広島大学附属三原学校園研究紀要　第７集　2017　pp. 181-186

数　学　科

前期中等教育おける確率授業に関する研究

―「同様に確からしい」に焦点を当てて―

岩　知　道　秀　樹

A Study of the Teaching Probability in Lower Secondary Education -Focus on the Notion of "Equally Possible"-

Hideki Iwachido

The purpose of this research was to find a problem through lesson planning and to examine whether students understand mathematical probability accurately, conducting the lesson and analyzing the result of the lesson. This research focused on the notion of "Equally Possible" in a unit "Probability" in the second year of lower secondary school. "Equally Possible" was the essential notion for considering mathematical probability.

The result revealed that many students considered and analyzed mathematical probability without consideration of "Equally Possible". The cause of the findings was considered as lack of experience in two things: challenging the assumption and making an assumption to consider the event. Additional research with planning the lesson to solve the problem and to verifying the effect is needed. (p.181-186)

１　本研究の目的

誰もが簡単に情報を得ることができ，そして発信することができる高度情報化社会において，正しく情報を手に入れ，判断，そして利用することが今日的なリテラシーとして叫ばれて久しい。その課題に対して，算数・数学科では確率・統計に焦点を当てて様々な研究がなされている。その課題意識は，算数・数学から発生するというよりも，外的要因，今日の社会に必要な素養として身につけるべきであるという議論が多く見られる。一方で，確率・統計の数学的内容に内在する身につけるべき思考方法をいうものも考えなければならない。すなわち，学問領域としての本質を核に据え，その中に内在する思考方法を身につけさせることを考えるということである。

前期中等教育，すなわち中学校の数学科の目的は多々あるものの，一番の目的は論証である [1)]。確率指導においても，前提を意識し，事象を考察する力を育成するが必要になると考える。また岩崎(2011)らが論証で前期中等教育と後期中等教育との差異をつけようとしている [1)]のと同様に，確率の授業展開においても前期中等教育と後期中等教育の差異，担うべき思考方法を考えていかなければならない。そうでなければ教科としての立ち位置は不安定なものになってしまう。

本研究では中学校２年生における確率の単元において，「同様に確からしい」に焦点を当てる。「同様に確からしい」という考え方は，場合の数をもとにして数学的確率を考えるうえで必要不可欠な考え方であるにもかかわらず，学校教育で十分に注意がなされ，扱われているとは言い難い。生徒が「同様に確からしい」，仮定をどの程度意識し，数学的確率を適切な形で捉えているかを考

察するための調査や授業構成を行い，実践，考察することにより，課題を見出すことを目的とする。

2　「同様に確からしい」について

前期中等教育の学習で「同様に確からしい」は，中学校２年生の確率で初めて現れる。中学校の各学年に確率・統計の分野が存在するが，中学校１年生で」資料の活用，３年生で標本調査という統計的確率の側面を含むのに対し，中学校２年生の確率は，数学的確率を学習する場面である。そこでは仮定が重要であり，中学校２年生で学習する仮定と結論の考察，いわゆる論証の学習ののちにこの学習が行われることは，仮定を設定する必要性から納得ができるものである。しかし論証の学習では，論証の考え方の習得に主眼が置かれるため，仮定の設定，真偽に対して疑うことは基本的に行わない。故に，仮定を設定するということは，あまり経験がないことと言ってよい。その中で同様に確かしいは次のように定義される[2)]。

正しくつくられたさいころを投げるとき，1から6までのどの目が出ることも，同じ程度に期待される。このようなとき，1から6までのどの目が出ることも **同様に確からしい** という。

