

てこクランク機構を題材とする中学校数学の授業実践

森 脇 政 泰

現行の中学校学習指導要領では、数学科に課題学習が位置付けられている。課題学習では、各領域の内容を総合したり日常の事象や他教科等での学習に関連付けたりするなどして見いだした課題を解決する学習の実施が求められている。このような学習の題材として「機構」に着目した。機構とは機械の動きを作る仕組みのことである。本稿では機構の一種である「てこクランク機構」の動きを考察した中学校数学の授業実践の事例について報告する。

1. はじめに

現行の中学校学習指導要領では、数学の学習において数学的活動を重視することが求められている。数学的活動とは、

生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営みを意味している

とされている¹⁾。

数学的活動の一層の充実を図るため、中学校学習指導要領では従前に続いて課題学習が各学年に位置付けられている。課題学習とは、

生徒の数学的活動への取組を促し思考力、判断力、表現力等の育成を図るため、各領域の内容を総合したり日常の事象や他教科等での学習に関連付けたりするなどして見いだした課題を解決する学習

であるとされている²⁾。

「日常の事象や他教科等での学習に関連」した題材としては「物体の落下」が第3学年の数学の教科書³⁾に見られる。これは理科の第1分野で学習する内容で、二乗に比例する関数と関連する。このように、日常の事象や他教科と関わる数学の授業は、これまでも多くの実践がなされてきた。数学的活動の一層の充実に向けて、他教科との関連をさらに広げることも必要であると考え。本稿ではその取り組みの一部として、技術・家庭科の技術分野で扱われる「てこクランク機構」を題材に、第2学年で実施した数学の授業実践の事例を報告する。

2. てこクランク機構について

機構とは、回転運動を直線運動に変換するような、機械の動きを作る仕組みのことである。

授業で扱ったのは、図1のように長さが

$AD = 8$, $BC = 10$, $CD = 19$, $AB = 20 \dots (*)$
(単位はいずれも cm) である4本の棒(リンク)を接続してできる機構である。

この機構は、次の例1, 例2のように固定する棒や動かす頂点によって動き方が変わる。

例1 (てこクランク機構). 辺ABを固定して点Dを動かすと、点Dは一回転させることができ、それに応じて点Cは、点Bを中心とし、辺BCの長さを半径とする定まった範囲の円弧を往復する(「揺動する」という)。この機構を「てこクランク機構」という。この機構の動きは、自転車のペダルをこぐときの運動に見られる。

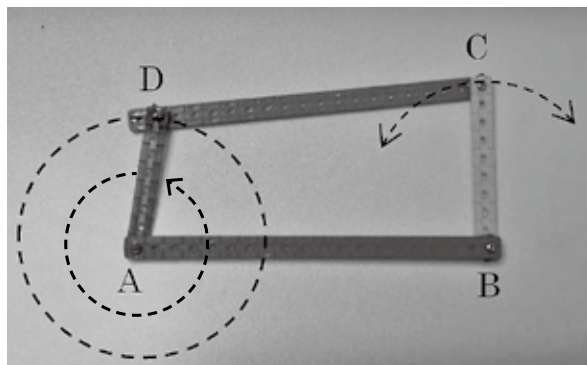


図1 てこクランク機構

例2 (両てこ機構). 図2のように、辺BCを固定すると、点Aは限られた円弧を動かすことができ、それに応じて点Dは揺動する。この機構を「両てこ機構」という。この機構は、水平移動クレーンの動きに見られる。

例2のように、一般には4本の棒をつないでも、最短の棒が一回転できるとは限らない。これについては後でグラスホフの定理を紹介する。

ここからは、例1の「てこクラック機構」を考察する。最短の辺ADを回転させていくと、図3の①～④の三角形がすべて存在するので、点Dは一回転させることができる。図3の①～④には、三角形が存在するための条件もそれぞれ示している。

