もし期待通りの成果が得られたならば、暗黙知 (C, H) は強化される。それは、生存可能性が高まるとともに、次回以降、より要領良くこなせるよう、方法知の実行が洗練されることを伴う。

RCMA において、学習者は共同体の一部となるために最大限合理的に振る舞う存在であるが、その目的を果たすために、その学習者が何らかの下位目的を生成するのであれば、「下位目的の生成」も立派な方法知の一種である。この点に留意して、暗黙知形成の流れをフローチャートにまとめるならば、図 6.2 のようになる。以下、[A] ~ [G] は、図 6.2 の各状態を指すこととする。ただし、図 6.2 のサブルーチンの $\text{Sub}(C, C')$ とは、「上位目的的文脈 C の下で、下位目的的文脈 C' を設定する」という方法知を意味する。また、最上位目的「共同体の一部になる」を以下 S とおくと、抽象度の高い目的である S は直接的に達成しにくいので、学習者の行動は、常に、何らかの下位目的的文脈 C の生成 $\text{Sub}(S, C)$ から始まると仮定できる。

本節では、この図 6.2 のフローチャートに基づいて仮説的学習軌道を予測する。そうす

ることで、RCMAの観点から見て、全国学力・学習状況調査に基づく数学的活動が「予想すること」に関する暗黙知の形成に寄与し得る活動であるのかを検証する。

3.4 分析結果

結果は、活動案1と活動案2に分けて論じる。

(1) 活動案1

活動案1については、次のように予測することができる。

「連続3整数の和について何らかの予想を提出する生徒になる」という下位目的的文脈を C とすると、活動案1においては、まず、 $\text{Sub}(S, C)$ が実行されるであろう。つまり、[A] C が設定され、[B] C において生存可能な方法知が探索される。しかし、 C は、なお抽象度の高い目的であるため、ここでは、[C]さらなる下位目的の生成がなされるであろう。ここで生成される下位目的の内容によって、学習過程は大きく2つに分岐し得る。

1つは、「とりあえず具体的な場合を求める」という目的 C'_1 や、「連続3整数を文字で表現する」という目的 C'_2 が生成される場合である(ただし、この軌道に進むには、予めどのような形式の予想を立てればよいかに見込みがついていて、かつ、 C'_1 や C'_2 の生成が生存可能でなければならない)。この場合、[D'] $\text{Sub}(C, C'_1)$ や $\text{Sub}(C, C'_2)$ が開始され、[B]「1, 2, 3を書き出す」という方法知 H'_1 や、「 $n-1, n, n+1$ と文字で書き出す」という方法知 H'_2 が、[D]実行されるであろう(ただし、この軌道に進むには、学習者が予め暗黙知(C'_1, H'_1)や(C'_2, H'_2)を持っていないなければならない)。これが解決に通じれば、[E]目的の達成を実感できるから、[F]暗黙知(C'_1, H'_1)や(C'_2, H'_2)が強化される。また、 $\text{Sub}(C, C'_1)$ や $\text{Sub}(C, C'_2)$ の終了後、 C においても、[E]目的が果たされるから、暗黙知(C, C'_1 の生成)や(C, C'_2 の生成)も強化される(以下、軌道 α)。

もう1つは、「何ができれば予想できたことになるのかを知る」という目的 C'_3 が生成される場合である。これを知らないことには、軌道 α には進めないから、これは、起こり得るケースである。そこで、[D'] $\text{Sub}(C, C'_3)$ が開始されるが、連続3整数和の性質を知らない状況で、どんな予想が教師の期待する予想なのかを知ることは難しい。この状況で、[B]何らかの方法知 H'_3 が生存可能であっても、[E]ことごとく失敗し、[G] C'_3 における H'_3 の生存可能性が低下するだけであろう。やがて、下位目的 C'_3 や C のサブルーチンが終了

し、最終的に、「何もしない」という方法知 ϕ が、 S において生存可能となりかねない。

そこで、そういった学習者を支援すべく、教師が「 $12 + 13 + 14$ のように、具体的な場合でいくつか計算してみよう」と追加で指示を出すことが考えられるかもしれない。方法知は言葉で指導できるので、この指示によって、「具体的な場合で計算する」という方法知 H が、 C において一時的に生存可能となり得る。ただし、[D] H が実行されたとしても、学習者にとっては、依然としてどんな予想が教師の期待する予想なのかが不明瞭である点には注意が必要である。つまり、 H を実行し終えても、[E] すぐに目的の達成に寄与しているとは感じられない。そのため、[G] せっかく学んだ H であるが、 C における生存可能性を低下させることとなる（以下、軌道 β ）。結局のところ、学習者がどんな予想をすればいいのかがつかめるまでは、教師から受けるどんな支援的指示も、目的の達成に寄与していると実感することは難しい。

以上より、活動案 1 で想定される仮説的学習軌道は、軌道 α および β の 2 つである。ただし、軌道 α は、学習者が予め持っている「予想すること」に関する暗黙知を強化する軌道であり、軌道 β は、学習者が「予想すること」に関する暗黙知を形成できない可能性のある軌道である。これから「予想すること」に関する暗黙知を形成していこうとする学習者をも指導することを念頭に置くならば、この活動案 1 は、当該暗黙知の形成に寄与しにくい活動であると言える。

(2) 活動案 2

活動案 2 については、次のように予測することができる。

「13 の倍数となる連続 3 整数和を発見する生徒になる」という目的的文脈を C_1 とすると、活動案 2 では、第一の問い掛けの後、まず、 $\text{Sub}(S, C_1)$ が実行されるであろう。つまり、[A] C_1 が設定され、[B] C_1 において生存可能な方法知が探索される。このとき、例えば、[D] $H_{1.1}$ 「 $13 = 3 + 4 + 6$ を調べる」、 $H_{1.2}$ 「 $26 = 7 + 8 + 11$ を調べる」、 $H_{1.3}$ 「 $39 = 12 + 13 + 14$ を調べる」などの方法知が実行されるであろう。足し算さえ知っていれば試行錯誤できるので、多くの中学生にとって、これらが生存可能であると考えられる。もちろん、生存可能とはいえ、どの連続 3 整数和から調べるか、その選択を要領よく実施できるとは限らないから、その際は教師の助言が必要である。しかし、自ら意図的に方法知を実行しようとしたことには変わらないから、助言の有無にかかわらず、学習者

は、自らの目的を維持できる。そのため、最終的に [E] $12 + 13 + 14$ の存在に辿りついたとき、[F] $(C_1, H_{1.3})$ という暗黙知が強化される。

その後、第二の問いへ移行する。「37 の倍数となる連続 3 整数和を発見する生徒になる」という目的的文脈を C_2 とすると、 $\text{Sub}(S, C_2)$ が実行されるであろう。つまり、[A] C_2 が設定され、[B] C_2 において生存可能な方法知が探索される。このとき、[D] $H_{2.1}$ 「 $37 = 11 + 12 + 14$ を調べる」、 $H_{2.2}$ 「 $74 = 24 + 25 + 25$ を調べる」、 $H_{2.3}$ 「 $111 = 36 + 37 + 38$ を調べる」などが実行されるであろう。しかし、先に C_1 において $H_{1.3}$ の実行が強化されていることから、それと類似する方法知 $H_{2.3}$ が、試行錯誤的に方法知を選択するにあたって、比較的優先的に選択されることになるであろう。最終的に [E] $36 + 37 + 38$ の存在に辿りついたとき、[F] $(C_2, H_{2.3})$ という暗黙知が強化される。

その後、第三の問いへ移行する。「作ることが可能な他の倍数を提出する生徒になる」という目的的文脈を C_3 とすると、 $\text{Sub}(S, C_3)$ が実行されるであろう。つまり、[A] C_3 が設定され、[B] C_3 において生存可能な方法知が探索される。このとき、[D'] 「2 の倍数や 3 の倍数などが作れるかを調べる」という下位目的 C'_3 を生成する者もいるであろうけれど、 $(C_1, H_{1.3})$ や $(C_2, H_{2.3})$ が強化されていることから、[D'] 「13 や 37 など、上手く作れた倍数が、なぜ上手く作れたのかを予想する」という下位目的 C''_3 を生成する者もいるであろう。

C''_3 においては、[B] 「自分のこれまでの行為を反省する」という方法知 H'_3 が生存可能であると考えられるから、[D] それが実行されるであろう。このとき、 $12 + 13 + 14$ が 13 の倍数であったり、 $36 + 37 + 38$ が 37 の倍数であったりということから、「連続 3 整数和は、中央の数の倍数になっていて、例えば、中央の数を 5 にすれば、5 の倍数が作れるんじゃないか？」という形で予想することは自然なことであろう。こうして、[E] 目的が達成され、[F] 暗黙知 (C'_3, H'_3) が強化される。そして、この学習者は、この後、 C_3 に戻ったならば、本当に「中央の数を調整すればいろんな倍数が作れるかを確認する」という新たな下位目的を生成することになるであろう。最終的に、 C_3 を達成するために、この学習者は、「どんな数の倍数でも作ることができる」という予想を自然と述べることになるであろう。[E] この目的達成を経て、[F] 暗黙知 $(C_3, C''_3$ の生成) が強化される (以下、軌道 γ)。なお、 C''_3 ではなく C'_3 を生成した者も、いろんな倍数を効率的に作ろうとする中で、徐々に C''_3 へ注目していくことで、軌道 γ に合流できると考えられる。

以上より、活動案2で想定される仮説的学習軌道は、概ね軌道 γ として描き出せるであろう。この活動では、予想するための下地となる暗黙知 $(C_1, H_{1.3})$ や $(C_2, H_{2.3})$ を強化していき、最終的には、 (C_3, C'_3) の生成が強化される。 C'_3 は、「予想する」という目的的文脈のことであったから、方法知「 C'_3 の生成」の生存可能性が高まるということは、まさに、自ら予想しようとする学習者が育まれているということであり、「予想すること」に関する暗黙知の形成である。

3.5 考察

活動案2の仮説的学習軌道が、「予想すること」に関する暗黙知の形成に通じていることから、「予想すること」に関する暗黙知は、活動案2を通じて、意図的に教授可能であると考えられる。同じ文献に基づいて得た活動案1と活動案2であったが、「予想すること」に関する暗黙知の育成に寄与できるのは、片方だけであった。

活動案2が「予想すること」に関する暗黙知の形成に寄与できると目される理由は、「予想すること」それ自体が目的なのではなくて、別の目的を果たすために「予想すること」が必要が生じている点にあるであろう。方法知が生存可能であるとは、その方法知を知っていることではなくて、ある目的の下でその方法知を使用する傾向にあるということであった。したがって、この定義が示唆することは、ある学習者にとって「予想すること」という行為が生存可能になるためには、そもそもその学習者が、何らかの目的の下で自ら「予想すること」という行為を取ったことがなければならない。そのため、「予想すること」に関する暗黙知を育むということは、自ら進んで予想を試みた結果、予想したことで確かに目的が達成され、「予想すること」行為の効力を実感する機会を提供することであると言える。

そこで、「自ら進んで予想すること」場面がどんな場面か、ということが問題となる。活動案2が、この場面たり得た理由は、次の2つが考えられる。1つは、「予想すること」行為が、教師から求められたものではないということである。何らかの目的の下で「予想すること」行為が生存可能になるということは、その目的は、「予想すること」それ自体ではあり得ない。もう1つは、活動案2が、全体として、「要領よく同じ条件のものを作る」ことを求める活動だったということであろう。特定の数の倍数になるという条件を満たす連続3整数和を要領よく作るためには、どんな法則で作っていけばよいか、自ずと問題となる。そのため、「具体的な数を用いて調べて予想し、それが他の数でも成り立つかどうかを確かめ

る」という、国立教育政策研究所(2015)の求める活動が、自然発生し得ると考えられる。まとめると、次の2点が明らかとなった。

- (1) 「予想する」行為が新しく生存可能になるためには、学習活動の目的は、「予想する」ことそれ自体ではあり得ない。
- (2) 「要領よく同じ条件のものを作る」という活動の中で、学習者は、自然と「予想する」行為をし得る。

したがって、このような学習活動を組織することで、当該の暗黙知は意図的に教授することが可能である。このことを、一般化して述べるならば、ある方法知 H について、 H の実行それ自体を目的とする学習活動では、新しい生存可能な知識として H を意図的に教授することができない。この H を意図的に教授するためには、何らかの試行錯誤を要求されるような別の活動の中で、 H の実行が自然に発生するような仕掛けが必要である。

3.6 授業設計のヒューリスティックスの形成

以上より、前節と本節の考察を踏まえると、次の3点を数学の授業を設計するためのヒューリスティックスの一部として主張することができる。

- その数学的活動は、その活動目的が、新しく学習する数学的な方法知の使用それ自体になってしまっていないか？
- その数学的活動は、新しく学習する数学的な方法知の使用が、その活動目的を合理的に達成するための自然な方法として位置付き得る活動であるか？
- その数学的活動は、学習者が、試行錯誤の末、その活動目的を合理的に達成するための自然な方法として、新しく学習する数学的な方法知の使用を発見することができるような活動であるか？

数学的活動は、学習目標である方法知の使用それ自体を活動目的に据えてはならない。何か別の目的を達成しようとする数学的活動の中で、その方法知の使用が最も合理的であるような活動でなければならないのである。特に、前節の考察を踏まえると、その方法知の使用は、試行錯誤の末に発見されることが望ましいと考えられる。これらを充足する数学的活動を実施することは、新しく学習する数学的な方法知の生存可能性を高めるために

必要である。

4 本研究の提案する理論的枠組からの理論的帰結の分析

本章においては、教室において真正な数学的活動を実現するための授業設計ヒューリスティックスを理論的枠組として定式化する。そのために、本節では、本研究の提案した理論的枠組を用いて、発問行為を設計するための理論的枠組の開発を試みる。

4.1 分析目的

前節および前々節では、教科書や全国学力・学習状況調査の解説が示す数学的活動案の分析を行った。これは、既存の数学的活動案を叩き台とした批判的検討であり、真正な数学的活動を実現する上での留意点を引き出すことに成功したと言える。また、本研究の提案した理論的枠組が、既存の数学的活動案を批判的に検討するためのヒューリスティックスとして機能し得ることを具体的に例証することにも成功したと言える。しかしながら、そうした批判的検討は、授業設計の一過程として重要であるとは言え、そのヒューリスティックスを実践するのに先立って、数学的活動案が既に存在していなければならない。つまり、それは、新しい数学的活動を考案する際のヒューリスティックスではない。そこで本節では、本研究が提案した理論的枠組を、発問行為の設計に応用することを試みる。発問行為を設計するだけでは、真正な数学的活動を考案したことにはならないけれど、数学の授業の一部を設計するためのヒューリスティックスとして、まずは発問行為に焦点化した応用を試みることは価値があると考えられる。

本節では、Aizikovitsh-Udi, Clarke, & Star (2013) に倣い、「発問」(question)と「発問行為」(questioning)を区別する。前者が、発せられる疑問文それ自身がどんな文であるかということに注目する用語であるのに対して、後者は、発問を行う状況を含めた指導実践に注目する用語、すなわち、いつどのように発問を行うかという方法知に関わる用語であ

る。例えば、Aizikovitsh-Udi, Clarke, & Star (2013) は、この区別に基づいて事例研究を行い、同じ発問でも、それを発する状況によって、学習者に与える影響が異なることを指摘するとともに、「教師は、自身の発問が数学的問題と関連を持つような状況を創り出さなければならぬ」(p. 2914) という示唆を導いている。

授業設計においては、どんな発問を行なうかではなくて、どんな発問行為を行なうかを検討しなければならないから、卓越した授業設計者であればあるほど、たとえ発問を設計しているように見えたとしても、実際には、発問行為を設計している。本節では、この意味で、発問行為を設計するための理論的枠組を開発する。

4.2 方法：メタ理論的枠組の設定

発問行為を設計するための理論的枠組を開発するにあたって、本節は、メタ理論的枠組の設定という方法を取る。具体的には、本節では、ラディカル構成主義をその基礎として「発問行為の設計過程」をモデル化し、それをメタ理論的枠組とする。

本節は、発問行為の設計において示唆的な理論的枠組の開発を目指すものである。しかしながら、発問行為の設計とは授業設計過程の一部であるから、発問行為の設計がそれ単体で成立するという状況は、まず想定することができない。例えば、発問行為の設計に先立って、学習目標をどうするかについての検討が済んでいなければならないであろう。

授業設計とは、言うまでもなく複雑な過程であるから、授業設計の際に可能な限り考慮した方がよい観点というのは、いくらでも挙げられる。ポリア (1954) のリストが、有用な枠組であると考えられるにもかかわらず、そのリストだけで十分でない理由は、個々の数学的問題に特殊な観点を都度勘案しなければならないからである。予め、可能な限り考慮した方がよい観点をすべて盛り込んだ枠組というのは、原理的に開発不可能である。授業を設計するための枠組の開発に関しても、同じことが言える。

そこで、本節では、発問行為の設計それ自身と、そこに至るまでに少なくとも必要であると考えられる観点を検討過程を、発問行為の設計過程のモデルと呼ぶ。その上で、本節では、発問行為の設計を、発問行為の設計過程のモデルの範囲内で議論する。実際の学校現場においては、発問行為を設計するにあたって、このモデルの範囲を超えた教育的要請を踏まえた設計が必要な場合も当然あるし、授業設計全体から見れば、このモデルの範囲はごく限られたものであるけれど、そうした点については、本節では取り扱わないことと

する。ここでは、発問行為の設計に付随して少なくとも必要な観点を取り上げることができる。

さて、ここでは、次の5観点からなる発問行為の設計過程のモデルを提案する。

1. 目標となる方法知
2. 基準学習軌道
3. 基準学習軌道上の要支援箇所
4. 教科書の読解を通じた仮説的学習軌道
5. 具体的な発問行為

この5つの観点は、ラディカル構成主義に基づいて発問行為を設計する場合、少なくとも必要となると見込まれる観点である。以下では、各観点の必要性について論じる。

■観点1：目標となる方法知

授業において教師が学習者に介入する場合というのは、そのまま未介入であったならば、学習者がその学習目標を達成できない可能性が見込まれる場合や介入によってより高い目標を達成できる可能性が見込まれる場合、と行うことができよう。普通、相対的に良い状態に移行できる見込みがないまま、闇雲にみだりに介入することはしないであろう。

このことから、発問行為の設計過程には、普通、学習目標を予め明確化しておく過程があると考えるよいであろう。本節は、ラディカル構成主義をその基礎的な理論的枠組に据えることから、その知識観として特に数学的な方法知の育成に注目するものである。したがって、学習目標を明確化するということは、ある数学的問題の解決を通じてどのような方法知を獲得させたいかを明確にすることとして捉えることができる。以上より、発問行為の設計において検討することが必要な第一の観点は、「目標となる方法知」である。