図１　「同様に確からしい」の定義

「同様に確からしい」を定義したのち，図のように数学的確率が定義される。

起こり得るすべての場合が同様に確からしいとするとき，あることがらが起こる確率は，次のようにして求めることができる。

起こり得る場合が全部で n 通りあり，そのうち，あることがらの起こる場合が a 通りあるとき，そのことがらの起こる確率 p は，次のようになる。

$$p=\frac{a}{n}$$

図２　数学的確率の定義

図１の「同様に確からしい」を定義し，そのもとで確率を定義してしまったのちは，場合の数を数え，数学的確率を求めることに主眼が置かれているのが現状である。

今日的な数学的リテラシーとして，モデル化が挙げられる。モデル化の基本的な発想は現実世界と数学世界の往還から数学を構成すること，および現実を解釈することであり[3)]，数学という学問そのものがモデル化を行うものである。「同様に確からしい」は数学的確率の基礎となるモデル化と言え，考察対象の理想化を行っている。数学的確率を語る際に，「同様に確からしい」という仮定の設定をすることは必要不可欠である。この学習で，現実世界，情報化社会においても，与えられたものを鵜呑みにする，信じ切ってしまうという考え方をすることの危険性を感じることの経験をすることができる。仮定を設定することは，数学の学問の本質であるとともに数学で身につけるべき思考方法であり，それらは今日的に必要な素養にもつながるため，重点に置く意味を持つと考える。

3　事前調査

広島県内の国立大学附属中学校２年生１クラスの子ども 40 名を対象に記述式の事前調査を行った。目的は，確率において仮定をどの程度意識しているかを見ることにある。質問は以下である。

問１　ある正しく作られたコインがある。そのコインを５回投げたところ裏裏裏裏裏であった。次に出るのはどちらであると考えられるか。理由をつけて述べよ。

問２　ある正しく作られたコインがある。そのコインを 10 回投げたところ裏表裏表裏表裏表裏表であった。次に出るのはどちらであると考えられるか。理由をつけて述べよ。

数学の世界で，「正しく作られた」という仮定は，すべての事象が発生することも同程度期待できること，「同様に確からしい」に他ならない。問１，問２で，その仮定に関して，言及できる生徒や規則に引っ張られ回答する生徒がどの程度いるかを見る。その回答を５つに分けた。

①表または裏を回答し，正しく作られた，事象が平等に起こると期待できると意識考えられることに関して言及をしているもの
②表または裏を回答したものの，正しく作られたに関して言及をしていないもの
③規則的に表と回答したもの
④規則的に裏と回答したもの
⑤なんとなく表または裏を回答したもの

その結果，表１のようになった。

表１　事前調査の結果（単位は人）

	①	②	③	④	⑤
問1	2	12	2	21	3
問2	2	11	0	23	4

問１，問２両方に関して①と回答した生徒はわずか２名であった。２人の生徒は，正しく作られたに着目し，次にどちらが出るかわからないと回答をしている。確率が 1/2 であることにまでは言及をしていないものの，その前提に対して意識をしている。②と回答した生徒は，それはたまたまであるとするものや確率は 1/2 だからという回答が多く，前提に関しては何も触れていないものである。①②と回答した生徒は，試行の独立性は意識していると考えられる。しかし多くの生徒は，問１では 26 名，問２では 27 名の生徒は，規則に引っ張られており，正しい回答ができていない。

事前調査から，実験の結果を考察することによって，その結果をもたらした仮定はどのようなものなのかを考察する展開が必要と考える。単純な実験データ，場合の数を用いて数学的確率への転換を行う際に，仮定に注意を払うような授業が必要ということである。多くの生徒は，試行回数が少数であるものの，これまでの結果をもとに次の結果を予想し，回答をしている。しかしながら，それぞれの試行は独立性を持つこと，そして「同様に確からしい」を前提としなければならない。そこで，「同様に確からしい」を考えさせる授業展開，数学的確率そのものに理由を求めるような授業展開をし，生徒の記述を見ることにする。

４　授業実践

(1) 対象生徒

広島県の国立大学附属中学校２年生１クラスの子ども 36 名を対象に調査を行った。事前調査のクラスと同じであるが，２時間ともに受けた生徒 36 名を対象とする。

(2) 調査時期

平成 28 年 11 月下旬から 12 月上旬

(3) 授業の概要

授業は２時間構成である。１時間目に，統計的に確率の定義を行う。各生徒にサイコロを配布し，100 回振り，データ収集させる。10 回毎に６の目が出た累計，相対度数を出させ，出た結果を他人と比較して，考えを記述させた。次に４人班になり，データの集計を行う。その際に 40 回毎に６の目の出た累計，相対度数を出させ，自分１人のデータとの違いを考察し，考えを記述させた。さらにクラス全体でデータの集計を行う。その際に 400 回毎に６の目の出た累計，相対度数を出させ，自分１人のデータとの違いを考察，考えを記述させた。その後，統計的確率の定義を行った。この時間では，確率を統計的なものとして扱い，次の時間の「同様に確からしい」へ着目が行くようにした。