ここで、3辺の長さがa, b, cである三角形が存在するための条件は

$$a < b+c, b < c+a, c < a+b$$

である。さらに、a, b, cの中でaが最大であれば、3辺の長さがa, b, cである三角形が存在するための条件は

$$a < b+c$$

である。

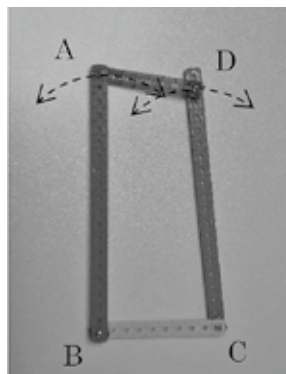


図2 両てこ機構

が知られている。てこクラック機構はグラスホフの定理を満たす。

グラスホフの定理

4節リンク機構の最短リンクの長さをa, その他のリンクの長さをb, c, dとすると、最短リンクが一回転するための条件は、次の3つの式を同時に満たすことである。

$$a+b \leq c+d, a+c \leq b+d, a+d \leq b+c$$

ここで、4本のリンクをつないだ機構を4節リンク機構という。また、等号の場合は三角形がつぶれて一直線となるが、この場合でも最短リンクは一回転できるため、等号も含まれている。

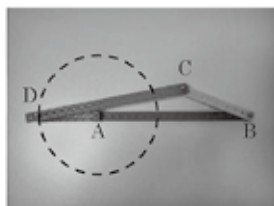
この定理の不等式は、それぞれ次のように表現できる。

$$(\text{最短リンク}) + (\text{他の1つのリンク}) \leq (\text{残りの和})$$

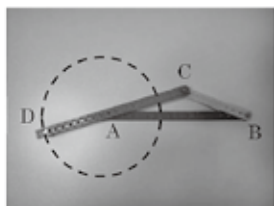
さらに、3つの不等式は次の1つの不等式で表現することができる。

$$(\text{最短リンク}) + (\text{最長リンク}) \leq (\text{残りの和})$$

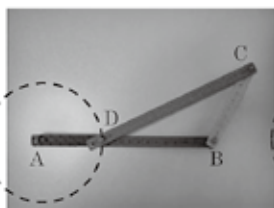
一方、点Cが一回転しないのは、条件(*)により3点の組(A, B, C)と(B, C, D)がそれぞれ一直線上に並ばないからである。また、点Cが動く限界は、3点A, C, Dが一直線上に並ぶときである。左側の限界は辺CD上に点Aが位置する図3②の場合であり、右側の限界は辺CDの延長線上に点Aが位置する図3④の場合である。



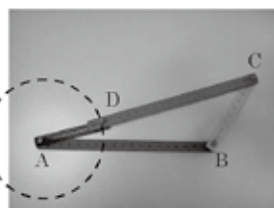
$$\text{① } AB + AD < BC + CD$$



$$\text{② } AB < (CD - AD) + BC$$



$$\text{③ } CD < (AB - AD) + BC$$



$$\text{④ } AD + CD < AB + BC$$

図3

図3①の不等式においてADを移項すると②になり、④の不等式においてADを移項すると③になる。さらに、辺ADは最短の辺で辺ABは最長の辺であるから、 $AD < BC$ と $CD < AB$ により④が得られる。したがって、4本の長さがすべて決まっていないと得られない不等式は

$$\text{① } AB + AD < BC + CD$$

である。これは

$$(\text{最長リンク}) + (\text{最短リンク}) < (\text{残りの和})$$

となっている。一般には、次のグラスホフの定理⁴⁾

3. 教材化に向けて

前節の通り、てこクラック機構の最短リンクが回転できる根拠には、三角形が存在するための条件が関わってくる。三角形が存在するための条件は、高等学校の数学Aの教科書⁵⁾で発展として扱われるため、中学校の数学で扱うときは慎重な配慮が必要になる。一方、図1のような模型を使って、てこクラック機構の動きを考察すれば、中学校の数学でも、観察を繰り返すことで回転できる根拠の不等式①が導かれると考えた。さらに、模型の観察を通して、三角形が存在するための条件に、逆に気付くきっかけになることも期待される。