■観点2：基準学習軌道

目標となる方法知が明確化されたならば、次に必要なことは、その方法知の使用を含む仮説的学習軌道を考案することである。学習者が、ここで考案される仮説的学習軌道と似たような学習軌道を歩むならば、その場合は、目標となる方法知の使用を経験したと行うことができるであろう。

本節では、目標となる方法知の使用を含む仮説的学習軌道のことを、基準学習軌道と呼

ぶことにしよう。たとえ専門家の視点から見て要領の良い問題解決の過程でなかったとしても、そこに目標となる方法知の使用が含まれているなら、その仮説的学習軌道は、どのようにその方法知が使用され得るかについての1つの指標とすることができる。以上より、発問行為の設計において検討することが必要な第二の観点は、「基準学習軌道」である。この検討は、学習目標を「方法知の獲得」から「方法知の使用の経験」へと翻訳することである。

■観点3：基準学習軌道上の要支援箇所

目標となる方法知の使用を含む仮説的学習軌道が明確化されたとしても、学習者が自力ではその仮説的学習軌道の通りに進める見込みが低いようであれば、その点を明確化しなければならない。ただ単につまずかないようにすればよいだけであれば、模範的な解決手続きを指示してやればよいことになるが、前節までの分析で明らかにしてきたように、それでは、そこに学習者の試行錯誤が含まれておらず、数学の学びにならない。そこで、基準学習軌道上のどの箇所において支援が必要となり得るかを検討する必要がある。発問行為の設計において検討することが必要な第三の観点は、「基準学習軌道上の要支援箇所」である。

■観点4：教科書の読解を通じた仮説的学習軌道

次に必要となることは、教科書における当該内容の取り扱いを分析することである。設定した目標となる方法知が、教科書においてどのように取り扱われているか、また、その方法知の使用に関連する問題の解決について、どのような説明が掲載されているか、等の確認が必要であろう。その上で、その教科書を学習者が独力で読み進めた場合、どのような仮説的学習軌道が成立し得るかを検討する。

この過程は、数学の授業の土台を作るための分析である。教科書は、それを読むことを通じて独力でも学ぶことができるような配慮が様々な箇所に施されているけれど、その一方で、ラディカル構成主義の観点から見れば、教科書の記述の解釈には自由度があり、常に意図された内容が学習者に伝わるとは限らない。もし教科書解釈の自由度が高いようであれば、その点については、授業において解釈の自由度を低くするための工夫が必要であろう。以上より、発問行為の設計において検討することが必要な第四の観点は、「教科書の読解を通じた仮説的学習軌道」である。

■観点5：授業場面における具体的な発問行為

最後に、第五の観点として、本節の主たる関心である「授業場面における具体的な発問行為」が挙げられる。本節では、ラディカル構成主義をその基礎的な理論的枠組として採用することから、発問行為の設計に関しても、学習者の解釈が熟達者の解釈と一致しない可能性(教師の意図が意図通り伝わらない可能性)と、それでもなお、学習者は、自らの理解の範囲内において最大限合理的に思考していることを仮定して取り組むこととなる。そのため、具体的な発問行為の設計には、次のような過程が必要である。

- (A) 基準学習軌道上の要支援箇所に対する介入案 Q を立てる。
- (B) Q に対する学習者の解釈と、その解釈に基づいて最大限合理的に思考した結果、次に観察されるであろう学習者の振る舞い B_1, B_2, B_3, \dots を検討する(1つの発問に対して、学習者がどのように解釈し得るかは、原理的には複数通り予測され得る)。
- (C) 各 B_i について、どの予測があたった場合に次にどのような介入を行うか、(A)に戻り、次の介入案を立てる。

実施する指導や発問に対して、予想される学習者の反応を複数通り検討し、各反応に対する指導を予め検討しておくということは、指導案を作成する際の一般的な過程であることから、上の過程が、発問行為の設計過程のモデルとして自然であることは了解されるであろう。

この過程において、学習者の思考を促す手立てとして有望であると見なされる Q については、発問行為の一部として採用され、そうでない Q については、設計の見直しが迫られることになる。上述の枠組に沿うならば、最も慎重な検討を要する部分は、(B)の部分であろう。学習者が教師からの介入を解釈し、その解釈に基づいて何を思考したかが「学習軌道」なのであるから、ここで価値ある数学的思考が生じるように、授業設計者は介入案を準備しなければならない。

また、逆に言えば、ここでの介入方法によっては、良かれと思って行った介入でさえ、かえって逆効果になるということもあり得る。例えば、Yackel & Cobb (1996) では、次のような事例が紹介されている (p. 468)。

- ある学習者が、正しい答えを述べた。

- それを受けて、教師は、他の学習者にそれが正しいかどうかを問いかけた。
- そのために、答えを述べた学習者は、自分の述べた答えが間違っていたのだと認識してしまった。

これは、教師が直接「間違っている」と指摘したわけではないにもかかわらず、他の学習者に妥当性を問うという教師の振る舞いの意味を、学習者が主体的に解釈し、意味付けた結果として生じた学習である。その学習者の解答の妥当性の基準は、「数学的推論というよりはむしろ、社会的状況に対する彼女の解釈」(p. 468)にあったわけである。

もちろん、一時的に学習者がこうした認識に陥ることが、授業として悪い状態であるとは一概には言えない。なぜなら、上の例で言えば、例えばこの状態は、数学においては、教師の振る舞いではなく論理によって正誤を判断すべきであることを学習者に伝えるための、1つの契機となるかもしれない。しかしながら、良かれと思って行われた指導が、その意図に反した結果を招き得るということが、授業設計段階における1つの懸念事項であることは疑い得ない。それだけに、 Q から B_1, B_2, B_3, \dots を予測することは、教育の成否に関わる重要な授業設計過程の一部であると言えよう。

以上が、ラディカル構成主義に基づいて発問行為を設計する場合、少なくとも必要となると見込まれる5つの観点である。ここで取り上げた各観点を検討する際に有用なガイドラインを示すことができたならば、そのガイドラインは、発問行為を設計するための理論的枠組と呼ぶことができよう。そこで次小節では、上述のメタ理論的枠組の下で機能する理論的枠組を示す。

4.3 メタ理論的枠組の下で機能する発問行為を設計するための理論的枠組

前小節においては、発問行為の設計において少なくとも必要となる5つの観点を、メタ理論的枠組として示した。これらの5観点に基づいて発問行為を設計していく方法としては、主として概念的分析のテクニックを採用することができる。特に、発問行為を設計する際に実施する概念的分析は、本研究が提案してきた理論的枠組を使用することによって効果的に支援されるであろう。以下、この点を論じる。

■概念的分析の活用

まず、本研究は、ラディカル構成主義の学習観をその根底に採用することから、第4章でも取り上げた、ラディカル構成主義における主要なテキスト分析方法論の1つである「概念的分析」(Thompson, 2000, 2008)を、発問行為を設計する際の教材分析に応用することができる。概念的分析がテキスト分析の方法論であることを踏まえると、概念的分析は、前小節で提示した発問行為の設計過程モデルに基づけば、観点2「基準学習軌道」および観点4「教科書の読解を通じた仮説的学習軌道」の検討に応用できることがわかる。まず、ある数学的問題を設定し、その問題文を概念的分析によって分析することを通じて、基準学習軌道を構築することができる。そして、その数学的問題について、教科書がどのような解説や説明、補助的な問いを設定しているかを、概念的分析によって分析することを通じて、教科書の読解を通じた仮説的学習軌道を構築することができる。

その一方で、概念的分析は、それがテキスト分析方法論であるがゆえの限界を有する。その限界とは、概念的分析が、テキスト解釈の論理的な可能性を検討するテクニックであり、学習者に関する情報をほとんど考慮しない分析テクニックであることに起因している。具体的な限界としては、主に次の2点を取り上げることができる。

第一に、概念的分析だけでは、学習者が実際にどの解釈を採用しやすいかについて、ほとんど情報を得ることができない、という点である。もちろん、このテクニックを採用することは、あえて学習者の思考特性を考慮せずに分析することに徹することで、テキストの非標準的な解釈をも多様に炙り出し、実際の授業において授業者が非標準的な解釈の出現に戸惑うという事態を生じにくくする利点がある。しかし、逆に言えば、ある程度、学習者が困難を感じやすいと考えられる学習軌道や学習者が容易に陥ってしまう学習軌道について見込みがつかないならば、観点3「基準学習軌道上の要支援箇所」を分析する助けにはならないとも言える。

第二に、概念的分析が、学習者の置かれた状況を考慮に入れた分析ではない、という点である。先に Yackel & Cobb (1996) から、教師の振る舞いを見て答えの正誤を判定してしまう学習者の事例を引用したけれど、概念的分析は、こうした学習者の社会的状況判断を考慮に入れた分析ではない。授業に参加する場合というのは、テキストを読む場合と異なり、そこで交わされる言語的情報が、学習者にとって文字通りの意味を持つとは限らな

い。Yackel & Cobb (1996) の例で言えば、教師による「正しいか？」という疑問文が、学習者にとっては「正しくない」の意味を持ち得るのである。観点5「授業場面における具体的な発問行為」を検討するにあたっては、あるテキストの本来の意味を分析する通常の概念的分析を越えて、ある特定の状況においてそのテキストが持ち得る特殊な意味をも分析しなければならない。

以上より、ラディカル構成主義の概念的分析を通常的要領で用いる限りにおいては、少なくとも、次の2観点について、明示的な焦点化がなされないとと言える。

- 学習者がどこに困難を感じ得るか？
- 学習者が社会的状況をどのように解釈し得るか？

概念的 analysis の特徴として既に述べたように、概念的 analysis とは、分析結果を一意的に制限するような手法ではなく、ある程度の自由度の下で行われ得る手法である。そのため、上記の2観点について考慮するかどうかは、また、考慮するとすればどのように考慮するかは、分析者に委ねられている問題である。しかしながら、ここまでの議論に従えば、発問行為の設計過程において、上記の2観点は、積極的に考慮すべき観点である。つまり、概念的 analysis 一般としては必要ではない上記2観点の考慮は、発問行為の設計においては必要な観点となる。

ここまでの議論を一旦整理すると、表6.4のようになる。観点2～5のいずれについても、概念的 analysis のテクニックを応用することで、その分析を実行することができるが、観点3および観点5については、自由度の高い分析テクニックである一般的な概念的 analysis を実施するよりは、拡張的観点1および2に自由度を制限する形で概念的 analysis を実施する方が適切であると考えられる。

なお、観点1については、価値観の問題であるため、何かを分析することによって論理的に導出されるという性質のものではない。これは、本研究の不備というよりはむしろ、ラディカル構成主義を基本原理に据えた理論的枠組の、自然な原理的限界である。ラディカル構成主義は、学習者の認識を問題にする哲学であり、個別の数学の教材に関する価値判断を含まない哲学である。そのため、教育目標の決定に関して、ラディカル構成主義は何ら教育的示唆を与え得ないのである。ここでは、発問行為を設計するために考慮する必要があるという意味で取り上げはするけれど、観点1をどのように定めるかについての理

表 6.4 発問行為を設計するにあたっての概念的分析の使用場面

	観点	特別な観点	分析対象
2	基準学習軌道	—	授業で扱う数学的問題
3	基準学習軌道上の要支援箇所	拡張的観点 1	基準学習軌道
4	教科書の読解を通じた仮説的学習軌道	—	教科書の記述
5	具体的な発問行為	拡張的観点 2	授業での介入案

論的枠組の開発は、本研究の射程を大きく超えてしまう。本研究では、観点 1 に対する理論的枠組の開発については取り扱わないものとする。

以上より、発問行為を設計するための理論的枠組とは、この 2 観点をどのように考慮するかについてのガイドラインとなる理論的枠組のこと、となる。以下では、上記の 2 観点をそれぞれ、概念的分析の拡張的観点 1 および拡張的観点 2 と呼ぶこととし、これらをそれぞれ考慮するために有用な理論的枠組を具体的に論じていくこととする。

■ IDC モデルと RCMA の活用

拡張的観点 1 および 2 を検討するにあたっては、それぞれ IDC モデルと RCMA の活用が有用である。具体的には、次の通りである。

拡張的観点 1 「学習者がどこに困難を感じ得るか？」を検討するということは、基準学習軌道上における要支援箇所を特定するということである。第 4 章で示したように、基準学習軌道上での要支援箇所を特定するためには、その基準学習軌道が IDC モデルで表現されていることが有用である。

また、拡張的観点 2 「学習者が社会的状況をどのように解釈し得るか？」を検討するということは、学習者の立場に立って、学習者にとってその状況をどのように解釈することが最も合理的であるかを考えることを意味するから、第 2 章で示したように、RCMA を用いて、

(P) 共同体の一部となるために学習者なりに合理的に振る舞うものであると仮定することで、

(M) 仮設定された学習指導の計画に関する情報から、

(Q) 「各学習者がどのように反応し得るか」、そして、「その反応に合わせてどのよう

な追加の指導を計画すべきか」を明らかにしようとする

ことが有用である。

Mason (2014) は、発問行為に関する先行研究を整理し、発問の形をしてはいるものの、実質的に学習者達への指示になっている発問行為を「伝達としての発問」と呼び、学習が生じない発問であると指摘する。RCMAの仮定に基づけば、「伝達としての発問」は、学習者の視点から見たとき、実質的に「指示」と同じであるから、試行錯誤が生じないし、学習者が主体的に探究する自由度を残すことができない。自分が頭の中に思い描いている数学的対象の特定の部分へと注意を移行するためには、自らの自由意志でそれを成し遂げるほかないわけであるから、教師が実質的な「指示」を与えてしまっている環境は、注意の移行の支援に繋がらない環境である。このような発問行為に陥らないように注意しながら、発問行為を設計する必要がある。

学習者が支援を必要とする箇所がどのような箇所であるかをIDCモデルに基づいて改めて反省すると、それは、まずもって、比較的長い時間、教師によって期待される注意の移行が達成されない場合である。学習の要として試行錯誤があることを考えると、すぐに模範的な注意の移行が実現されればよいわけではなくて、ある程度、注意の移行が達成されない時間というのは必要であるが、それが比較的長い時間になったとき、実際に介入の必要性が生じると言えよう。

そして、この、比較的長い時間、次なる注意の移行が達成されない場合というのは、注意の移行が実際に止まってしまい、推論が進まなくなる場合と、同じ条件に注意が行ったり来たりしてしまい、見かけ上推論が進んでいないように見える場合と、2通りに大別することができよう。しかし、いずれの場合も、次に注意を移行すべき条件が適切に見出だせていない場合であるという点では共通している。これらの場合はいずれも、学習者が、次に注意を移行すべき条件を探索するにあたって、適切な探索範囲を認識していないがゆえに、適切な移行先を見出せずにいる、と捉えることができよう。

したがって、学習者に対して、条件の適切な探索範囲を示唆するような発問行為が、数学の授業において必要な発問行為である。これが、ここまで取り上げた種々の理論的枠組の制約に基づいて得られる1つの理論的帰結である。

発問行為の設計過程モデルにおける各観点と、分析方法・分析対象・支援的な理論的枠

組の使用場面の関係を整理すると、表 6.5 のようになる。本節における新規な提案は、次の 3 点である。

- (a) 観点 2 の検討結果を、IDC モデルを利用して表現すること。
- (b) 観点 3 の概念的分析において、観点 2 の分析結果を用いて拡張的観点 1 を検討すること。
- (c) 観点 4 の概念的分析の結果に基づいて、観点 5 において、RCMA を用いて拡張的観点 2 を検討すること。

4.4 具体的な使用例

ここでは、表 6.5 によって示された方法に基づいて、具体的に発問行為の設計を試みてみよう。そうすることによって、表 6.5 の具体的な使用方法を示す。特にここでは、第 4 章で示した面積問題について、筆者による具体的な分析結果を提示する。「理論的枠組」の定義が示す通り、この具体的な分析は、提案された理論的枠組に従って設計すれば誰が設計しても同じ発問行為が導出されるという性格のものではない。本小節では、具体的な分析の結果を示すに留め、本節の具体的な分析において本稿の提案する理論的枠組がどのように活かされたかについては、具体的な分析の反省という形で、次小節にて詳述する。それでは、発問行為の設計過程モデルに示された各観点を 1 つずつ確認していこう。

■観点 1：目標となる方法知

ここでは、面積問題の核の 1 つを、「単調増加 (減少) ではない現実的な場面を、変数の導入によって定量的に捉える」という方法知の獲得にあるものとする。理由は、次の通りである。

第一に、この場面は、単調増加 (減少) ではない現実的な場面が、初めて主たる考察対象として取り上げられる指導場面である。中学校 3 年生の関数 $y = ax^2$ の学習においては、 $x > 0$ であるような現実的な場面が取り上げられることが中心的で、現象としては単調増加 (減少) の場面ばかりである。

第二に、初めての単調増加 (減少) ではない現実的な場面であるがゆえに、学習者は、このような場面において直観的に最大値を求めることができないと考えられる。もちろん、

表 6.5 発問行為を設計するにあたっての概念的分析の使用場面と本研究の提案する理論的枠組の使用場面

観点	特別な観点	分析対象	理論的枠組
2 基準学習軌道	—	授業で扱う数学的問題	IDC モデルによる分析結果の表現
3 基準学習軌道上の要支援箇所	拡張的観点 1	基準学習軌道	IDC モデルによる「注意の移行」への注目
4 教科書の読解を通じた仮説的学習軌道	—	教科書の記述	(通常の概念的分析)
5 具体的な発問行為	拡張的観点 2	授業での介入案	RCMA に基づいた学習者の動機の考慮

習熟しさえすれば、折り曲げた長さに応じた2次関数になるであろうことが直観できるし、 $x = 0, 10$ のときという、ちょうど長方形が潰れて溝が作れない最も極端な場面を想像することで、その2次関数と x 軸との交点もすぐにわかる。そのため、こういった直観が養われれば、形式的な処理を一切することなく、2次関数の対称性より $x = 5$ で最大になるであろうことは容易に想像がつくと言える。しかし、この問題に初めて取り組む学習者に、そのような直観を期待することはできない。

したがって、そのような直観を育む前段階として、自ら変数を導入し、形式的な処理を実行するという経験が重要となる。形式的な処理は、面積問題を学習するまでの既習事項であるから、ここでは、問題文から変量を同定し、自ら変数を導入するという方法知の使用が、特に重要になると考えられる。