２時間目に「同様に確からしい」を考えさせることを行う。１時間目と同様に各自がサイコロを 100 回投げ，６の目が何回出るかを集計する。その際に，「６の目を狙って出すために，念じる」ことをさせる。「サイコロを投げるときに一番やりたいことは出る目をコントロールすることである」という人間としての欲に言及をすることで，サイコロについて考えさせ，「狙う」という行為が数学的に見ればまったくもって意味をなさないことであることを感じさせるために行う。各生徒にサイコロを配布し，100 回振り，データ収集させる。10 回毎に６の目が出た累計，相対度数を出

させ，出た結果を他人と比較して，考えを記述させた。次に４人班になり，データの集計を行う。その際に 40 回毎に６の目の出た累計，相対度数を出させ，自分のデータとの違いを考察し，考えを記述させた。さらにクラス全体でデータの集計を行う。その際に 400 回毎に６の目の出た累計，相対度数を出させ，自分１人のデータとの違いを考察し，考えを記述させた。最後に，なぜ「狙う」ことが意味のない行為であるといえるのか，そして経験的にサイコロの６の目が出ることは 1/6 と答えられることを引き合いに，なぜ 1/6 ということができるのかを尋ねることで，数学的確率の定まる理由を生徒に考えさせる，記述させた。

(4) 授業の実際　１時間目

確率の学習の初めの授業である。確率という用語はもちろんのこと，「サイコロで６の目が出るのは？」を尋ねると確率を定義していないにもかかわらず，1/6 サイコロが出る目の確率について多くの生徒が答えていた。これまでの経験から，答えたものだと考えられる。実際に各自で 100 回振ることを述べたときの生徒の反応は楽しそうであったものの，やっていくうちに「めんどくさい」と感じていったようであるが，図３のように 100 回振った結果の集計を行った。

投げた回数	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
6 の目が出た回数	1	3	7	7	9	9	11	13	16	19
6 の目が出た相対度数	0.1	0.15	0.2	0.1	0.18	0.15	0.15	0.16	0.18	0.19

出た回数
投げた回数

図３　100 回振った際の集計結果

自分と他人の結果を見て
同じ所もあれば違う所もある
ふ―――ん。

図４　生徒の結果の考察

図４は，その結果の一例である。100 回振った結果だけでは何も言いにくいことを述べている。またクラス全体では特に何も思わない生徒が多く，「ふーん」と感じる生徒の考えがクラス全体で共有された。この結果が単なるデータであるという意識は多くの生徒がしているようであり，このような記述をしている生徒が多く見られた。

その後，班，クラスと回数を増やすごとに感想を書かせた。クラスの集計の結果は図５のようになり，クラス全体の結果を見て，図６のような回答が多く見られた。それと同時に，個人で見たときと同じように「ふーん」というそんなものかという記述も多く見られた。

投げた回数	400	800	1200	1600	2000	2400	2800	3200	3600	4000
6 の目が出た回数	54	128	199	276	358	430	494	574	636	714
6 の目が出た相対度数	0.14	0.16	0.17	0.17	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18

図５　クラスの集計結果

自分と班とクラス全体の結果を見て
クラス全体の結果から クラス全体だと相対度数が
一定（ほぼ）になっていた。
ふー ん。

図６　１時間目のクラスの集計結果の考察

この結果のもと確率の定義を統計的な確率として行った。今回の実験結果では，0.1785 となり少し高めの結果となったものの，「ふーん」という記述でも見られるように，生徒には「この程度」という感覚が身についたと考える。このような考えは，当たり前，のちの仮定を疑うためには，必要な感覚である。