てこクラック機構は四角形とみなすことができ、その動きを調べるには、三角形に帰着して考察することになる。そこで、てこクラック機構を題材とする数学の授業を、中学校第2学年の「図形の性質と証明」における図形の発展学習に位置付け、次のように計画し実施した。

4. 授業の実施

(1) 授業計画

日 時 2016(平成28)年12月12日(月)
第3限 (10:40 ~ 11:30)

学年・組 中学校2年B組 46人

単 元 図形の性質と証明

指導計画 (全22時間)

第一次 三角形 7時間

第二次 四角形 8時間

第三次 図形の発展学習 7時間(本時7/7)

本時の題目 模型の動きを調べよう

本時の学習目標

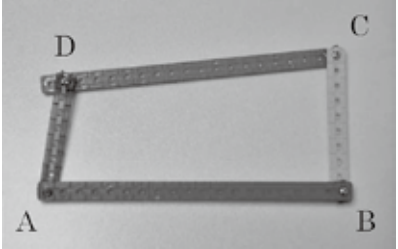
点Dが回転する理由や点Cが回転しないで揺動する理由を、数学的な根拠に基づいて説明する。

本時の評価規準 (観点/方法)

辺の長さに着目して点Cや点Dの動きを考察し、数学的な表現で説明することができたか。

(数学的な技能/様相観察, 学習プリント分析, 自己評価分析)

本時の学習指導過程

学習内容	学習活動	指導上の留意点・評価
(導入) 木材でできた三角形と四角形の観察	1 三角形と四角形の相違を把握する。	
	木材でできた三角形と四角形を観察し、四角形が固定されず、動くことを全体で確認する。	
(展開) 模型の観察	2 課題1に取り組む。	
	課題1 右の図のように4本の棒が繋がれた模型で、頂点をそれぞれA, B, C, Dとします。1つの辺を固定し、1つの頂点を動かしたとき、ほかの頂点はどのように動くでしょうか。	
動きの確認	3 各班で観察し、どのように動くか班ごとに発表する。	
点Cや点Dの動きについて考察する	4 辺ABを固定し点Dを動かす場合に絞り、次の課題2に取り組む。	
	課題2 点Dが回転するのはなぜでしょうか。点Cが回転しないのはなぜでしょうか。数学的な理由に基づいて説明しましょう。	
課題2の発表	5 課題2について班ごとに発表する。	・辺の長さに着目することを確認する。 ・不等式を用いた数学的な表現で説明できたか【数学的な技能】
	6 全体で発表内容を確認する。	
現実場面との関連を知る	7 課題2で考察した模型が、自転車をこぐ脚の動きに見られる様子をDVDで視聴する。	
(まとめ)	8 個人で今日の授業の振り返りや感想を書いてまとめる。	・わかったことや疑問などを生徒に尋ねる。 ・数学的な根拠に基づいて説明できたか【数学的な技能】
備考	準備物：学習プリント、てこクラック機構の模型(12個)、ホワイトボード、ホワイトボード用マーカー	

(2) 授業の実際

導入では、木材でできた三角形と四角形の模型を観察した。それらの構造物としての安定性の違いから、3辺が与えられると三角形は一意的に定まるのに対して、四角形は4辺が与えられても一意的には定まらないことを確認した。

課題1では4人1班のグループで模型を観察し、意見を交流させた。てこクラック機構の動きに気付く班が多かったが、両てこ機構になることを見つけた班もあった。

課題2では早い段階で不等式①

$$AB + AD < BC + CD$$

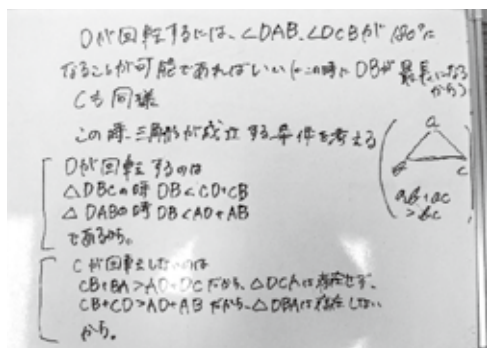
に気付く班が多く、後から模型を動かすなどして①がなぜ妥当であるか検討している様子が見られた。次第に「三角形ができる、できない」「一直線になる、ならない」といった発言が聞かれ、ワークシートや発表用ホワイトボードに書く班が現れた。