■観点2：基準学習軌道

面積問題の解決において期待される仮説的学習軌道で、目標となる方法知の使用を含む仮説的学習軌道は、例えば、既に第4章で示した図4.1のように、IDCのモデルを用いて表現することができる。図4.1で示した仮説的学習軌道には、変量を同定し、変数を自ら導入する過程が含まれる。

■観点3：基準学習軌道上の要支援箇所

学習者が面積問題を意味のある問題として理解できるためには、

- (a) 折り曲げ方によって面積が変化するということ
- (b) 単調増加(減少)ばかりを扱っていた今までの経験からでは、面積の最大値を求めるための数学的処理が直ちには不明であるということ

の2点を実感している必要があると考えられる。逆に言えば、この2点を実感できていれば、このような場面で変数を導入して折り曲げ量と面積の間の関係を関数関係として認識し、目標となる方法知を自然に使用できるはずである。

こう考えたとき、図4.1のような仮説的学習軌道を進む上で最大の障壁となり得る箇所は、時刻 t_2 から t_3 において「銅板」に関して、「折り曲げた量が何cmずつかある」という条件を具体化するところであろう。面積問題は、切り口の面積の条件から折り曲げ量を決定する問題であるが、その一方で、仮に実際に物理的に銅板を折ってこの問題場면을再

現するとすれば、折り曲げ量が具体的に何 cm であるかが決まった後に切り口が長方形であることが確定する。数学的問題が要求する数学的対象の構成過程と物理的に実現可能な物理的対象の構成過程の順番がねじれているということは、ここに、認識の上での飛躍が存在することを示唆する。

Mason (1989) の「注意の移行」というアイデアに基づいて、この認識の飛躍の埋め方を考えるならば、まずは物理的に自然な構成過程で心的にモデルを形成し、次いで、その心的モデルの本質的に重要な要素のみに注意を移行するという認識が必要であると考えられる。つまり、折り曲げ量を未知数と見なす仮説的学習軌道を、IDC モデルを用いてさらに詳述するとすれば、次の2つのステップとして表現することができる。第一に、例えば、折り曲げ量が 1cm の場合、2cm の場合、3cm の場合、あるいは、2.345cm の場合等々、折り曲げ量が様々な具体的な実数値である場合を具体モデルとして心的にイメージする。第二に、個々の実数値が持つ特殊な条件 (例えば、有理数である、素数である、5 で割り切れる等) から注意をそらし、「0 以上 10 以下の実数である」という、各具体モデルに共通の条件のみに注意を移行して、新しい記述モデルを生成することによって成し遂げられると考えられる。もちろん、関数関係の取り扱いに習熟した学習者であれば、図 4.1 における時刻 t_2 から t_3 への心的モデルの変化のように、いきなり折り曲げ量を未知数とする心的モデルの変化を実現できるかもしれないが、2 次関数を学習した直後の学習者にとって、この関数関係の扱いは支援が必要である可能性を指摘することができる。

■観点 4：教科書の読解を通じた仮説的学習軌道

面積問題が掲載されている教科書には、図 6.3 および図 6.4 のような図が掲載されている。これらは、銅板全体のイメージを示すとともに、考察対象が断面のコの字型の部分のみでよいことを示すために描かれていると考えられる。また、「考え方」として、問題の直後に次の文言が掲載されている。

両端から折り曲げる長さを x cm として、 x を用いて切り口の面積を表す

(高橋他, 2011, p. 98)

この「考え方」の記述から、教科書も、本節で指摘したものと同様の方法知の獲得を期待しているものと考えられる。しかし、この教科書には、

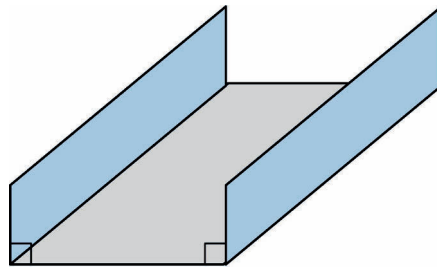


図 6.3 教科書における銅板の全体図

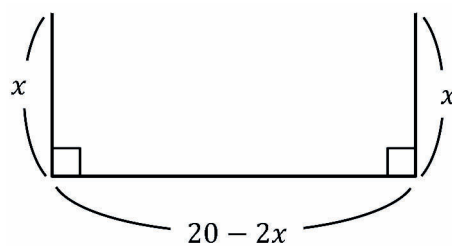


図 6.4 教科書における銅板の断面図

- (a) 折り曲げ量によって面積が変化すること
- (b) 面積の最大値を求めるために数学的処理が必要であること

の 2 点を確認する記述が含まれていない。

実際、図 6.3 や図 6.4 は、たとえ x という文字が使われていたとしても、それは、物理的に長さの測ることのできる、ある長さを持った特殊な図である。学習者にとってこの記述は、折り曲げ量によって面積が変化することを確認せずに変数の導入を指示しているとも受け取れる。ある変域で変化する量があって、その量にラベルをつけるということが、変数の導入の自然な順番であると考えれば、この記述は、順序が逆である。学習者は、この記述から、2 次関数のような扱いやすい関数関係ではないような変量に文字 x を導入してしまったり、変数の変域に無頓着なまま変数 x を導入してしまったりすることを学びかねない状況にあると言える。そのため、教科書を読んで自習をする場合を想定するならば、上記の 2 点 (a) および (b) を確認できるかどうかは学習者の読解力に全面的に依存していると言える。

■ 観点 5：授業場面における具体的な発問行為

まず、授業場面では、学習者が、教師の解説に従う人や 2 次関数の応用問題を解くこと

ができる人になることを目標アイデンティティに据えている可能性が高いと見込まれる。これを前提に据え、RCMAの枠組と観点4の分析結果に基づくと、教師が教科書の記述の順番通りにこの面積問題を解説した場合、学習者は、目標アイデンティティへ接近するための方法知として、「2次関数の応用問題というくらいなのだから、そういう応用問題に出くわしたら、何かを文字で置いて2次関数をつくれればよい」という方法知を学ぶだけに留まってしまおう。実際、この場合の教師の解説は、面積と折り曲げ量が関数関係にあることを先に確認した後に変数 x を導入するという、基準学習軌道とは逆向きの流れとなるから、目標アイデンティティへ接近することを目的としている学習者にとって、教師の解説とは逆順で推論を行うというのは、RCMAの仮定より不自然な行為であると言える。

もちろん、2次関数の応用問題に出くわしたら、何かを文字で置けばよいという考えは、ある意味では、間違った認識ではない。しかし、この認識だけだと、結局のところ、最も重要であるはずの「どんな変量に着目し、変数を導入するか」を学習者に検討させていないので、学習成果が問題解決能力に直接的に結びつかないことになってしまうであろう。特に、観点4の分析で示したように、この流れでは、2次関数のような扱いやすい関数関係ではないような変量に文字 x を導入してしまったり、変数の変域に無頓着なまま変数 x を導入してしまったりすることを学んでしまいかねない。

この状況を、IDCモデルを用いて捉えるならば、次のように捉えることができる。まず、学習者は、両端を同じ量ずつ折り曲げた銅板という心的モデルを生成しようと試みるも、折り曲げる量が未知であり、何cmずつ折り曲げればよいのかが判然としないため、独力ではそれ以上心的モデルを作ることができない。一方で、「両端から折り曲げる長さを x cmとして」という教科書の記述から、折り曲げた量が x cmである銅板という心的モデルを生成する。この後者の心的モデルを形成する過程には、 x の変域に着目する過程が含まれていないので、学習者がこの心的モデルから次なる具体モデルを生成しようとするとき、この学習者は、折り曲げ量が15cmであるような場合も平然と生成することがあり得るであろう。それは、「コの字型として構成可能な折り曲げ量しか採用できない」という条件に、その学習者の注意が移行する必然性がないからである。

そこで、上の(a)と(b)の確認を学習者に促すための発問行為が重要となる。まず、(a)を確認するためには、観点3の分析結果より、物理的に自然な構成過程を経験させるこ

とを通じて、折り曲げ量という変量が存在することへ注意を向ける発問行為が必要である。それを実現する発問行為の一例としては、「3cm 折り曲げる」という設定で、溝の断面積が何 cm^2 になるかを考えさせることが考えられよう。つまり、「幅が 20cm の銅版がある。これを両端から 3cm ずつ 90° 折り曲げて水を流す溝を作る。切り口の面積はいくらか？」と問うことである。この問いは、折り曲げることによってコの字型が作れることや、断面積が長方形の求積公式で得られることの確認にもなる。

また、変量の存在を示唆する発問行為としては、例えば、学習者に自由に値を選ばせ、その値を折り曲げ量として面積を計算させるということが考えられる。自由な値の選択は、具体モデル生成の間接的的要求である。このことは、最初に教師の与えた具体例である 3cm を基にしなが、全体集合である $\{x|0 < x < 10\}$ を間接的に意識させることに繋がる。もし範囲外の値を答える者がいれば、試しにその値でコの字を作らせてみて、作ることのできない値の存在を確認する契機とすることができる。しかも、範囲外の値の存在を確認することが数学的態度として重要であると評価してやることで、誤るリスクを恐れないことが、コミュニティで受容される目標アイデンティティの接近に有効であると示すことができる。もし範囲外の値を答える者がいなければ、教師が「15cm のときの面積は？」や「折り曲げる量は、どこまで大きくできる？」と問うことができよう^{*4}。

これらの問いは、いずれの場合も、観点 3 の分析で示した、物理的に自然な構成過程を、様々な数値で繰り返し経験させることを促す発問行為となっている。RCMA の仮定より、学習者の最上位目的は、目標アイデンティティに接近することであるが、それを達成するためには、物理的に自然な構成過程を経験することが下位目的として必要な状況が生み出されていると言える。

全体集合を意識させつつ、具体化を 3 回以上繰り返させることは、もう 1 つ、並行して、学習者に重要な気付きをもたらす。それは、面積の変化が単調増加 (減少) ではないということへの気付きである。具体化を繰り返す中で、折り曲げる量が 10cm に近い場合と 0cm に近い場合を比較して、「折り曲げる量が小さく (大きく) なるとうなっているだろうか？」と問うことができる。そして、「どこかで一番大きくなるはずだよな」という確認をもって、「では、折り曲げる量が何 cm であれば、一番大きくなるのだろうか？」と問

^{*4} 教科書は、 $20 - 2x > 0$ を条件としているが、この活動を通じて導き出される条件としては、 $x + x < 20$ (すなわち、折り曲げる量の和が 20 を超えない) の方が自然であろう。

う。こういう手順を踏むことができる。

この段階までくれば、折り曲げる量は、変域を伴う変量として認識されていることであろう。「折り曲げる量と断面積の間には、どんな関係があるだろうか？」と問うことで、何をどんな文字で置くのか、そして、どのように立式するのかを考えるよう促すことができる。あとは、2次関数の既習事項の問題である。答えを得ることができた後、全体的な学びの成果を振り返る意味で、例えば、「この問題を解く上で何が重要だったか？」や「他の問題を解くときにも使えそうなアイデアがあったか？」と発問することで、具体例を用いて変域を意識することや文章題中に登場する2量間の関係性を検討することが、学習者なりの言葉で紡ぎだされたならば、「単調増加(減少)ではない現実的な場面を、変数の導入によって定量的に捉える」という方法知の獲得という目標が、この文脈に限っていえば、達成できたと評価できるであろう。

上記で考案した発問行為はいずれも、全体での問題提示の場面で使うこともできるであろうし、問題提示の場面で使わなかったならば、机間指導の場面で個別に発問する際にも使うこともできるであろう。どの発問行為を全体での指導で使い、どの発問行為を個別指導で用いるかは、本稿で提案した理論的枠組を用いて判断することはできない。この点は、学習者の実態を踏まえた現場での判断が必要になると考えられる。

4.5 授業設計のヒューリスティックスの形成

前小節までで、表 6.5 で示したヒューリスティックスの理論的妥当性と活用事例を示すことができた。本章のここまでの考察を踏まえると、以下の項目を数学の授業を設計するためのヒューリスティックスの一部として主張することができる。

- その数学的活動は、その活動を通じて学ぶことが目標とされる方法知が明確である活動か？
- その数学的活動において、学習者を支援するための発問行為を設計したか？
 - その数学的活動において起こり得る学習軌道の1つとして、学習目標となる方法知の使用を含む仮説的学習軌道を基準学習軌道として考案し、それを IDC モデルによって表現したか？
 - IDC モデルによって表現された基準学習軌道を、「注意の移行」という観点か

- ら精査し、要支援箇所を特定したか？
- 教科書の読解を通じて仮説的学習軌道を構成し、基準学習軌道と比較したか？
- 教師による発問行為の後、学習者が自らの置かれた社会的状況をどのように解釈するかを RCMA を用いて推定し、その発問行為の妥当性を評価したか？

5 本研究が収集した経験的データから得られる示唆の分析

本節においては、教室において真正な数学的活動を実現するための授業設計ヒューリスティックスを理論的枠組として定式化するために、特に、第5章で整理した示唆を分析し、そこから得られるヒューリスティックスを理論的枠組として定式化する。

5.1 分析目的

前節までに取り組んできた授業設計ヒューリスティックスの開発は、考察する状況として、個人による問題解決場面を想定していたり、学習者個人に対して教師が介入する場面を想定していたりしていた。しかしながら、実際の授業場面で数学的活動を組織するにあたっては、集団における問題解決場面を想定することもあり得るであろう。本節は、この点に焦点を当てた授業設計ヒューリスティックスの導出を目的とする。

本研究では、グループ活動を設定するにあたって、どのような男女比でグループを組むかや、どのような学力差でグループを組むかなど、グループの構成方法に関する問題までを取り扱うことはできない。また、そもそも、数学の授業においてグループ活動を行なう是非までを扱うことは到底できない。それでも、数学の授業において、仮にグループ活動を実施したとしたならば、どのような点に留意することが必要であるかについての示唆を整理しておくことは重要である。

5.2 分析方法

本節では、その授業設計ヒューリスティックス導出の方法として、第5章で得た示唆を、本研究がここまでに得てきた結果と照らし合わせながら、ヒューリスティックス導出という観点で再精査する。第5章第6節で考察を展開した際は、今後の展望を含めた形で議論をしたが、このうち、現段階で授業設計ヒューリスティックスとして整理できることには限りがあるため、再精査が必要である。

本節で参照する第5章で得た示唆は、次の5点であり、大きく3つに分けて参照することとする。

- 各学習者は、自分にとって心理的負担が少ないアプローチを堅い核として構成する傾向にあること (第6.1節)
- どこまでが堅い核でどこからが防御帯であるかという境界線は、必ずしも明確ではないこと (第6.2節)、および、前進的に問題移動するためには、自身の堅い核に対して漠然とした期待感を持たなければならないこと (第6.4節)
- 教室内にいるすべての学習者が、単一の堅い核を構成するという状況を仮定できないこと (第6.4節)、および、異なる研究プログラム同士は、コミュニケーションをする必要性が生じないこと (第6.3節)

5.3 考察

ここでは、前小節で示した3つの区分について、それぞれについて検討する。

■心理的負担と堅い核の関係性

堅い核が、心理的負担が少ないように構成される傾向にあるという点は、仮説的学習軌道を検討する上で重要な意味を持つ。例えば、前節で提案したヒューリスティックスの1つに、「IDCモデルによって表現された基準学習軌道を、『注意の移行』という観点から精査し、要支援箇所を特定する」というものがあるけれど、IDCモデルは、表現形式を提供するだけのモデルであるため、具体的な要支援箇所を特定する基準というものは、このモデルに含まれていなかった。そういう意味で、堅い核の構成に心理的負担の大小が関係し

ているとすれば、それは要支援箇所を特定することに示唆的な基準となる。

心理的負担とは、極めて主観的な問題であるため、本研究で扱った事例においても、地道な筆算の方が負担だと思える者もいれば、対数計算の方が負担だと思える者もいた。これは、授業に参加する学習者が、それぞれの方法についてどの程度習熟しているかにも関連する問題であるけれど、単純に十分練習を積んでいるかということよりも、むしろクリスタリン・コンセプトを形成しているかということの方に重きがあるように思われる。例えば、この場合におけるクリスタリン・コンセプト的思考の一例としては、 $\log_{10} X + \log_{10} Y$ と $\log_{10} XY$ を同一視するということが挙げることができる。教師が、問題解決の方法知として、この2つの数学的対象を同一視するよう学習者に強要するのではなくて、学習者が、結果として、この2つの対象を同一視することを選択してしまっているような状況を、予め経験しているようであれば、その学習者にとって、こうした柔軟な思考が生存可能となっており、地道な筆算よりも心理的に負担が少ない方法知として対数の利用が位置付き得るであろう。そのため、これまでの授業の実施状況や、その授業における学習者の様子をクリスタリン・コンセプト的思考という観点で観察することで、次の要支援箇所を同定するための情報を収集しておく必要があると言えよう。

この必要性を、ヒューリスティックスとして捉えたとすれば、それは、授業を設計する際の前提となる児童観・生徒観の検討に関わるヒューリスティックスになるであろう。つまり、当該授業に参加する学習者達が、当該授業で出現し得るクリスタリン・コンセプトを、どの程度、柔軟に取り扱うことができるようになっているか？そして、その柔軟性の度合に応じて、どのような仮説的学習軌道が描かれやすいと考えられるか？これを予測することである。

今回の例に合わせて、一例として、 2^{54} の高位の桁を求めるという仮説的学習軌道を考えよう。考えられ得る仮説的学習軌道の1つを IDC モデルを用いて表現するとすれば、例えば、図 6.5 のように描くことができるであろう。この軌道を進むためには、 $\log_{10} X + \log_{10} Y$ と $\log_{10} XY$ を自発的に同一視するという、クリスタリン・コンセプト的思考が必要とされる。より具体的に述べるとすれば、次の通りである。まず、この軌道上においては、時刻 t_7 において、 16.254 と $16 + 0.254$ を同一視する必要があるが、ここでこのような分解を思い付くためには、時刻 t_{10} および t_{11} において $\log_{10} X + \log_{10} Y$ と $\log_{10} XY$ が使えるということに見込みがなければならぬ。高校生であれば、多くの場合、 16.254

と $16 + 0.254$ が同じであることを指摘されさえすれば、それらを同一視することに困難は抱えないであろうけれど、この問題解決の途中で自発的にこれらを同一視する発想に至ることは、必ずしも簡単なことではない。 16.254 を 16 と 0.254 に分けて考えても、後で戻すことができるという理解がそこには必要であり、そうした理解は、 $\log_{10} X + \log_{10} Y$ と $\log_{10} XY$ を自発的に同一視するという、クリスタリン・コンセプト的思考に支えられていると言える。そのため、このクリスタリン・コンセプト的思考が当該学習者にとってどの程度生存可能なものとなっているかが、この学習軌道を円滑に進む上で、特に、 t_6 から t_7 へ移行する上で重要であると言える。