(5) 授業の実際　２時間目

１時間目と異なり，「６の目が出ることを念じて」100 回サイコロを振らせた。最初のほうは，しっかり念じながら投げていたものの，途中からその行為そのものに「面倒くさい」と感じてしまった生徒，意味のないことだと考える生徒が多く発生した。しかし図７や図８のように，結果に対して積極的にコメントを残しており，１時間目には，「ふーん」と記述していた生徒も多くコメントをしていた。これは，やはりサイコロを投げるという行為に対して，狙った目を多く出したいという

気持ちがあるからと考えられる。班の集計に関しても同様のことが言え，結果に関してコメントを記述する生徒が多く見られた。

自分と他人，前回の結果を見て
前回よりも6のでた回数が減った。

図7　1時間目の実験との比較①

自分と他人，前回の結果を見て
前回の結果より増えた
念じたおかげかも！

図8　1時間目の実験との比較②

クラスで集計を行った結果，1時間目よりも6の目が出た回数は減少した。（図9参照）

投げた回数	400	800	1200	1600	2000	2400	2800	3200	3600	4000	前
の目が出た回数	61	119	197	270	339	406	471	532	624	687	714
の目が出た相対度数	0.15	0.15	0.16	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.18

図9　2時間目のクラスの集計結果

2時間目の結果を1時間目の結果と比較し，変化した点と変化しなかった点を挙げさせた。多くの生徒が変化した点については6の目が出た回数について言及し，変化しなかった点については，後半から相対度数が変化せず一定であることについて言及をしていた（図10参照）。

変化したこと
前回より減
変化しなかったこと
後半からは相対度数が一定（変わらない）

図10　2時間目のクラスの集計結果の考察

「狙う」という行為が意味をなさないこと，そして経験的に多くの生徒がサイコロの目が出る確率は1/6であることを知っていることを確認したうえで，最後に教師が「なぜサイコロの6の目が出る確率は1/6と考えることができるのか？」と発問を行い自由に記述させた。最後の発問が，本研究の「同様に確からしい」を意図した発問となる。

5　結果と考察

「なぜサイコロの6の目が出る確率は 1/6 と考えることができるのか？」という問いに対し，36名中わずか1名の生徒のみが「同様に確からしい」を意味する回答をすることができた（2名は白紙）。一番多かった答えは，図11のような回答である。

さいころを投げることを考えるとき，6 の目が出る確率を $\frac{1}{6}$ と考えるのは…
・サイコロの面が6面だから

図11　サイコロの面の数に着目した回答

この回答は回答者の大多数である 30 人が回答していた。「6面ある」という存在の思考は具体的な実験やこれまでの経験から答えられるものの，数学的確率を考える上で必要な「「同様に確からしい」」を意識した回答になっているとは言い難い。

また図 12 のようにどの目が出るかわからないからとしているものもあった。目の出やすさに関して言及しているものとはやはり言えない。

さいころを投げることを考えるとき，6 の目が出る確率を $\frac{1}{6}$ と考えるのは…
1. 2. 3. 4. 5. 6のどれがでるか分からないから

図12　サイコロの不確実性へ着目

次に図13のような回答が1名見られた。この回答は，立方体ということを指摘している。しかし「正しくなければ」という仮定の設定をしており，「正しいとする」という仮定の設定をしているとは言えない。

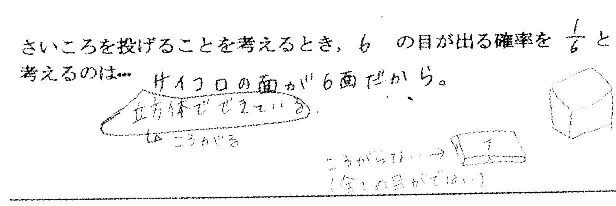

図13　サイコロの形への着目をした回答例

「立方体でないと不都合が生じる」という指摘にはなるが，「立方体とする」という指摘にまでは到達していない。「同様に確からしい」は，「でない」ことから事象を見るのではなく，「とする」ことによって事象を見るため，不十分である。