発表準備の様子



発表の様子



三角形が存在するための条件に触れた班

時間の都合で、全体発表は2つの班しかできなかった。2班とも場合分けが不十分なところもあったが、不等式①などを示して説明することができた。

最後に映像資料を提示し、今回調べた動きが自転車のペダルをこぐときの運動に見られることを確認した。

(3) 生徒の反応

ワークシートには「授業でわかったこと、さらに知りたいと思ったことを書きましょう」と「今日の授業の感想を書いてください」の2点について記述させた。

わかったことなどについては「自転車の他にどういう所でつかわれているか知りたい」「五角形、六角形などではどのようになるのだろうと思いました」のように、より一般的な課題に意識が向かう記述が多く見られた。また、「三角形では一辺が他の二辺の和よりも短くないので成立しない」という三角形が存在するための条件に気付いた生徒もいた。「三角形と四角形のちがいがよくわかった」「四角形から三角形がわかるとは思わなかった」といった図形の性質に気づいたことに触れたものもあった。

感想で1番多かったのは「自転車と同じ動きだと知ってすごいと思いました」のように身近な現象に潜んでいたことに対する素直な反応であった。また、「話し合いをして理解するのも、大切だと思った」のように、グループでの学習を肯定的に感じている記述が多く見られた。一方で「図形をうごかしたら分かるけど、説明するとなると難しかった」のように、説明が難しいという感想も複数見られた。

(4) 授業を終えて（反省と課題）

授業観察者との協議では、根拠が見えにくく目標に無理がある、正しい説明を求めたのかわかりやすい説明を求めたのか明確でなかった、個人で考える時間も必要だった、動線を描かせてはどうかといった指摘や提案があった。また、現実場面に潜む興味深い題材であること、生徒が自ら活発に調べている様子などについても話題になった。

生徒の反応や協議から、数学的活動の充実を図る題材として、てこクラック機構にも教材化の可能性があると考えられる。授業の構成を見直して、実践を重ねる必要がある。

5. おわりに

四節リンク機構を題材とする中学校第2学年の授業実践はこれまでも行われている。細矢(2009)⁶⁾では高等学校の数学Ⅱで学習する「軌跡」と関連した実践について報告されている。このように、てこクラック機構には様々な数学が関連しており、どのような扱いができるか引き続き考察したい。また、機構の種類は数多くあり、中学校や高等学校で学ぶ数学と関連するものもある。他の機構についても教材化の検討を行って、授業実践につなげていきたい。

6. 引用・参考文献

1) 文部科学省、『中学校学習指導要領解説 数学

- 編』, 教育出版, 2008, 15.
- 2) 文部科学省, 『中学校学習指導要領』, 東山書房, 2008, 56.
 - 3) 岡本和夫, 森杉馨, 佐々木武, 根本博 ほか, 『未来へひろがる数学3』, 啓林館, 2016, 86-90.
 - 4) 鈴木健司, 森田寿郎, 『基礎から学ぶ機構学』, オーム社, 2010, 60.
 - 5) 坪井俊 ほか, 『数学A』, 数研出版, 2016, 76-77.
 - 6) 細矢和博, 「頂点の動き方を調べよう [四節リンク機構を利用して]」, 『数学教育』, 2009, 75-79.
 - 7) 田口浩継 ほか, 『新編 新しい技術・家庭技術分野 未来を創る Technology』, 東京書籍, 2015, 118-119.

附記

本研究は JSPS 科研費 16H00168 の助成を受けたものである。