この問題解決に挑むにあたっては、 $\log_{10} X + \log_{10} Y = \log_{10} XY$ という等式については、既習の状態に挑むことが前提となるけれど、この等式が既習であるということと、この等式を柔軟に使用できるということは、同じことではない。そのため、指摘されればこの等式が活用できるということを理解できる学習者であっても、自発的にこの等式を使用しようとすることはできないかもしれない。したがって、この問題解決の場面において、 t_6 から t_7 への移行が一人ではできない学習者が存在することが見込まれるから、この移行を支援するための指導計画が必要であると考えることができる。

以上のように、要支援箇所の特定を実現することができる。ここでの議論は、堅い核の構成に心理的負担の大小が関係しており、かつ、それがクリスタリン・コンセプトの形成状況と関係しているという仮定に基づいている。経験的データから示唆される仮説であるとは言え、もちろん、これらはあり得る可能性の1つでしかなく、こうした仮説が100%正しい保証はどこにもない。しかしながら、授業を設計するためのヒューリスティクスとして考えたとき、そうした高い水準での保証は必要はない。上記の要領で特定された要支援箇所が、万人が確実につまづく箇所であると断定できる必要はないし、つまづくとなれば、上記の箇所ではしかあり得ないということを断定できる必要もない。上記の箇所が、学習者がつまづく可能性のある箇所として考慮するに値するということがさえわかれば十分である。そのため、

- その数学的活動に関するクリスタリン・コンセプトの形成状態、および、それに関連するクリスタリン・コンセプト的思考の生存可能性の程度は、これまでの授業における学習者達の状況から、どのように推定されるか？

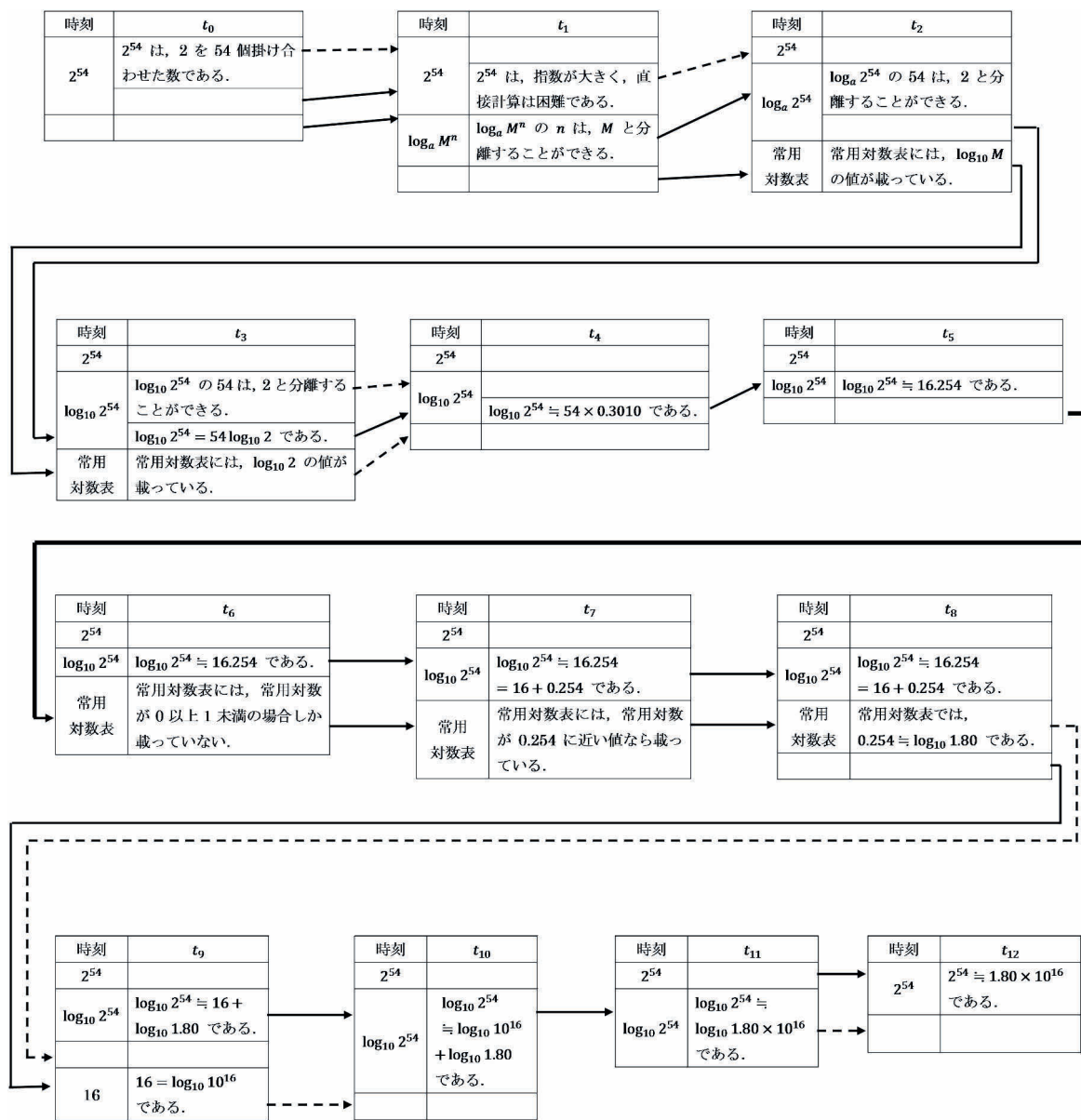


図 6.5 2^{54} の高位の桁を求める際の仮説的学習軌道の一例

- その数学的活動において, そのクリスタリン・コンセプツ的思考を發揮しなければならない場面は, 仮説的学習軌道上におけるどの箇所であるか?

という 2 点は, 授業を設計するためのヒューリスティックスとして意味がある。

■ 堅い核と防御帯の境界線

堅い核と防御帯の境界線が曖昧であるという問題は, 堅い核としてこだわってさえいれば有効に機能したであろうアイデアが, 偶然的な理由で, 防御帯として捨てられてしま

う可能性さえあることを示唆する。野口 (2001, 2002) が、誤りを活かす授業を作るにあたって、教師が、学習者に堅い核を意識させ、推測を洗練させるようはたらきかけることが重要であることを指摘しているのは、まさにこのような理由であるからであると考えられる。しかしながら、本研究の得た知見に基づくと、どのような介入が「堅い核を意識させる」に通ずるのかは、簡単には答えられない問題である。

実際、学習者本人が正しくないかもしれないと思っている事柄について、教師が、正しいものであるとして思い留まるよう介入することは、不自然な状況を生み出し得る。本研究の基本的な立場である AM_S の観点から述べるとすれば、堅い核を意識させる介入とは、 AM_S の定義から、真正性を損ねる介入であり得る。授業を作るという視点をより強くして、動機付けに関する仮定を導入したラディカル構成主義に基づいて考えるならば、学習者は、コミュニティに受容されるように最大限合理的に振る舞っているものと見なすことができるので、そうした学習者に対して、正しくないかもしれないと思っている事柄を正しいものと信じようとさせることは、学習者が、数学の内容と改めて向き合う機会を作るというよりはむしろ、学習者が、教師の介入に対して向き合う機会を作っているに過ぎない可能性がある。

これらの議論を総合すると、結局のところ、学習者が堅い核を放棄し始めたら、そのときにはもう、教師による介入は、真正性の回復にとって無力である。そうした介入が功を奏する可能性がないわけではないけれど、理論的には、裏目に出る可能性もまた常に残り続けることになる。これは、介入が成功するかどうかは偶然に依拠した問題であることを意味している。もちろん、次なる研究の方向性として、それが偶然的な問題なのであれば、介入の成功率がどの程度であり、介入する方が合理的であるのか、介入しない方が合理的であるのか、その点を調査するという考え方もある。意図せず手遅れの状況に陥ってしまうこともあるであろうから、そうした調査も必要である。しかしながら、それは後手に回ってしまった場合の話であって、ここで議論すべき、より重要な問題は、先手を打つ方法の議論である。つまり、学習者が堅い核を放棄する前にどんな介入をしておくべきか、ということであろう。

AM_S の確保にとって決定的に重要なことは、教師主導ではなく学習者主導を実現することであるから、今回得られた知見から構成し得る 1 つの介入案として言えることは、教師の意思決定に学習者を追従させるのではなくて、学習者の意思決定を教師がそれとなく

追認する状況を実現することが望ましい，ということである。これは，学習者が自身の形成した堅い核に期待感を持つことができるようになるという意味でも，望ましい。

このことを，今回の例で考えてみよう。今回の事例では，常用対数を用いるという方向性で数学的活動を始めた学習者達を確認することができた。彼らが常用対数を用いようと考えた理由は，決して数学的な理由ではなかったが，常用対数を用いるという方向性それ自体は，教師の目から見て有望な方向性であった。そして，彼らは，単に常用対数を用いるだけでなく，教科書に掲載されている常用対数表を用いるに至ったのであった。このとき，今回の事例において，常用対数表を用いようと考えることができなかった生徒達に対して，教師が常用対数表を用いることを示唆するような指導を行うことはできていなかったが，その反省を踏まえて，どのような指導があり得たかを考えるとすれば，一例として，次のような指導を考えることができる。それは，学習者の意思決定を教師がそれとなく追認する1つの方法として，常用対数表を使用している学習者の存在を教室全体に知らせる，という方法が考えられる。常用対数表を使用するように直接指導するのではなく，ただ単に，「常用対数表を使っている人達がいるね」と，常用対数表に着目した学習者が存在したことを知らせるのである。この方法は，常用対数表に着目することができていた学習者と注目することができていなかった学習者の両方に効果があると考えられる。

まず，前者に対しては，自分達の着目していた方法知が何であったのかを認識させる手助けとなり得る。彼らが堅い核と防御帯とを曖昧にし得る理由は，自分達の前提が，暗黙的であるがゆえに，明示的に言語化することができない，という点にあると考えられるが，常用対数表に着目した学習者の存在を知らせることは，常用対数表に着目することを明示的に言語化する働きがある。

例えば，図 6.5 の仮説的学習軌道で，時刻 t_6 において，常用対数表で 16.254 を探したが見つからない，という場面がある。この場面において，学習者達は，「常用対数が 16.254 となる真数を探す」というアプローチを採用していることになるが，そのアプローチは失敗に終わるわけである。しかしながら，教師にとっては，学習者達がこのアプローチを，次の2つに分けて認識していることが期待される。

A1 常用対数表を用いるというアプローチ。

A2 常用対数表で 16.254 という数値を探すというアプローチ。

このとき、A1 は、A2 の前提となるアプローチではあるが、A2 の失敗が、A1 の失敗をも意味するとは限らない。第2章で知識観を議論した際にも論じたように、認識主体は、環境の制約に反しない限り好き勝手に知識を構成することができてしまうから、A2 の失敗が、A2 と A1 の両方の生存可能性を低下させることに繋がるか、A2 のみの生存可能性を低下させ、依然として A1 については生存可能性を維持することに繋がるかは、認識主体の完全な主観的な判断に委ねられる問題である。

この主観的な判断に教師が直接的に介入することは原理的に不可能である。例えば、教師が「常用対数表を用いよ」と学習者達に指示したところで、学習者達は、16.254 が見つからないことを理由に、「常用対数表を使えって言われても、16.254 がないではないか」と、常用対数表を用いよと述べたことが、かえって常用対数表の使用が上手く機能しないことを際立たせてしまう可能性さえある。一度この状況を招いてしまうと、学習者達にとって、その数学的活動は、「常用対数表を使用する」というアプローチを有望視していないにもかかわらず、教師によって推進される状況であり、真正性が損なわれている状況であると言える。

その点、常用対数表の使用を追認するという形であれば、常用対数表に着目していた学習者達に対して、[A1] と [A2] の分離を自然と示唆するとともに、[A1] を適用するところまでは、自分達の意味決定が教師によって承認されたという印象を与えることができる。これは、RCMA の仮定に基づけば、常用対数表の使用の生存可能性が一層高まる状況を作り出すことに成功していると考えられ、常用対数表に 16.254 が載っていないという自体に直面した際に、疑いの眼差しを、[A1] に向けにくくする効果があると考えられる。加えて言えば、この状況で学習者達が次に陥り得る状況は、「16.254 が載っていないではないか」や「0 以上 1 未満しか載っていないではないか」といった攪乱であると考えられ、この攪乱を調節するための方向性として、16.254 でなければ何とかなるかもしれないという、[A2] を否定する流れになることが見込まれる。また、仮に疑いの眼差しが [A1] へ向いたとしても、「常用対数表を用いればよいはずなのに、常用対数表を用いて解けないではないか」という、攪乱状態に陥ると考えられるから、教師がその状態に陥っている学習者を発見することができたならば、「なぜ解けないと思った？」と発問してやることで、「16.254 が載っていないから」という答えを引き出すことができるであろう。したがって、いずれの場合であっても、「では、何だったら載っているだろうか？」という形で、載っ

ている範囲の数値に帰着させることを検討させるような発問を投げかけることによって、暗黙的に [A1] を堅い核に据えさせることに成功することができると見込まれる。

一方、常用対数表を使用している学習者の存在を知らせることは、常用対数表に着目できなかった学習者に対しても効果がある。そうした学習者達にとって、常用対数表を使用している学習者の存在を知ることは、常用対数表を用いると何らかの形で解決することができるということの傍証であり、それを堅い核に据える1つの契機となり得る。教師に常用対数表を使用するよう促される場合と決定的に異なる点は、同じ条件下で問題解決を始めたにもかかわらず、常用対数表に注目することで解決の糸口を掴んだ同級生が存在するという情報が与えられている点である。教師によって使用を促された場合は、学習者に対して、「そんなアプローチ、思い付くわけではないではないか」という思いを抱かせる可能性があるけれど、他の同級生がそのアプローチを採用しているという情報を与えられた場合は、少なくとも同級生は同じ条件下でそのアプローチを思い付くことができている、ということであるから、「そんなアプローチ、思い付くわけではないではないか」という思いを抱く可能性を低減することができる。また、RCMAの仮定より、自分もそのアプローチを採用することによって、この問題を解決した状態に近づこうという動機が発生すると考えられるため、常用対数表に着目できていなかった学習者に対しても、次の問題解決の段階へ進む契機を与えることができる。なお、常用対数表に着目することこそできていなかったが、そうした学習者であっても、16.254を16と0.254に分解し得ることに気付くことに関しては、常用対数表に着目していた学習者よりも速い可能性がある。そういう意味で、この支援方法であれば、個々の学習者にとって必要な場面で、必要な分だけ介入することが可能となる。

以上の考察から、

- その数学的活動における支援の在り方として、学習者の意思決定を教師がそれとなく追認するために、学習者のどんな意思決定を追認するか？

を予め検討しておくことは、授業を設計するためのヒューリスティックスの1つに加えることができよう。学習者の意思決定を教師が追認することは、漠然とした期待感を抱くことのできる堅い核を、学習者が暗黙的に形成することを支援し得る。特に、学習軌道上の要支援箇所を特定することと合わせて検討しておくことで、要支援箇所を乗り越えること

ができた学習者達の行為を追認するという形を取ることができるようになるであろう*5。

■複数の堅い核の発生可能性とその通約不可能性

教室において複数の堅い核が発生し得るということと、それらが互いにコミュニケーションを取る必要性に駆られないという問題は、授業運営上、いささか厄介な問題である。それは、学習者に対する介入の仕方が複雑に複雑化するということを意味しているから、授業中における教師の負担が大きくなることを意味している。しかしながら、複数の堅い核が発生し得るということさえわかっているならば、対処が可能な問題でもある。つまり、教師が、自身の力量を鑑みて、複数の堅い核を許容しながら授業運営をできると考える場合であれば、各堅い核に対して、それぞれどのように支援するのかを予め決めておけばよいし、そうでない場合であれば、可能な限り単一の堅い核に収束するよう、事前に教材を練っておけばよい。例えば、 2^{54} の場合であれば、もっと指数を大きくして、 2^{100} 等、誰もが計算しようとは思えない数値設定にすればよいのである。

とは言え、もちろん、第5章の事例の場合で言えば、 2^{54} という数値設定は、当該授業を担当した教師にとって、誰もが計算を諦めるであろうと見込んでいた数値設定ではあった。そういう意味では、一部の学習者達が 2^{54} を計算可能な問題として捉えたことは、想定外であった。完全に学習者の立場になりきるということは、難しいことであるから、こういった想定外の事態というのは、常に起こり得る。真正性を維持するという観点から言えば、学習者が自ら選択したアプローチを、教師の意思決定によって棄却させることは望ましいことではない。そうした学習者は、他の堅い核とコミュニケーションすることの必要性を感じないのであるから、教師が他のアプローチを示唆したところで、そうした学習者は、聞く耳を持たないか、真正ではない数学的活動に移行するかのどちらかとなってしまふ。

数学的には、本質的に異なる方法での解決が得られるということは、価値のあることであると考えられるから、たとえ教師が対数を用いた解決を期待する場合であっても、学習者が自ら選んだアプローチで自ら解決を導いた場合であれば、数学の教室コミュニティと

*5 「心理的負担と堅い核の関係性」の議論においては、 $\log_{10} X + \log_{10} Y = \log_{10} XY$ を柔軟に用いるということが、要支援箇所になり得るということであつたから、この等式を柔軟に使用できている学習者が一部であり、多くの場合は柔軟に使用できていない、という状況であれば、この等式を使用している学習者の存在を教室全体に知らせることは、1つの有望な支援方法となり得るであろう

しては、その努力を積極的に承認してやるべきであろう。したがって、少なくとも言えることは、すべてを想定しきることは現実的に困難であり、想定外の事態に対してどのように立ち居振る舞いするのかを、予め授業設計の段階で検討しておかなければならない、ということである。

以上より、次のヒューリスティックスが示唆される。

- その数学的活動においては、複数の堅い核が発生する可能性をどの程度許容するか？出現した堅い核ごとに、どのように対応するか検討しているか？また、想定外の堅い核が生じた場合に、どのように対応するか検討しているか？