図 14 を見る（１名が回答）。この場合は，１～６までの目の起こりやすさに注目をしている回答である。「起こりやすさは等しい」を根拠に，６の目が出る確率を 1/6 として回答している。

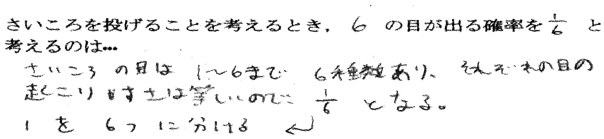
さいころを投げることを考えるとき，6 の目が出る確率を $\frac{1}{6}$ と考えるのは…
さいころの目は 1～6まで 6種類あり、それぞれの目の起こりやすさは等しいので $\frac{1}{6}$ となる。
1を 6つ に分ける

図 14　起こりやすさの等しさを根拠とする回答

しかし，起こりやすさは等しいは正確な根拠とはならない。等しいと仮定が正確な根拠である。故に図 14 の解答は，「同様に確からしい」を仮定として意識した回答であるとは言えない。

図 15 の回答は「同様に確からしい」を意図した考え方である（１名）。この回答は，６面あるということを指摘するとともに，「きんとうに出ると仮定したから」と述べており，均等に出ることそのものが仮定であることを十分述べている。これは「同様に確からしい」ということそのものであり，正しい回答であると考えられる。

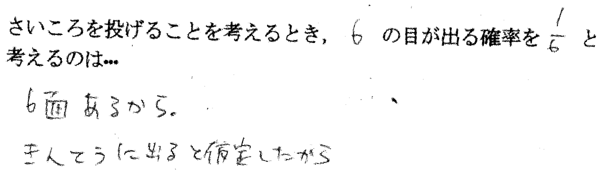
さいころを投げることを考えるとき，6 の目が出る確率を $\frac{1}{6}$ と考えるのは…
6面あるから。
きんとうに出ると仮定したから

図 15　起こりやすさの等しさを仮定する回答

以上の結果，多くの生徒がサイコロのどの目も出る確率が 1/6 であることは理解しているものの，なぜ 1/6 と考えられるのかに対して疑問を持たず，数学的確率として捉えていることが分かった。その原因として２点が考えられる。１点目はこれまでの経験に従い，仮定を疑うことをしないことである。サイコロでは，全員の生徒が 1/6 であることは理解していたが，立方体であり，６面あるという経験，算数の内容では場合の数の学習による経験が蓄積され，それに引っ張られ，あたかも必ず正しいものとして捉えているということである。２点目として数学の世界で必要となる理想化や仮定を設定することの経験の不足が考えられる。仮定を設定することは，確率単元の前に行われる論証の内容で多くなされているにも関わらず，このような結果となっている。これは論証指導への一つの示唆を与えるともいえるであろう。確率という単元のみで挙げられることではないが，数学学習，特に論証指導の際に，これまでの単純な仮定と結論の関係を考えるのではなく，仮定そのものを意識して行う必要もあると考える。

6　結論と今後の課題

本研究では，前期中等教育，中学校における確率授業において「同様に確からしい」に焦点を当て，生徒の「同様に確からしい」，仮定に対する認識を確認し，数学的確率を適切な形で捉えているかを見る授業実践を行った。その結果，多くの生徒が「同様に確からしい」という仮定を考慮することなく，数学的確率を捉えていることが分かった。その原因として，これまでの経験に従い，仮定を疑うことをしないこと，事象を考察する際に仮定を自ら設定することの経験が不足していることの２点が指摘される。その原因の解決のために，必要な授業設計，実証を行うことが今後の課題である。

＜注および引用文献＞

1）　岩崎秀樹他：「高校数学における論証指導―Sylvester の定理に向けた局所的組織化―」，日本数学教育学会誌，vol. 93，pp13-16，2011.
2）　一松信他：「中学校　数学２」，2016，学校図書.
3）　阿部好貴：「数学的モデル化と論証の接続に関する一考察:数学的リテラシーの視点から」，臨時増刊数学教育論究，pp. 1-8，2015.