5.4 授業設計のヒューリスティックスの形成

本節で議論したヒューリスティックスを列挙すると、以下のようにまとめることができる。

- その数学的活動に関するクリスタリン・コンセプトの形成状態、および、それに関連するクリスタリン・コンセプト的思考の生存可能性の程度は、これまでの授業における学習者達の状況から、どのように推定されるか？
- その数学的活動において、そのクリスタリン・コンセプト的思考を発揮しなければならない場面は、仮説的学習軌道上におけるどの箇所であるか？
- その数学的活動における支援の在り方として、学習者の意思決定を教師がそれとなく追認するために、学習者のどんな意思決定を追認するか？
- その数学的活動においては、複数の堅い核が発生する可能性をどの程度許容するか？出現した堅い核ごとに、どのように対応するか検討しているか？また、想定外の堅い核が生じた場合に、どのように対応するか検討しているか？

6 第6章のまとめ

本章では、授業設計のためのヒューリスティックスを明示的に言語化したものを授業設計のための理論的枠組として捉え、4つの分析、

- 教科書に基づく数学的活動の分析
- 全国学力・学習状況調査に基づく数学的活動の分析
- 本研究の提案する理論的枠組からの理論的帰結の分析
- 本研究が収集した経験的データから得られる示唆の分析

を通じて、授業設計のためのヒューリスティックスを導出し、それらを理論的枠組として定式化した。

具体的には、次を得た。

- その数学的活動は、個人による試行錯誤の過程を含み得るか？
- その数学的活動は、試行錯誤を通じて、1つ以上の答えの候補を自分の力で発見できたと感じられるような過程を含み得るか？
- その数学の授業は、「数学的活動を通じて」と称しながらも、単に他者から示唆された答えの候補の妥当性を確認するだけの活動になっていないか？
- その数学的活動は、その活動目的が、新しく学習する数学的な方法知の使用それ自体になってしまっていないか？
- その数学的活動は、新しく学習する数学的な方法知の使用が、その活動目的を合理的に達成するための自然な方法として位置付き得る活動であるか？
- その数学的活動は、学習者が、試行錯誤の末、その活動目的を合理的に達成するための自然な方法として、新しく学習する数学的な方法知の使用を発見することができるような活動であるか？
- その数学的活動は、その活動を通じて学ぶことが目標とされる方法知が明確である

活動か？

- その数学的活動において、学習者を支援するための発問行為を設計したか？
 - その数学的活動において起こり得る学習軌道の1つとして、学習目標となる方法知の使用を含む仮説的学習軌道を、基準学習軌道として考案し、それをIDCモデルによって表現したか？
 - IDCモデルによって表現された基準学習軌道を、「注意の移行」という観点から精査し、要支援箇所を特定したか？
 - 教科書の読解を通じて仮説的学習軌道を構成し、基準学習軌道と比較したか？
 - 教師による発問行為の後、学習者が自らの置かれた社会的状況をどのように解釈するかをRCMAを用いて推定し、その発問行為の妥当性を評価したか？
- その数学的活動に関するクリスタリン・コンセプトの形成状態、および、それに関連するクリスタリン・コンセプト的思考の生存可能性の程度は、これまでの授業における学習者達の状況から、どのように推定されるか？
- その数学的活動において、そのクリスタリン・コンセプト的思考を発揮しなければならない場面は、仮説的学習軌道上におけるどの箇所であるか？
- その数学的活動における支援の在り方として、学習者の意思決定を教師がそれとなく追認するために、学習者のどんな意思決定を追認するか？
- その数学的活動においては、複数の堅い核が発生する可能性をどの程度許容するか？出現した堅い核ごとに、どのように対応するか検討しているか？また、想定外の堅い核が生じた場合に、どのように対応するか検討しているか？

この理論的枠組を数学の授業設計の途中で参照することで、授業設計者は、設計途中の授業の妥当性を反省することが可能になるとともに、より良い授業となるように改良するための視点を得ることが可能となる。ただし、上述のリストは、あくまでも理論的枠組である。

Lesh & Caylor (2009) が数学的問題解決のヒューリスティックスに関する先行研究を整理しながら論じているように、ヒューリスティックスのリストは、短過ぎると一般的過ぎて有用とは言い難く、長過ぎると各々の項目をいつ使うかを理解することが負担となり得る。この観点から見たとき、上記の理論的枠組は、人間が暗記して使うには、いささか長

いと考えられるから、すぐに使用可能なヒューリスティックスとは言えないであろう。すなわち、本研究は、ヒューリスティックスを理論的枠組として定式化することには成功したものの、現実はこの理論的枠組を効果的に運用するためにどのような工夫が必要であるかについては、本研究においては未解明のままであると言える。しかしながら、数学的問題解決のヒューリスティックスとは異なり、あるいは、授業運営のヒューリスティックスとも異なり、授業設計のヒューリスティックスは、リアルタイムでの機敏な判断を要求される場面で使用するヒューリスティックスではない。必要であれば、上記のリストを暗記しなくても、チェックリストとして時間をかけて参照することが可能なリストである。現実には毎日の授業設計に利用するためには、多少の簡略化が求められるかもしれないが、ある程度時間をかけて、より良い一時間の授業を設計するという目的の下では、上記のように多数列挙された状態でも、十分に実用に耐え得ると考えられる。

第6章の引用・参考文献

- Aizikovitsh-Udi, E., Clarke, D., & Star, J. (2013). Good questions or good questioning: An essential issue for effective teaching. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.2908-2916). Antalya.
- Cobb, P. (2002). Theories of knowledge and instructional design: a response to Colliver. *Teaching and Learning in Medicine*, 14(1), 52-55.
- Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work: Coping with multiple theoretical perspective. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*(Vol. 1, pp. 3-38). Information Age Publishing.
- Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2012). Tool Use and the Development of the Function Concept: From Repeated Calculations to Functional Thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(6), 1243-

1267.

Ernest, P. (1998b). Mathematical knowledge and context. In A. Watson (Ed.), *Situated Cognition and the Learning of Mathematics* (pp. 13-31). Oxford: Centre for Mathematics Education Research.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A “Proceptual” View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116-140.

国立教育政策研究所 (2015). 『平成 27 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 (中学校 数学)』 . Retrieved from <http://www.nier.go.jp/15chousa/15kaisetu.htm>

ラカトシュ I. (1986). 『方法の擁護：科学的研究プログラムの方法論』 (村上陽一郎・井山弘幸・小林傳司・横山輝雄 訳). 新曜社.

Lesh, R., & Caylor, B. (2009). Differing conceptions of problem solving in mathematics education, science education, and professional schools. In L. Verschaffel, B. Greer, & W. V. Dooren (Eds.), *Words and Worlds: Modelling Verbal Descriptions of Situations* (pp. 333-350). Sense Publishers.

Mason, J. (1989). Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 2-8.

Mason, J. (2014). Questioning in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp.513-519). Springer Netherlands.

文部科学省・国立教育政策研究所 (2013). 『平成 25 年度 全国学力・学習状況調査 報告書 中学校 数学』 . Retrieved from <https://www.nier.go.jp/13chousakekkahoukoku/index.html>.

野口勝義 (2001). 「「誤り」を生かす数学の授業に関する研究 (III): 反例の扱い方に対する示唆」. 日本数学教育学会『数学教育論文発表会論文集』, 34, 67-72.

野口勝義 (2002). 「「誤り」を生かす数学の授業に関する研究：実験授業の実践的検討」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 8, 119-128.

布川和彦 (2014). 「中学校数学における関数の対象としての構成：教科書の考察を中心に」. 『上越教育大学研究紀要』, 33, 85-96.

岡本和夫他 (2012). 『未来へひろがる数学 1』 . 啓林館.

- ポリア, G. (1954). 『いかにして問題をとくか』 (柿内賢信 訳). 丸善出版.
- 清水美憲 (2012). 「評価問題作成における数学的なプロセスへの焦点化：全国学力・学習状況調査 (中学校数学) の動向と課題」. 日本数学教育学会誌『数学教育』, 94(9), 30-33.
- 清水美憲 (2015). 「数学教育カリキュラムにおける「数学的方法」の位置」. 日本数学教育学会『第3回春期研究大会論文集』 (pp. 173-178).
- Smith, J. P., diSessa, A. A., & Roschelle, J. (1994). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences*, 3(2), 115-163.
- 高橋陽一郎他 (2011). 『数学 I』. 啓林館.
- Tall, D. (2011). Crystalline concepts in long-term mathematical invention and discovery. *For the Learning of Mathematics*, 31(1), 3-8.
- Thompson, P. W. (2000). Radical Constructivism: Reflections and Directions. In L. P. Steffe & P. W. Thompson (Eds.), *Radical Constructivism in action: Building on the Pioneering Work of Ernst von Glasersfeld* (pp. 291-315). Routledge.
- Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundation of mathematics education. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 45-64). Morelia, Mexico.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.

第7章

結論

本章では、本研究の成果をまとめるとともに、研究方法3として、真正な数学的活動を実現するための哲学を論究する。

1 これまでのまとめ

本研究は、次を研究目的とした。

[研究目的] 教室において真正な数学的活動を実現するために必要な哲学とは何かを論究すること

その上で、次の2つを下位目的として設定し、研究を進めてきた。

[下位目的 1] 教室において真正な数学的活動を実現するための研究に必要な科学的基盤を明らかにすること

[下位目的 2] 教室において真正な数学的活動を実現するための授業設計ヒューリスティックスを開発すること

まず、下位目的1については、第1章から第5章にかけて取り組んできた。以下、章ごとの成果を整理しよう。

第1章においては、真正な数学的活動に関連する先行研究の中から、特に哲学的な研究を取り上げ、概観するとともに、次の3点を明らかにした。第一に、哲学の役割とは、専門的問題領域の境界設定を問い直し、脱個人化を志向する根源的反省であり、真正な数学的活動の哲学も、その役割を担わなければならない。第二に、真正な数学的活動は、少なくとも、学習者の活動(特に思考)が学習者の経験からの創出されている程度を問題とする AM_S と、学習者の活動が専門家(例えば、数学者)の実践と類似している程度を問題とする AM_P という、2つの観点からの議論が必要であり、前者を追究するためには、von Glasersfeld (1995b) のラディカル構成主義の哲学が必要である。この哲学は、学習者が産み出したものは、学習者の視点から見れば、すべて正統な活動の所産であると見なし得ると仮定することで、数学教育研究者が、学習者が何に本物感を見出しているのかを推定することを支援する哲学である。第三に、 AM_S の観点をさらに追究するにあたっては、より精緻に、ラディカル構成主義の役割と限界を明確化することによって、初めて議論することが可能となる。

第2章においては、ラディカル構成主義の役割と限界を明確化することを通じて、真正な数学的活動を議論する際に有用な学習観を理論的枠組として定式化した。ここでは特に、ラディカル構成主義の学習観を理解する上で重要な6つの概念、知識・生存可能性・同化・攪乱・調節・行為シエムを定式化するとともに、授業を設計する際に有用な哲学として、Radford (2008) の理論観に基づいて以下のように記述される哲学「動機付けに関する仮定を導入したラディカル構成主義」(RCMA)を提案した。RCMAとは、ラディカル構成主義に対して、レイヴ & ウェンガー (1993) の正統的周辺参加論が示唆する動機付けに関する仮定を追加した理論であり、

- (P) 共同体の一部となるために学習者なりに合理的に振る舞うものであると仮定することで、
- (M) 仮設定された学習指導の計画に関する情報から、
- (Q) 「各学習者がどのように反応し得るか」、そして、「その反応に合わせてどのような追加の指導を計画すべきか」を明らかにしようとする

理論である。

第3章では、ラディカル構成主義も RCMA も、いずれも数学に固有な社会・文化的側面を特徴付けるための枠組を有していないことから、Tall (2011) のクリスタリン・コンセプト論を参照し、ラディカル構成主義や RCMA の下で説明可能な数学の固有性の特徴付けを行った。これは、すなわち、個人による数学的活動の本性を特徴付ける試みである。具体的には、数学的活動とは、構造に基づいて、ある事柄がたまたまそうであった(偶然的に真である)のではなく、必ずそうでなければならなかった(必然的に真である)ことを追究する営みとして捉えることができる点を指摘した。

第4章では、数学の授業を設計するために、当該授業において個人の数学的思考がどのように展開され得るかを想定することが必要であることから、構成主義の仮説的学習軌道論(Simon, 1995)を基盤としながら、個人による数学的思考を表現するための枠組として、IDCモデルを提案した。このモデルは、具体化(Instantiation)と記述(Description)の連鎖(Chain)によって個人の数学的思考を表現しようとするモデルであり、

- 数学的活動の本性を反映した表現方法でありながら、
- 数学的問題解決における個人の数学的思考について、数学的に洗練された思考もそうでない思考も、どちらも表現し得、
- その学習軌道をたどる上で、洗練されていない学習者がどこでつまずき得るかを表現し得る

という特徴を有する。また、このモデルは、認識させたい数学的对象と認識している数学的对象を同じ表現形式で取り扱うことを可能にするモデルであるとともに、Mason (1989)の言う「注意の移行」というアイデアに基づいて、数学の授業における発問行為の設計に有用な視点を提供するモデルである。

第5章では、数学的活動を記述するための、ラカトシュ(1980)の「証明と論駁」に替わる理論的枠組として、ラカトシュ(1986)の「科学的研究プログラムの方法論」に基づく理論的枠組を提案するとともに、サンプル分析を通じて、その枠組を使用した実際の経験的データの収集を行った。より具体的に言えば、「科学的研究プログラム」がラディカル構成主義における「行為シエム」の一種であることから、逆に、科学的研究プログラムの評価に用いられる「堅い核」と「防御帯」というアイデアを援用することで、「行為

シエム」を伴う数学的活動を評価することができるが見込まれた。そのため、科学的
研究プログラムを評価する基準である「前進的問題移動」と「退行的問題移動」という2
つのラベルが、数学的活動を評価する基準としても用いることができると考えられた。ま
た、サンプル分析を合わせて実施することによって、数学的活動の実際的评价の方法を示
すとともに、収集した経験的データから、主として次の5点について示唆を得た。

- 各学習者は、自分にとって心理的負担が少ないアプローチを堅い核として構成する
傾向にあること
- どこまでが堅い核でどこからが防御帯であるかという境界線は、必ずしも明確では
ないこと
- 前進的に問題移動するためには、自身の堅い核に対して漠然とした期待感を持ってな
ければならないこと
- 教室内にいるすべての学習者が、単一の堅い核を構成するという状況を仮定できな
いこと
- 異なる研究プログラム同士は、コミュニケーションをする必要性が生じないこと

次に、下位目的2については、第6章においてにおいて取り組んだ。ここでは、4つの
分析、

- 教科書に基づく数学的活動の分析
- 全国学力・学習状況調査に基づく数学的活動の分析
- 本研究の提案する理論的枠組からの理論的帰結の分析
- 本研究が収集した経験的データから得られる示唆の分析

を通じて、授業設計のためのヒューリスティックスを表現した理論的枠組として、次を
得た。

- その数学的活動は、個人による試行錯誤の過程を含み得るか？
- その数学的活動は、試行錯誤を通じて、1つ以上の答えの候補を自分の力で発見で
きたと感じられるような過程を含み得るか？
- その数学の授業は、「数学的活動を通じて」と称しながらも、単に他者から示唆さ

れた答えの候補の妥当性を確認するだけの活動になっていないか？

- その数学的活動は、その活動目的が、新しく学習する数学的な方法知の使用それ自体になってしまっていないか？
- その数学的活動は、新しく学習する数学的な方法知の使用が、その活動目的を合理的に達成するための自然な方法として位置付き得る活動であるか？
- その数学的活動は、学習者が、試行錯誤の末、その活動目的を合理的に達成するための自然な方法として、新しく学習する数学的な方法知の使用を発見することができるような活動であるか？
- その数学的活動は、その活動を通じて学ぶことが目標とされる方法知が明確である活動か？
- その数学的活動において、学習者を支援するための発問行為を設計したか？
 - その数学的活動において起こり得る学習軌道の1つとして、学習目標となる方法知の使用を含む仮説的学習軌道を、基準学習軌道として考案し、それを IDC モデルによって表現したか？
 - IDC モデルによって表現された基準学習軌道を、「注意の移行」という観点から精査し、要支援箇所を特定したか？
 - 教科書の読解を通じて仮説的学習軌道を構成し、基準学習軌道と比較したか？
 - 教師による発問行為の後、学習者が自らの置かれた社会的状況をどのように解釈するかを RCMA を用いて推定し、その発問行為の妥当性を評価したか？
- その数学的活動に関するクリスタリン・コンセプトの形成状態、および、それに関連するクリスタリン・コンセプト的思考の生存可能性の程度は、これまでの授業における学習者達の状況から、どのように推定されるか？
- その数学的活動において、そのクリスタリン・コンセプト的思考を発揮しなければならない場面は、仮説的学習軌道上におけるどの箇所であるか？
- その数学的活動における支援の在り方として、学習者の意思決定を教師がそれとなく追認するために、学習者のどんな意思決定を追認するか？
- その数学的活動においては、複数の堅い核が発生する可能性をどの程度許容するか？出現した堅い核ごとに、どのように対応するか検討しているか？また、想定外の堅い核が生じた場合に、どのように対応するか検討しているか？

こうした成果を踏まえ、残るは、真正な数学的活動を実現するための哲学を論究するのみとなった。次節では、その最後の考察に取り組む。

2 真正な数学的活動を実現するための哲学の論究

本研究は、真正な数学的活動を、 AM_S および AM_P の両立という観点から目指すものであった。そのため、本研究は、真正な数学的活動を実現するための哲学を論究するという研究課題を、 AM_S および AM_P がそれぞれ何であったのかという反省から取り組み始めなければならぬ。

2.1 「学習者第一／専門性第二」の哲学

本研究が第0章において Weiss, Herbst, & Chen (2009) に基づいて規定したところによれば、 AM_S とは、学習者の活動 (特に思考) が学習者の経験から創出されている程度のことであり、 AM_P とは、学習者の活動が専門家 (例えば、数学者) の実践と類似している程度のことであった。本研究は、 AM_S と AM_P の両立を考えるにあたって、 AM_S を優先的に考慮するという立場を取った。この「学習者第一／専門性第二」とでも呼べる価値観は、真正な数学的活動を実現するための哲学が備えるべき価値観の1つである。

AM_S と AM_P の意味を改めて反省するとき、これらは、数学教育において目指されるべき2本柱として記述することが可能である。まず、かつて Skemp (1976) が、根拠なしに手続きを理解している状態を表す道具的理解 (instrumental understanding; rules without reasons) と、根拠と手続きの両方を理解している状態を表す関係的理解 (rational understanding; both rules and reasons) を提唱したように、ある学習者がある場面で正しく振る舞っているからと言って、その学習者が、その振る舞いの妥当性を理解しているとは限らない。また、これに加えて Sfard (1991) が第三の可能性として指摘したように、直観的には理解できているが、正しく振る舞うことができないという理解の状態 (reasons without rules) ^{*1} も合わせて想定することは重要である。この三項関係からの類推で AM_S

^{*1} 例えば、ある角が直観的に直角であるとはわかるが、実際に直角であることを導出できない場面などがこ

と AM_P を捉え直すならば、 AM_S とは学習者が自ら内容について思考しながら活動している場合 (reasons) であり、 AM_P とは学習者が専門家と類似した様相で活動している場合 (rules) である。そして、本研究が実現を目指した AM_S と AM_P の両立とは、数学教育研究が歴史的に重要視してきた根拠と手続きの両方 (both rules and reasons) という状態にほかならない。本研究は、この理想を、単に計算や証明という特定の場面における根拠と手続きに限定せず、多様な要素が入り込み得る数学的活動全般に押し広げようとしたものである。

この2つの真正性に対して、本研究は、 AM_S を基礎に据える考察を行ってきた。その理由は、教育が何らかの意味で学習者に作用することを目的とする営為であるならば、少なくとも、学習者の受け取り方を考慮した真正性が必要である、というものであった。ただ、第0章ではこのような形で述べることはできなかつたこの理由も、第2章以降、レイヴ & ウェンガー (1993) の正統的周辺参加論の視点を取り入れた今なら、より洗練された形で述べることができる。真正な数学的活動を考える上で AM_S を優先的に考えるべき理由は、次の通りである。すなわち、頭の中で展開される数学的思考は、熟達者のやり方を見よう見真似で簡単に模倣できるような性質のものではないから、である。そのため、熟達者の振る舞いを模倣することから始めて、徐々にその合理性に気付いていくという、 AM_P から AM_S へと向かう方向性に期待を寄せることは難しく、学習者なりに合理的に振る舞うことから始めて、徐々に熟達者の振る舞いに接近していくという、 AM_S から AM_P へと向かう方向性に期待を寄せなければならないのである。

本研究は、ありとあらゆる種類の学習が、 AM_S から AM_P へと向かうべきであると主張するものではない。本研究は、数学の学習だからこそ、 AM_S から AM_P へと向かう方向性が、すなわち、「学習者第一／専門性第二」の哲学が必要であると主張するものである。これは、決して専門性を軽視するという意味ではなくて、結果的に専門性を重視するためには、「急がば回れ」の精神が必要であることを指摘するものである。

2.2 局所的プラグマティズムと大局的プラグマティズム

学習者第一という立場に立ち、本研究は、von Glasersfeld (1995b) のラディカル構成主義に着目した。まず、第2章で定式化したように、ラディカル構成主義は、非形式的な方法知の生存可能性に着目する哲学である。これは、ラディカル構成主義が、プラグマティズムの一種であることを示している。この「プラグマティズム」という語について、von Glasersfeld (1995b) は、プラグマティズムの歴史を概観しながら、「プラグマティズムは、『真理とは、上手く機能するもの〔what works〕である』と宣言する運動として知られるようになった」(p. 43, 括弧内原語)とまとめている。歴史的に一部の哲学者達が行ってきたような、「真理」という語を「上手く機能するもの〔what works〕」という意味で置き換える試みの是非についてはひとまず置くとして、この「上手く機能する」という観点は、真正な数学的活動を実現するための哲学において必要不可欠な観点である。

まず、重要な前提として、明らかに、人が実際に経験したことがない事柄に対して適切な意思決定を実行できるようになるためには、教育が必要である。そのため、教育を受ける前の学習者達が、何らかの意思決定を迫られた際、完全にランダムに意思決定をするのではなく、多かれ少なかれ思考した上で意思決定をしているとすれば、彼らを取り得る唯一の思考方法は、過去の自分の経験から最も上手く機能するであろうと見込まれる選択肢を選ぶことである。これこそが、まさにラディカル構成主義の仮定であり、その選ばれた選択肢が、生存可能性という概念で評価されるのであった。数学教育は、こうした思考特性を有する学習者の現実を一旦認めた上で、学習者達に、よりよい意思決定を行う力を授けなければならない。

次に、先の前提からの自然な帰結として、次を挙げることができる。すなわち、学習者達は、どんなに数学的・科学的に洗練された意思決定力を身に着けたとしても、完全に「上手く機能する」思考から脱却できるようになるわけではない。第1章で科学と哲学の役割を論じた際に指摘したように、数学的・科学的に妥当な意思決定ができる場面というのは、問題領域が極めて厳密に制限されている場面に限られる。未だ定式化されていない問題場面や、再定式化が必要となった問題場面において、結局のところ人は、過去の経験から最も上手く機能すると見込まれる選択肢を取らざるを得ず、「上手く機能する」思考に頼らざるを得ないである。しかしながら、もちろん、だからと言って、数学的・科学的

に妥当な意思決定をする力を育まなくてもよいということにはならない。学習者が、「局所的に上手く機能する」という思考の限界を認識し、問題領域を可能な限り数学的・科学的に定式化する努力をするとともに、自分自身の過去の経験のみならず、人類の過去の経験に照らし合わせ、長期的な視点で「上手く機能する」選択肢を採択できるよう、我々は数学教育を営まなければならない。

数学的に十分教育された後のみを考えるのであれば、我々はプラグマティズムを必要としないであろう。しかしながら、真正な数学的活動を実現するための哲学としては、活動に従事する前の状態と後の状態の両方を考える必要がある。そのため、学習者第一の哲学の自然な延長として、真正な数学的活動を実現するための哲学は、その根底にプラグマティズムを据えることによって、初学者が陥りがちな「局所的に上手く機能する」思考を理解し、その思考特性を上手く逆手に利用することで、学習者達が数学的思考という「より大局的に上手く機能する」思考の重要性に気付くことができるように彼らを導いてやることを目指すべきである*2。

そういう意味で、ラディカル構成主義や RCMA のような局所的プラグマティズムが真理の存在を仮定しないということは、数学教育の目的を鑑みれば、まったくもって正しいことである。なぜなら、数学教育は、数学的真理の存在が学習者達にとって自明ではないという制約の中で、その存在を学習者達に実感させる方法を考えなければならないからである。本研究が第3章で明らかにしたところによれば、個人による数学的活動の本質とは、「数学的構造に基づいて必然性を追究する」ということであった。この数学的活動観は、Goldin (2003) が主張するような数学の真理観と整合的な見方である。そのため、学習者達は、数学的構造に基づいてある命題が必然的に真であると納得する過程によって、真理の存在もまた必然的であるように感じられ、Goldin (2003) が主張するような意味での「真理」を実感できると考えられる。したがって、真正な数学的活動を実現するための哲学は、真理の存在について否定も肯定もしないが、学習者が真理の存在を実感できるよ

*2 ここでいう「局所的」と「大局的」の区別は、相対的なものである。ここでの主張は、数学的思考が絶対的に大局的であるということが意図されているわけではない。何らかの数学的思考を活用している場合であっても、文脈によっては、その活用が局所的にしか上手く機能しない場合もあり得るであろうし、逆に言えば、数学的に思考しない方がかえって大局的に上手く機能することもあるであろう。しかし、数学教育を受ける前の学習者は、総じて、非数学的な思考によって局所的にしか上手く機能しない振る舞いをする傾向にあるから、我々は、そうした思考を数学的に洗練してやることにより、大局的に上手く機能する思考が身につけられるよう導いてやるべきであろう。

うにするために、数学的構造に基づく必然性の追究を学習者に経験させる必要性を主張しなければならない。

第1章で考察したように、哲学の役割とは、脱個人化を志向する絶えざる根源的反省である。そこで、学習者の「局所的に上手く機能する」思考を理解するために実施される根源的反省のガイドラインとなる哲学を「局所的プラグマティズム」、「大局的に上手く機能する」思考である数学的思考の本性を理解するために実施される根源的反省のガイドラインとなる哲学を「大局的プラグマティズム」と呼ぶことにしよう。このとき、真正な数学的活動を実現するための哲学は、局所的プラグマティズムと大局的プラグマティズムの両方を適切に使い分けることが必要であると言える。真正な数学的活動を実現するための数学教育は、学習者達にとって真理の存在が自明でないということを前提に、数学的構造に基づいて必然性を追究することが学習者にとって「上手く機能する」方法知であるということを実感させなければならないであろう。

2.3 メタ哲学としての大局的プラグマティズム

本研究は、真正な数学的活動を教室で実現することに寄与するため、第6章において、授業を設計するためのヒューリスティックを開発した。授業設計のヒューリスティックに着目した理由は、どんな教師がどんな学習者を相手にしても成功が保証される「授業方法」を開発することが原理的に不可能であるからであった。しかしながら、第1章で取り上げたように、科学が、明確に境界が設定された専門的問題領域における問題解決方法を開発し得る営みであるとするれば、成功が保証される授業方法の開発が不可能であるという事実は、数学教育学が、ある側面においては完全な科学になることができないということを示唆する。

もちろん、専門的問題領域を明確に境界設定するという科学の原則に倣い、「ある条件 C_1 を満たす教師がある条件 C_2 を満たす学習者を相手にすれば、成功が保証される」という条件付きの知見を得ようとするならば、数学教育学も、完全な科学としての条件を満たし得る。しかしながら、ある学問が完全な科学であるということと、その学問が意味のある科学であるということは、必ずしも一致しない。実際、2条件 C_1, C_2 が厳しすぎて、それらを満たす教師や学習者が、世界中探し回ってもほとんど見つからない、というような事態になったとすれば、「条件 C_1 を満たす教師が条件 C_2 を満たす学習者を相手にすれ

ば、成功が保証される」という言明が、たとえ完全に科学的に妥当な手続きを経て得られた言明であったとしても、意味がない。

この「意味がない」ということは、簡単に言えば「役に立たない」ということである。平林 (2007) や Wittmann (1995) が指摘するように、数学教育学が矮小なプラグマティズムへ傾倒することは忌避されるべきではあるけれど、その一方で、まったく数学教育実践に寄与しない数学教育研究というものも考え難い。数学教育研究が寄与する先としては、明日の実践でなくとも、5年後、10年後の実践であったり、教室現場での実践というよりは国家レベルでのカリキュラム開発であったりし得るが、数学教育研究は、必ず、何らかの数学教育実践に寄与する見込みを有している。もちろん、研究である以上、失敗がつきものであり、寄与することが見込まれていたにもかかわらず、結果的に十分に寄与できなかったということもあり得るであろう。しかし、いずれにせよ、数学教育研究は、純粋に学問的な理論化を志向する学問であるというよりは、「二重の理論的・実践的特性 [dual theoretic-pragmatic character]」(Sierpinska & Kilpatrick, 1998, p. 527, 括弧内原語) を有する学問である。

このように考えたとき、現実的に意味のあるレベルでの、「条件 C_1 を満たす教師が条件 C_2 を満たす学習者を相手にすれば、成功が保証される」という型の言明を得ることができかどうかについては、懐疑的にならざるを得ない。もちろん、数学教育学を通じて科学的に妥当な言明を得る努力をすることは重要だし、もし数学教育学の一部として、科学的真理を徹底的に追究しようとする研究が存在するならば、本研究は、そうした努力を否定するものではない。しかしながら、少なくとも、本研究が関心を寄せる真正な数学的活動を実現するための哲学としては、違った形での努力が必要である。すなわち、真正な数学的活動を実現するための授業方法を完全に科学的に妥当な研究方法によって確立することは困難であるから、真正な数学的活動を実現するための数学教育研究は、真理を追究する営みではあり得ない。真正な数学的活動を実現するための数学教育研究は、上手く機能するものを追究する大局的プラグマティズムに基づいた営みでなければならない。

前小節で述べたように、真正な数学的活動を実現するための哲学にとって大局的プラグマティズムは、数学的思考の本性を根源的に反省するための役割を果たす哲学であった。これに加えて、大局的プラグマティズムは、真正な数学的活動を実現するための哲学(および、それに基づく数学教育研究)それ自身の発展の方向性を決定するための基本方針と

なる。すなわち、大局的プラグマティズムは、真正な数学的活動を実現するための哲学のメタ哲学として位置付く。

2.4 哲学の具体化：ヒューリスティックスの追究と理論的枠組としての定式化

大局的プラグマティズムが、真正な数学的活動を実現するための哲学のメタ哲学であるならば、真正な数学的活動を実現するための哲学の研究成果は、真正な数学的活動を実現するためのヒューリスティックスでなければならない。真正な数学的活動を実現するための、完全に科学的に妥当な授業方法は、繰り返し述べているように開発することが困難である。そのため、それに替わるものとして、ヒューリスティックスが注目されるべきである。しかしながら、このことは、実施することで高確率で効果が得られるヒューリスティックスを科学的に同定すればよい、ということの意味するわけではない。

ショーン(2001)によれば、教師という専門職は、技術の熟達化を通じて、その実践が自動化するような実践ではなくて、行為しながら反省するような実践である。つまり、教師は、技術的熟達者ではなく反省的实践家である。このことは、どんなに熟達した教師であっても、自分の振る舞いが学習者にどのような影響を与えたのかということ常を反省しながら、次の自分の振る舞いを決定しなければならないということであり、それはすなわち、教師たるもの、自分自身の次の振る舞いを、常に発見的な方法で決定しなければならないということである。数学の教師という専門職は、確かに、学習者に数学的思考を指導する仕事であり、それゆえに教師自身の思考力が問われる職業であるが、その一方で、この職業は、次にどのように振る舞うかを考え続けなければいけない仕事であるという意味でも、教師の思考力が問われる職業なのである。

そのため、例えば、「あるヒューリスティックスを使用した教師は、統計的に有意に成功する」というような言明を得ることに、意味はない。つまり、それなりの人数の教師を、あるヒューリスティックスを使用させる実験群と使用させない統制群とに分け、両群を比較するという研究手法は、意味がない。なぜなら、教師という専門職は、思考力が問われる職業であるから、たとえ統計的に有意であるという実験結果が得られていたとしても、何も考えずに特定のヒューリスティックスを使用するだけでは、指導の成功は見込めない

からである。

本研究が第6章で示した理論的枠組は、教師が次の数学の授業を「考える」際に参考にすることができる理論的枠組である。これは、これ自身が教師の意思決定を支援し得るものであるというだけでなく、そうした意思決定に関わる方法知を、人々の間で共有可能な形態として整理することに成功した。そういう意味で、本研究の研究方法2は、真正な数学的活動を実現するための哲学を導出する一方法として採用されたものであったが、今、この段階で振り返ってみると、研究方法2の成果は、真正な数学的活動を実現するための哲学を1つの具体的な形に体現したものと捉えることができよう。

2.5 全称と確実性の哲学から存在と可能性の哲学へ

局所的プラグマティズムと大局的プラグマティズムを学習者第一の哲学を追究するための補助ツールとして採用し、大局的プラグマティズムをメタ哲学として採用する真正な数学的活動を実現するための哲学は、以上の考察を踏まえると、結局のところ、真理を追究しない哲学であると結論せざるを得ない。しかしながら、このことは、決して真理の存在を否定したり、経験的エヴィデンスの収集を軽視したりする哲学であることを意味するわけではない。

まず、真正な数学的活動を実現するための哲学は、真理の存在を否定しない。例えば、教師が何もしない数学の授業というものを想定しよう。そのような授業において、真正な数学的活動が実現されるはずがない。これは、経験的に検証するまでもなく、おそらくは1つの真理である。真正な数学的活動を実現するために、教師が数学の授業において何かをしなければならないということは、ほとんど自明のことであると思われる。しかしながら、そのような自明な真理は、真正な数学的活動を実現するために実質的に役に立たない。そんなことは言われなくともわかっているわけで、そこで何をするかということが、本来、知りたいことなのである。大局的プラグマティズムは、この点に注目する。前小節までに論じてきたように、大局的プラグマティズムは、真理の存在を否定しないが、真正な数学的活動を実現するために現実的に意味のあるような真理を得ることが、困難であると主張する。現実的に意味のある真理が得られないのであれば、逆に、真理でなくてもよいので、実質的に意味のあるもの(代表的には、ヒューリスティックス)を得ようとする。それが、大局的プラグマティズムの考え方である。

次に、真正な数学的活動を実現するための数学教育研究を進めていく上で、経験的エヴィデンスの収集は重要である。本研究も第5章と第6章で経験的データを分析し、そこから示唆を引き出したように、経験的データをヒューリスティックスの開発に活用することは重要である。その意味で、真正な数学的活動を実現するための数学教育研究の科学的基盤として、真正な数学的活動を実現するための哲学は、経験的エヴィデンスの収集の必要性を強く主張するし、本研究は、そうした経験的データを収集するための理論的枠組として、第4章にて IDC モデル^{*3}を、第5章にて科学的研究プログラムの方法論に基づく理論的枠組を提案した。

ただし、真正な数学的活動を実現するための哲学は、真理を追究しない哲学であるから、この哲学の下で営まれる数学教育研究は、エヴィデンスの取り扱い方が、他の科学とは異なる可能性がある。具体的には、他の科学が、真理を表現した全称命題を正当化するエヴィデンスを収集することができるのに対して、真正な数学的活動を実現するための数学教育研究は、可能性を表現した存在命題を正当化するエヴィデンスが収集できるのみである。

例えば、物理学の場合で言えば、力 F 、質量 m 、加速度 a を適切な条件下で測定したならば、どんなときでもおおよそ $F = ma$ の関係式が成り立つ。科学として、この「どんなときでも」という全称性が重要であり、それを正当化するためにエヴィデンスを大量に収集する必要があるのである。それに対して、本研究は、全称命題を正当化できるほどたくさんの経験的エヴィデンスを、収集することに成功したわけではない。そうではなくて、本研究は、存在命題を正当化するための経験的エヴィデンスを収集したのである。例えば、5章では、教室内にいるすべての学習者が、単一の堅い核を構成するとは限らないことを示した。これは、1つの数学的問題解決活動の中で、2種類の堅い核が観察されたことから主張された内容であった。このことは、「どんなときでも教室において複数の堅い核が出現する」という全称命題を主張しているわけではない。「教室において複数の堅い核が出現した事例が少なくとも1つ存在する」という存在命題を主張したに過ぎない。しかしながら、その存在命題の主張が重要なのである。

^{*3} 本研究では、IDC モデルを直接的に経験的データの収集には活用しなかったが、IDC モデルは、学習軌道を表現するための枠組であるから、実際の学習者の推論の様子を記述するために活用することもまた可能である。

真正な数学的活動を実現するために必要なことは、教師が、授業において複数の堅い核が出現する可能性があるということを事前に認識しておくということと、どんな堅い核が出現したら、どんな対応をすることにしておくかを事前に検討しておくということである。実際、ション(2001)の反省的実践家論を背景に据えるならば、そうした認識と検討が事前にきちんとなされていることが、実際に教師が反省的に振る舞う際の枠組となると見込まれる。そこに、存在命題の価値がある*4。

存在命題は、事実として、高々1つの事例について述べているに過ぎない。しかしながら、その1つの事例の存在が、ヒューリスティックスの開発において決定的に重要である。それは、空想上の生物としてペガサスの特徴を語るよりも、(もし本当にペガサスが実在するのであれば)現実にペガサスを1頭連れてきて、その特徴について語る方が説得的であることと同じである。ペガサスが少なくとも1頭、現実に存在するということがわかれば、2頭目のペガサスをどのように探すかや、見つけた後にどのように対処するかについて、我々が予め考えておくことができることが圧倒的に増大する。それと同じで、ある種の数学教育学的現象について、少なくとも1事例、現実に存在したことがわかれば、次に同様の現象をどのように引き起こすかや、同様の現象が起きた場合にどのように対処するかについて、我々が予め考えておくことができることが圧倒的に増大する。

存在命題に対する経験的エヴィデンスの収集は、科学的発展の大きな第一歩である。ただ、真正な数学的活動を実現するための数学教育研究が他の科学と決定的に異なり得る点は、真正な数学的活動に関する存在命題に対する経験的エヴィデンスの収集に徹するという点である。真正な数学的活動に関する全称命題は、現実的に意味のある命題を得ることが困難であると考えられ、そうであるならば、そもそもそうした命題に対する経験的エヴィデンスの収集も困難である。真正な数学的活動を実現するためには、単一の事例を通じて得られる示唆を最大限導出するとともに、その示唆から、次のどんな数学的活動が起り得るかという可能性を考える努力をしなければならないのである。つまり、真正な数学的活動を実現するための哲学は、全称命題とその確実性を追究する哲学ではなく、存在命題とそこから示唆される次の可能性を追究する哲学を志向しなければならない。このよ

*4 論理的には、 $\exists xF(x) \leftrightarrow \neg \forall x\neg F(x)$ であるから、ある意味で、存在命題は常に全称命題に書き換えることはできる。しかし、 $\neg \forall xF(x)$ は、 $\forall x\neg F(x)$ と同値ではないから、 $\neg \forall xF(x)$ は、ここで意図した意味での(つまり、その正当化に大量の経験的エヴィデンスが必要であるという意味での)全称命題ではない。

うに捉えることによつてのみ、我々は、ラディカル構成主義という哲学を自分自身にも適用することができる。

2.6 まとめ

第0章において研究目的として述べていたように、 AM_W および AM_D という内容としての真正性よりも、まずは AM_S および AM_P という活動としての真正性の実現が追究されるべき課題である。そのため、いかに内容が変化しようとも共通の基礎とならねばならない真正な数学的活動は、 AM_S および AM_P という観点で議論されなければならない。こうした課題意識の下、本研究は、この2観点から見た真正な数学的活動を実現するための哲学が、どのような哲学でなければならないかについてを検討してきた。それは、まとめると、以下のようなになる。

- 真正な数学的活動を実現するための哲学は、「学習者第一／専門性第二」の哲学をその一部に含まなければならない。
- 真正な数学的活動を実現するための哲学は、学習者を理解するための局所的プラグマティズムと、数学的思考の本性を理解するための大局的プラグマティズムをその一部に含まなければならない。特に、数学的真理の存在を自明視せず、大局的プラグマティズムの核として、「数学的活動の本性は、数学的真理に基づいた必然性の追究にある」という数学的活動観が必要である。
- 真正な数学的活動を実現するための哲学、および、それに基づく数学教育研究は、大局的プラグマティズムをメタ哲学として位置付け、自身の方向性を決定する指針としなければならない。
- 真正な数学的活動を実現するための数学教育研究は、その哲学を具体化する1つの方策として、第6章で取り組んだような、ヒューリスティックスの追究と理論的枠組としての定式化に取り組むことを挙げることができる。
- 真正な数学的活動を実現するための哲学は、全称命題とその確実性を追究する哲学ではなく、存在命題とそこから示唆される次の可能性を追究する哲学である。

これが、真正な数学的活動を実現するための哲学である。

3 今後の課題

最後に本節では、今後の課題について述べる。

3.1 真正な数学的活動を実現するための数学教育研究として

本研究は、真正な数学的活動を実現するための哲学を論究するための1つの方法として、具体的に真正な数学的活動を実現するための数学教育研究を試みた。本研究では、そうした試みを通じて、本章第1節で整理したように、真正な数学的活動を実現するための数学の授業設計ヒューリスティックスを、理論的枠組として定式化することができた。しかしながら、本研究が提案した理論的枠組は、本研究の得たヒューリスティックスをある意味で誠実に定式化した理論的枠組である。つまり、定式化にあたって、実用性を必ずしも考慮して定式化したわけではなく、大きく分けて12項目からなる理論的枠組となった。これら12項目が、すべて同等の重みを有するのか、それとも、一部のみが、より重要な位置を占めるのか、これらの問いに対して、本研究は有効な答えを示すことができない。これらの問いに対する答えは、真正な数学的活動を実現することを試みる数学の授業実践を繰り返し行う中で、徐々に明らかになっていくものと考えられる。本研究は、真正な数学的活動を実現するための哲学を論究することにその本旨を置くものであるから、本研究では、定式化された理論的枠組内の各項目の重み付けについてまでは論じることができなかった。この点は、真正な数学的活動を実現するための数学教育研究としては、今後の課題である。また、同様の理由で、本研究が示した12項目で、十分な量の項目となっているかどうかについても、今後の課題である。

3.2 真正な数学的活動を実現するための数学教師教育研究として

本研究では、真正な数学的活動を実現するために有用な理論的枠組として、RCMA、数学的活動観、IDCモデル、科学的研究プログラムに基づく理論的枠組、および、真正な数学的活動を実現するための授業設計ヒューリスティックスの5点を示した。しかし、実際に真正な数学的活動を実現するにあたって重要なことは、少なくとも、授業設計者(多くの場合は、教師)がこれら5つの理論的枠組を活用する方法知を獲得していなければならない、ということである。一般的に述べるならば、数学教育研究を通じて何らかの知見が得られるということと、その知見を実践において活用する教師が育つということは、別の問題である。この問題は、多くの数学教育研究に共通の問題であり、それは、本研究においても例外ではない。この点は、今後も継続的に追究されるべきであろう。

3.3 真正な数学的活動を実現するための哲学として

本研究は、 AM_S および AM_P の観点から見て真正な数学的活動を実現するための哲学を論究した。これは、数学教育において真正な数学的活動を実現するための大きな一歩である。しかしながら、残りの2観点 AM_W および AM_D については、そもそも考察の対象にすることができていなかった。

第0章において研究目的として述べていたように、 AM_W および AM_D という内容としての真正性に先立って、 AM_S および AM_P という活動としての真正性が要請される。そのため、より広い意味での真正な数学的活動を実現するための哲学を論じるにあたっては、本研究が示した AM_S および AM_P から見て必要な、真正な数学的活動を実現するための哲学を基盤として、そこへさらに、 AM_W あるいは AM_D という観点を加えていく作業が必要となるであろう。

また、本研究の課題意識は、Weiss, Herbst, & Chen (2009) の指摘に依るところが大きい。これは、数学教育研究を中心に考えたときの課題意識であると言える。つまり、本研究の議論は、必ずしも、より広く教育一般を考えた場合の真正性についての議論にはなっていない。より広く教育一般を考えた場合の真正性としては、例えば、「学校

外や将来の生活で遭遇する本物の活動」(石井, 2012, p. 146)としての「真正の学習」が挙げられるであろう。その上で、教育を総合的に考える上では、

- この場合の真正性が、 AM_W との類似度がどの程度であるか
- そもそも通教科的な文脈から要請される真正性と数学固有の文脈から要請される真正性が、整合性を持ち得るのか

といった観点での議論も必要となるであろう。

3.4 数学教育学の哲学として

ここまで述べてきたように、本研究は、様々な観点から見て、まだまだ多くの課題を有する研究である。しかしながら、それは、見方を変えれば、本研究は、哲学という基礎的な問題を論究したという性格上、数学教育研究における多くの応用領域と潜在的な繋がりを持っていて、それだけ多方面に貢献し得る研究であるとの見方もできる。そういう将来への可能性という視点で最後に述べたい今後の課題は、数学教育学の哲学としての課題である。

本研究は、単に真正な数学的活動を実現するための哲学であるだけでなく、数学教育学の哲学としても捉えることができる。本研究は、真正な数学的活動の実現を目指すという限定の下で論究された哲学ではあったが、数学教育全般にとっても一定程度の示唆を残したとも言える。例えば、理論研究の帰結から実践的なヒューリスティックスを導出し、理論的枠組として定式化するというアプローチは、これまでの研究においては暗黙的であったと言え、そうしたアプローチを明示的に採用した本研究は、何のために数学教育研究を行うのかや、どのように数学教育研究を行うのか、という、数学教育研究の目的論や方法論における考察の具体例となり得るような研究に取り組むことができたと言える。このことは、本研究が数学教育学の基礎をなす哲学的問題に対して示唆的であるということの意味していると考えてよいであろう。しかしながら、本研究を数学教育研究の目的論や方法論の俎上に載せるためには、少なくとも実践における理論とは何かという点で、より一層の吟味が必要である。実践に何らかのよい影響を与えることを最終目的として数学教育研究が実施されるのであれば、数学教育研究の目的論や方法論に先立って、この点は議論されねばならない。

この点に関連して、Herbst (2010) は、「実践的合理性」というアイデアを提唱する。これは、学習者が学習者なりに最大限合理的に振る舞っているという構成主義の考え方からの類推で、数学の教師は、数学教育学が学問的に重要視してきた価値観に基づいて、というよりはむしろ、自分自身の価値観に基づいて最大限合理的に振る舞っていると考えべきである、というものである。Smith, diSessa, & Roschelle (1994) がミスコンセプション研究を総括する中で指摘するように、学習者の局所的にのみ上手く機能する思考でさえ、完全にランダムな振る舞いではなく、その規則性について、ある意味で「理論」とでも呼び得るものの萌芽が認められるとすれば、数学の教師の思考にも、ある意味で「理論」とでも呼び得るものの萌芽が認められると考えられる。このように捉えるとき、数学の教師とは、数学教育学によって論究された価値を無批判に受容した上でその実現に向けて努力する存在ではない。それは、数学教育学によって論究された価値でさえ批判的に吟味し、数学教育の実践を通じてよりよい価値を創造しようとする自律的な主体である。そのため、その批判的な吟味と実践による創造がいかなる過程であるかについての解明は、あらゆる数学教育研究が宿命的に背負う大きな課題である。

この点については、もちろん、本研究も例外ではない。本研究の成果が実際に真正な数学的活動を実現するための授業の設計に用いられるとき、さらなる批判と創造が引き起こされるものと考えられる。この過程がいかなる過程であるかについては、本研究にとっても今後の課題である。

第7章の引用・参考文献

- Goldin, G. A. (2003). Developing complex understandings: On the relation of mathematics education research to mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 54(2-3), 171-202.
- Herbst, P. (2010). Practical rationality and the justification for actions in mathematics teaching. In *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. VI, pp.

- 46-54). Columbus.
- 平林一栄 (2007). 「数学教育学の居場所 (niche): 新しい認識論の視点から」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, 88, 39-47.
- 石井英真 (2012). 「学力向上」. 篠原清昭 (編), 『学校改善マネジメント: 課題解決への実践的アプローチ』 (pp. 136-150). ミネルヴァ書房.
- ラカトシュ I. (1980). 『数学的発見の論理: 証明と論駁』 (ウォラル J. & ザハール E. 編, 佐々木力 訳). 共立出版.
- ラカトシュ I. (1986). 『方法の擁護: 科学的研究プログラムの方法論』 (村上陽一郎・井山弘幸・小林傳司・横山輝雄 訳). 新曜社.
- レイヴ, J., & ウェンガー, E. (1993). 『状況に埋め込まれた学習: 正統的周辺参加』 (佐伯胖 訳). 産業図書.
- Mason, J. (1989). Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 2-8.
- Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM*, 40(2), 317-327.
- ショーン, D. (2001). 『専門家の知恵—反省的実践家は行為しながら考える』 (佐藤学・秋田喜代美 訳). ゆみる出版.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.
- Sierpinska, A., & Kilpatrick, J. (1998). Continuing the Search. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 527-548). Springer Netherlands.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Smith, J. P., diSessa, A. A., & Roschelle, J. (1994). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences*,

3(2), 115-163.

Tall, D. (2011). Crystalline concepts in long-term mathematical invention and discovery.

For the Learning of Mathematics, 31(1), 3-8.

Von Glasersfeld, E. (1995b). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*.

The Flamer Press.

Weiss, M., Herbst, P., & Chen, C. (2009). Teachers' perspectives on "authentic mathe-

tics" and the two-column proof form. *Educational Studies in Mathematics*, 70(3),

275-293.

Wittmann, E. C. (1995). Mathematics education as a "design science." *Educational Studies*

in Mathematics, 29(4), 355-374.

本論文の引用・参考文献

阿部好貴 (2008). 「数学的リテラシー育成の方向性に関する一考察」. 『科学教育研究』, 32(4), 406-413.

足立恒雄 (2011). 『数とは何か そしてまた何であったか』. 共立出版.

Aizikovitsh-Udi, E., Clarke, D., & Star, J. (2013). Good questions or good questioning: An essential issue for effective teaching. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.2908-2916). Antalya.

Blackburn, S. (1996). *The Oxford Dictionary of Philosophy*. Oxford University Press.

Bråting, K., & Pejlare, J. (2015). On the relations between historical epistemology and students' conceptual developments in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 89(2), 251-265.

ブリッジマン, P. W. (1941). 『現代物理学の論理』. (今田恵・石橋榮 訳). 創元社.

Cambridge Dictionaries Online (n.d.-a). Authenticity. Retrieved from <http://dictionary.cambridge.org/dictionary/british/authenticity>

Cambridge Dictionaries Online (n.d.-b). Justify. Retrieved from <http://dictionary.cambridge.org/dictionary/english/justify>

Cambridge Dictionaries Online (n.d.-c). Legitimize. Retrieved from <http://dictionary.cambridge.org/dictionary/english/legitimize>

Cambridge Dictionaries Online (n.d.-d). Model. Retrieved from [omhttp://dictionary.cambridge.org/dictionary/british/model_1](http://dictionary.cambridge.org/dictionary/british/model_1)

Cambridge Dictionaries Online (n.d.-e). Model. Retrieved from [omhttp://dictionary.cambridge.org/dictionary/british/model_4](http://dictionary.cambridge.org/dictionary/british/model_4)

- Cambridge Dictionaries Online (n.d.-f). Philosophy. Retrieved from <http://dictionary.cambridge.org/dictionary/english/philosophy>
- Cambridge Dictionaries Online (n.d.-g). Structure. Retrieved from <http://dictionary.cambridge.org/dictionary/english/structure>
- Clements, D. H. & Sarama, J. (2004). Learning Trajectories in Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89.
- Cobb, P. (1994). Where Is the Mind? Constructivist and Sociocultural Perspectives on Mathematical Development. *Educational Researcher*, 23(7), 13-20.
- Cobb, P. (2002). Theories of knowledge and instructional design: a response to Colliver. *Teaching and Learning in Medicine*, 14(1), 52-55.
- Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work: Coping with multiple theoretical perspective. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*(Vol. 1, pp. 3-38). Information Age Publishing.
- Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in Classroom Mathematical Practices. *Journal of the Learning Sciences*, 10(1-2), 113-163.
- Confrey, J. (1987). "Misconceptions" across Subject Matters : Science, Mathematics and Programming. In J. D. Novak (Ed.), *Proceedings of The Second International Seminar: Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics* (Vol. 1, pp. 80-106). New York.
- Confrey, J. (1991). Learning to Listen: A Student' s Understanding of Powers of Ten. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 111-138). Springer Netherlands.
- Confrey, J., & Kazak, S. (2006). A thirty-year reflection on constructivism in mathematics education in PME. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 305-345). Rotterdam: Sense Publishers.
- Confrey, J., & Lipton, A. (1985). Misconceptions Research and the Clinical Interview. In S. K. Damarin & M. Shelton (Eds.), *Proceedings of the Seventh Annual Meeting of the*

-
- North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 38-43). Ohio.
- Dennett, D. (2002). Re-introduction of The Concept of Mind. *The Electronic Journal of Analytic Philosophy*, 7. Retrieved from <http://ejap.louisiana.edu/>
- Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2012). Tool Use and the Development of the Function Concept: From Repeated Calculations to Functional Thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(6), 1243-1267.
- Dykstra, D. I. (2010). What can we learn from the misunderstandings of radical constructivism? Commentary on Slezak' s "radical constructivism: Epistemology, education, and dynamite". *Constructivist Foundations*. 6(1). 120-126.
- English, L. D. (2010). Promoting student understanding through complex learning. In P. Brosnan, D. B. Erchick, & L. Flevaris (Eds.), *Proceedings of the 32nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 33-42). Ohio.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Falmer Press.
- Ernest, P. (1993). Constructivism, the psychology of learning, and the nature of mathematics: Some critical issues. *Science & Education*, 2. Kluwer Academic Publisher. pp.87-93.
- Ernest, P. (1994a). Introduction. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics, Education, and Philosophy: An International Perspective* (pp. 1-8). Psychology Press.
- Ernest, P. (1994b). What is social constructivism in the psychology of mathematics education? In J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. II, pp. 304-311). Lisbon.
- Ernest, P. (1998a). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. SUNY Press.
- Ernest, P. (1998b). Mathematical knowledge and context. In A. Watson (Ed.), *Situated Cognition and the Learning of Mathematics* (pp. 13-31). Oxford: Centre for Mathematics Education Research.

- Ernest, P. (2010). Reflections on theories of learning. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education* (pp. 39-47). Springer.
- Ernest, P. (2012). What is our first philosophy in mathematics education? *For the Learning of Mathematics*, 32(3), 8-14.
- Fallis, D. (2003). Intentional gaps in mathematical proofs. *Synthese*, 134(1), 45-69.
- Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 133-150.
- Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97-124.
- Goldin, G. A. (1990). Epistemology, constructivism, and discovery learning in mathematics. In R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics (Journal for Research in Mathematics Education. Monograph Vol. 4)* (pp. 31-47). National Council of Teachers of Mathematics.
- Goldin, G. A. (2001). Counting on the metaphorical. *Nature*, 413, 18-19.
- Goldin, G. A. (2003). Developing complex understandings: On the relation of mathematics education research to mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 54(2-3), 171-202.
- Goldin, G. A. (2014). A Fine Conceptual Analysis Needs No “Ism.” *Constructivist Foundations*, 9(3), 376-377.
- Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: A “Proceptual” View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116-140.
- 袴田綾斗・寺垣内政一・影山和也 (2015). 「数学者による活動分析：数学科教師教育への示唆を目指して」. 『学習システム研究』, 2, 66-73.
- Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). Springer Netherlands.
- ハンソン, N. R. (1986). 『科学的発見のパターン』. (村上陽一郎 訳). 講談社.
- Harel, G. (2008a). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. *ZDM*, 40(3), 487-500.

- Harel, G. (2008b). A DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part II: with reference to teacher's knowledge base. *ZDM*, 40(5), 893-907.
- Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 27-50.
- Herbst, P. (2010). Practical rationality and the justification for actions in mathematics teaching. In *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. VI, pp. 46-54). Columbus.
- 平林一栄 (2000). 「数学教育における構成主義の素性——とくに急進的構成主義について」. 『近畿数学教育学会会誌』, 13, 46-61.
- 平林一栄 (2007). 「数学教育学の居場所 (niche): 新しい認識論の視点から」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, 88, 39-47.
- Inglis, M. (2003). Three worlds and the imaginary sphere. *For the Learning of Mathematics*, 23(3), 24-27.
- Inglis, M., & Alcock, L. (2012). Expert and Novice Approaches to Reading Mathematical Proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(4), 358-390.
- 石井英真 (2012). 「学力向上」. 篠原清昭 (編), 『学校改善マネジメント: 課題解決への実践的アプローチ』 (pp. 136-150). ミネルヴァ書房.
- 岩崎秀樹・阿部好貴・山口武志 (2008). 「知識基盤社会における数学的リテラシーの課題と展望」. 『科学教育研究』, 32(4), 366-377.
- 岩崎秀樹・大滝孝治・新居広平 (2012). 「数学教育における目的・目標論再考」. 日本数学教育学会誌『数学教育』, 94(11), 26-29.
- 彌永昌吉・赤堀也 (2012). 『公理と証明: 証明論への招待』. 筑摩書房. (原著は1955年出版)
- JRME Equity Special Issue Editorial Panel (2013). Positioning Oneself in Mathematics Education Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(1), 11-22.
- Kantowski, M. G. (1977). Processes Involved in Mathematical Problem Solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8(3), 163-180.
- Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics education. In J. C.

- Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-27). Montreal, Canada.
- 国立教育政策研究所 (2015). 『平成 27 年度 全国学力・学習状況調査 解説資料 (中学校 数学)』. Retrieved from <http://www.nier.go.jp/15chousa/15kaisetu.htm>
- 小山正孝 (1989). 「数学教育における構成主義の哲学的及び認識論的側面について」. 日本数学教育学会『数学教育論文発表会論文集』, 22, 257-262.
- 國本景亀 (2009a). 「算数・数学教育におけるパラダイム転換—機械論から生命論へ」. 日本数学教育学会誌『算数教育』, 91(4), 27-36.
- 國本景亀 (2009b). 「生命論に立つ数学教育学の方法論：自由で個性豊かな算数・数学授業を目指して」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 15(2), 1-15.
- ラカトシュ I. (1980). 『数学的発見の論理：証明と論駁』 (ウォラル J. & ザハール E. 編, 佐々木力 訳). 共立出版.
- ラカトシュ I. (1986). 『方法の擁護：科学的研究プログラムの方法論』 (村上陽一郎・井山弘幸・小林傳司・横山輝雄 訳). 新曜社.
- Lampert, M. (1990). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal*, 27(1), 29-63.
- Larsen, S., & Zandieh, M. (2007). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 205-216
- レイヴ, J., & ウェンガー, E. (1993). 『状況に埋め込まれた学習：正統的周辺参加』 (佐伯胖 訳). 産業図書.
- Lehman, H. (1980). An examination of Imre Lakatos' philosophy of mathematics. *The Philosophical Forum*, 12(1), 33-48.
- Lerman, S. (1996). Intersubjectivity in mathematics learning: A challenge to the radical constructivist paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 133-150.
- Lesh, R., & Caylor, B. (2009). Differing conceptions of problem solving in mathematics education, science education, and professional schools. In L. Verschaffel, B. Greer, &

- W. V. Dooren (Eds.), *Words and Worlds: Modelling Verbal Descriptions of Situations* (pp. 333-350). Sense Publishers.
- Martin, D. B., Gholson, M. L., & Leonard, J. (2010). Mathematics as gatekeeper: Power and privilege in the production of knowledge. *Journal of Urban Mathematics Education*, 3(2), 12-24.
- Mason, J. (1989). Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 2-8.
- Mason, J. (2014). Questioning in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp.513-519). Springer Netherlands.
- 三輪辰郎 (1983). 「数学教育におけるモデル化についての一考察」. 『筑波数学教育研究』, 2, 117-125.
- 文部科学省・国立教育政策研究所 (2013). 『平成 25 年度 全国学力・学習状況調査 報告書 中学校 数学』. Retrieved from <https://www.nier.go.jp/13chousakekkahoukoku/index.html>.
- 中原忠男 (1994). 「数学教育における構成主義の展開：急進的構成主義から社会的構成主義へ」. 日本数学教育学会誌『数学教育』, 76(11), 302-311.
- 中原忠男 (1995a). 「数学教育における構成主義的授業論の研究 (I)」. 『全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 1, 1-8.
- 中原忠男 (1995b). 『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』. 聖文社.
- 中島義道 (2001). 『哲学の教科書』. 講談社.
- Nesher, P. (1987). Towards an instructional theory: the role of student' s misconceptions. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 33-40.
- 日本数学会 (2007). 「構造」. 『岩波数学辞典』. 岩波書店.
- Noddings, N. (1990). Constructivism in mathematics education. In R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics (Journal for Research in Mathematics Education. Monograph Vol. 4)* (pp. 7-18). National Council of Teachers of Mathematics.
- 野口勝義 (2001). 「「誤り」を生かす数学の授業に関する研究 (III): 反例の扱い方に対する示唆」. 日本数学教育学会『数学教育論文発表会論文集』, 34, 67-72.

- 野口勝義 (2002). 「「誤り」を生かす数学の授業に関する研究：実験授業の実践的検討」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 8, 119-128.
- 布川和彦 (1994). 「ラカトシュ理論の数学的問題解決論への援用」. 上越教育大学数学教室『数学教育研究』, 9, 23-32.
- 布川和彦 (2014). 「中学校数学における関数の対象としての構成：教科書の考察を中心に」. 『上越教育大学研究紀要』, 33, 85-96.
- 岡本和夫他 (2012). 『未来へひろがる数学 1』. 啓林館.
- 岡崎正和 (2012). 「数学教育における認識論研究の展開と課題の明確化」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 18(2), 1-12.
- 大滝孝治 (2012). 「数学的ミスコンセプションの弾性に関する一考察：〈小数の法則〉に焦点をあてて」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 18(2), 115-121.
- ポリア, G. (1954). 『いかにして問題をとくか』 (柿内賢信 訳). 丸善出版.
- Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM*, 40(2), 317-327.
- Rowlands, S., Graham, T., & Berry, J. (2011). Problems with Fallibilism as a Philosophy of Mathematics Education. *Science & Education*, 20(7-8), 625-654.
- ライル, G. (1987). 『心の概念』 (坂本百大・宮下治子・服部裕幸 訳). みすず書房.
- Sánchez Gómez, P. J. (2014). Methodological Issues of Second-order Model Building. *Constructivist Foundations*, 9(3), 344-346.
- 佐々木徹郎 (2004). 「数学教育における「意味の連鎖」に基づいた「学習軌道仮説」について」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 10, 13-19.
- 佐藤学 (1992). 「「パンドラの箱」を開く＝「授業研究」批判」. 『教育学年報 1 教育研究の現在』 (pp. 63-88). 世織書房.
- ショーン, D. (2001). 『専門家の知恵—反省的実践家は行為しながら考える』 (佐藤学・秋田喜代美 訳). ゆみる出版.
- Sethole, G. (2005). From the everyday, through the inauthentic, to mathematics: Reflection on the process of teaching from contexts. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 169-175). Melbourne.

- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.
- Sierpinska, A., & Kilpatrick, J. (1998). Continuing the Search. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 527-548). Springer Netherlands.
- 清水美憲 (2012). 「評価問題作成における数学的なプロセスへの焦点化：全国学力・学習状況調査 (中学校数学) の動向と課題」. 日本数学教育学会誌『数学教育』, 94(9), 30-33.
- 清水美憲 (2015). 「数学教育カリキュラムにおける「数学的方法」の位置」. 日本数学教育学会『第3回春期研究大会論文集』 (pp. 173-178).
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.
- Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Smith, J. P., diSessa, A. A., & Roschelle, J. (1994). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences*, 3(2), 115-163.
- Sriraman, B., & Mousoulides, N. (2014). Quasi-empirical Reasoning (Lakatos). In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 511-513). Springer Netherlands.
- Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000a). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 267-306). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000b). Interaction or intersubjectivity? A reply to

- Lerman. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 191-209.
- Steffe, L. P., von Glasersfeld, E., Richards, J., & Cobb, P. (1983). *Children's counting types: philosophy, theory, and application*. Praeger.
- 高橋陽一郎他 (2011). 『数学 I』. 啓林館.
- Tall, D. (2004). Building theories: The three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 24(1), 29-32.
- Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 5-24.
- Tall, D. (2011). Crystalline concepts in long-term mathematical invention and discovery. *For the Learning of Mathematics*, 31(1), 3-8.
- Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., & Simpson, A. (1999). What is the object of the encapsulation of a process? *The Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 223-241.
- Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y.-H. (2012). Cognitive Development of Proof. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education*(pp. 13-49). Springer Netherlands.
- 哲学辞典 (1971a). 「思想」. 『哲学辞典』 (pp. 588-589). 平凡社.
- 哲学辞典 (1971b). 「ソクラテス」. 『哲学辞典』 (pp. 866-867). 平凡社.
- 哲学辞典 (1971c). 「哲学」. 『哲学辞典』 (pp. 973-976). 平凡社.
- 哲学・思想辞典 (1998). 「哲学」. 廣松渉・子安宣邦・三島憲一・宮本久雄・佐々木力・野家啓一・末木文美士 (編), 『哲学・思想辞典』 (pp. 1119-1120). 岩波書店.
- Thompson, A. G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15(2), 105-127.
- Thompson, P. W. (2000). Radical Constructivism: Reflections and Directions. In L. P. Steffe & P. W. Thompson (Eds.), *Radical Constructivism in action: Building on the Pioneering Work of Ernst von Glasersfeld* (pp. 291-315). Routledge.
- Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundation of mathematics education. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the*

- International Group for the Psychology of Mathematics Education*(Vol. 1, pp. 45-64). Morelia, Mexico.
- Thompson, P. W. (2014). Constructivism in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 96-102). Springer Netherlands.
- Tillema, E. S., Hackenberg, A. J., Ulrich, C., & Norton, A. (2014). Authors' Response: Interaction: A Core Hypothesis of Radical Constructivist Epistemology. *Constructivist Foundations*, 9(3), 354-359.
- 坪井明人 (2012). 『数理論理学の基礎・基本』. 牧野書店.
- Ulrich, C., Tillema, E. S., Hackenberg, A. J., & Norton, A. (2014). Constructivist Model Building: Empirical Examples From Mathematics Education. *Constructivist Foundations*, 9(3), 328-339.
- Von Glasersfeld, E. (1983). Learning as constructive activity. In J. C. Bergeron & N. Herscovics (Eds.), *Proceedings of the 5th Annual Meeting of the North American Group of Psychology in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 41-101). Montreal, Canada.
- Von Glasersfeld, E. (1989). Constructivism in Education. In T. Husén & T. N. Postlethwaite (Eds.), *The International Encyclopedia of Education: Research and Studies. Supplementary volume* (pp. 162-163). Pergamon Press.
- Von Glasersfeld, E. (1990a). An Exposition of Constructivism: Why Some Like It Radical. In R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics (Journal for Research in Mathematics Education. Monograph Vol. 4)* (pp. 19-29). National Council of Teachers of Mathematics.
- Von Glasersfeld, E. (1990b). Distinguishing the Observer: An Attempt at Interpreting Maturana. In V. Riegas & C. Vetter (Eds.), *Zur Biologie der Kognition* (pp. 281-295). Frankfurt, Germany: Suhrkamp. Retrieved from <http://www.vonglasersfeld.com/>
- Von Glasersfeld, E. (1992). Constructivism reconstructed: A reply to Suchting. *Science & Education*, 1(4), 379-384.
- Von Glasersfeld, E. (1995a). A constructivist approach to teaching. In Steffe, L. P. & Gale, J. E. (Eds.) *Constructivism in Education*(pp. 3-15). Routledge.

- Von Glasersfeld, E. (1995b). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. The Flamer Press.
- Von Glasersfeld, E. (1995c). Sensory experience, abstraction, and teaching. In L. P. Steffe & J. Gale (Eds.), *Constructivism in education* (pp. 369-383). Routledge.
- Weber, K. (2014). What is a proof? A linguistic answer to an educational question. *Proceedings of the 17th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1-13.
- Weber, E., & Lockwood, E. (2014). The duality between ways of thinking and ways of understanding: Implications for learning trajectories in mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, 35, 44-57.
- Weiss, M., Herbst, P., & Chen, C. (2009). Teachers' perspectives on "authentic mathematics" and the two-column proof form. *Educational Studies in Mathematics*, 70(3), 275-293.
- Wheeler, D. (1987). The world of mathematics: Dream, myth or reality? In J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 55-66). Montreal, Canada.
- Wilkerson-Jerde, M. H., & Wilensky, U. J. (2011). How do mathematicians learn math?: resources and acts for constructing and understanding mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 78(1), 21-43.
- Wittmann, E. C. (1995). Mathematics education as a "design science." *Educational Studies in Mathematics*, 29(4), 355-374.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.
- Yuxin, Z. (1990). From the logic of mathematical discovery to the methodology of scientific research programmes. *British Journal for the Philosophy of Science*, 41(3), 377-399.
- Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I., & Winicki-Landman, G. (2012). The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives.

In G. Hanna & M. de Villers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 215-229). Rotterdam: Sense Publishers.

謝辞

本研究を実施するにあたり、主任指導教員である小山正孝教授には、およそ5年という長きに渡り、学位論文の作成はもちろんのこと、研究者としての姿勢、数学教育に携わる者としての在り方など、数学教育という領域で研究を行っていくために必要なことをご指導いただきました。勝手気ままにいろんなことに興味を示す筆者が、一貫した視座の下で1つの学位論文を仕上げるに至ることができたのは、小山先生が寛大な心で辛抱強くご指導くださったお陰であります。直接いただいたご指導だけでなく、小山先生のそうした指導の姿勢からも、たくさんのことを学ばせていただきました。心より感謝の意を表します。

広島大学大学院教育学研究科の池畠良教授には、本学位論文審査の副査として、本研究に対して貴重なご示唆をいただきました。特に、池畠先生には、特別に大学数学の講義を聴講させていただく機会を与えていただいたことがありました。そのときに拝聴した数学的概念のイメージに関するお話が、本研究の着想の正しさを確信する1つの契機となりました。心より感謝の意を表します。

広島大学大学院教育学研究科の寺垣内政一教授には、本学位論文審査の副査として、本研究に対して貴重なご示唆をいただきました。数学的真理の存在を否定しない構成主義研究を目指していた筆者にとって、寺垣内先生からいただいた本研究の数理哲学的背景に対するご意見は、次の考察を進めるための原動力となりました。心より感謝の意を表します。

本研究は、広島大学数学教育学講座の様々な先生方の多大なるお力添えの下、実施された研究でもあります。広島大学名誉教授の岩崎秀樹先生には、数学教育研究における「哲学」を、あるときは言葉で、あるときは研究姿勢で、様々な形でお示しいただくことができました。これまでも、そして、これからも、ヒロシマの数学教育研究が大事にしてい

なければならぬ「哲学」をお示しただけは、筆者自身が現在の数学教育研究の「哲学」に課題意識を持つようになった大きな契機となりました。深くお礼を申し上げます。広島大学大学院の影山和也准教授からは、哲学的研究と経験的研究のそれぞれについて、最新の研究動向を踏まえながら的確なご助言をたくさん賜りました。ともすれば、今まで大事にされてきたことばかりに目を向けがちであった筆者に対して、これから新しく大事にされることにも目を向ける機会をいただいたように思います。深くお礼を申し上げます。広島大学大学院をご退職された入川義克先生からは、数学教育者として大事にしなければならぬ視点を、折に触れてご指導いただきました。本研究が単に哲学的な研究として抽象度を上げるだけとならず、数学教育実践との関連を常に意識して研究できたことは、入川先生からいただいたご助言のお陰です。深くお礼を申し上げます。

また、広島大学大学院においては、多数の先輩・後輩に恵まれました。杉野本勇氣さんからは、その研究姿勢より、研究の着想を豊かにするための、たくさんのご示唆を賜りました。大滝孝治さんからは、特に、数学教育研究を科学にするという視点で、たくさん議論をさせていただき、ご示唆を賜りました。早田透さんからは、研究室の先輩として、研究の内容のみならず、大学院生としての過ごし方全般に渡って面倒を見ていただきました。大谷洋貴さんには、お忙しい中、本学位論文の仔細に渡ってお目通しいただき、たくさんのご指摘を賜りました。皆様に、深くお礼申し上げます。

広島大学附属福山中・高等学校の先生方には、働きながら学位論文を執筆する筆者のわがままをお許しいただき、研究と仕事の双方においてお力添えをいただきました。感謝致します。また、筆者の拙い授業実践にも意欲的に取り組んでくれた生徒の皆さんにも、お礼申し上げます。

ここでお世話になったすべての方々のお名前を挙げることはできませんが、本研究を行う上で、他にも多くの皆様にお力添えいただきました。お礼申し上げます。なお、本研究は、たくさんの方々からいただいたご示唆・ご助言を、筆者が筆者なりに解釈した上で実施されたもので、すべての文責は筆者自身にあります。筆者の力が及ばず、ご示唆・ご助言を活かしきれなかった部分もたくさんあるものと思われませんが、そうした点は、今後の研究で活かしていく所存です。

最後になりましたが、延べ11年間に渡って大学(院)生をし続けるというわがままを許してくれた両親に、この場を借りて感謝の意を表します。また、博士課程在学中に結婚し、

筆者の研究生活を全面的に支えてきてくれた妻 沙織にも，改めて感謝の意を表します．

2016 年 11 月 23 日

上ヶ谷 友佑