アイゼンシュタイン積分のハリッシュ・チャンドラ展開の係数のガンゴリー評価とハリッシュ・チャンドラのC関数の表示

小泉　伸

尾道短期大学経営情報学科

The Gangolli estimate for the coefficients of the Harish-Chandra expansions of the Eisenstein integrals and the expressions of the Harish-Chandra C-functions

Shin KOIZUMI

Faculty of Management and Information sciences,
Onomichi Jounior College, Onomichi 722-8506, Japan

要　　旨

第1章　序　　論

ユークリッド空間上のフーリエ変換に関する公式を扱うことから始まった調和解析は、その後Gel'fand, Helgason, Harish-Chandra, Arthur, Trombi, Eguchi等により半単純リー群や対称空間上に拡張され数学における中心的なテーマの一つになった。この拡張はフーリエ変換を関数のカシミール作用素の固有空間への分解と解釈することに基づいており、フーリエ変換とリー群の表現論との深い結びつきを表している。調和解析の基本的な問題の一つに関数空間のフーリエ変換による像を決定するという問題がある。代表的なものはコンパクトな台を持つ滑らかな関数のフーリエ像を決定したPaley-Wiener定理であるが、関数空間としては他にも(L^p-)急減少関数の空間などが考えられており、一般にフーリエ像の決定問題はPaley-Wiener型の定理と呼ばれている。例えば $K\backslash G/K$ の場合、Helgasonによって一部の未解決部分を残してPaley-Wiener定理が証明された。この場合フーリエ逆変換は帯球関数を掛けてPlancherel測度で積分することによって与えられるが、帯球関数は特別な群を除いて具体的に書くことができない。このためHarish-Chandraにより開発された帯球関数の漸近展開(Harish-Chandra展開)を用いることになる。この漸近展開の初項がHarish-Chandraのｃ関数でGindikin-Karpelevicにより具体的に計算されている。また漸近展開の第二項以降の係数の評価はGangolliにより与えられ、Gangolliはこの評価式を用いてHelgasonによる $K\backslash G/K$ のPaley-Wiener定理の未解決部分を解決した。我々は一般の半単純リー群で同様の問題を扱うために、一般の球関数(Eisenstein積分)に対してGangolli評価を拡張し、また$SU(n,1)$の場合でHarish-ChandraのＣ関数の具体形を与えた。

広島大学総合科学部紀要Ⅳ理系編、第24巻(1998)
*広島大学審査学位論文

第2章 主定理

Gを半単純リー群とし、$G=KAN$をそのIwasawa分解とする。また他の記号はKnapp[2]に従うものとする。このときEisenstein積分は

$$E(v:\nu:g)=\int_K \tau_1(\kappa(xk))v\tau_2(k)^{-1}e^{(\nu-\rho)(H(xk))}dk,\ (v\in V_M,\nu\in\mathfrak{a}^*,g\in G), \tag{1}$$

で与えられる。このEisenstein積分は帯球関数でKの単位表現の代わりに任意の既約表現を考えたもので、主系列の表現の行列要素を与える。またEisenstein積分の漸近展開も帯球関数の場合と同様の方法でHarish-Chandraにより与えられており、Harish-Chandra展開と呼ばれている。

$$h^\rho E(v:\nu:h)=\sum_{w\in W(A)}\Phi(w\nu:h)C_\tau(w:\nu)v,\ (v\in V_M,h\in A^+,\nu\in\Upsilon_0), \tag{2}$$

$$\Phi(\nu:h)=\sum_{\lambda\in L}\Gamma_\lambda(\nu-\rho)h^{\nu-\rho}. \tag{3}$$

Harish-Chandra展開はEisenstein積分がカシミール作用素の動径成分から導かれる微分方程式を満たすことから得られたものであるが、この漸近展開の初項の係数$C_\tau(w:\nu)$がHarish-ChandraのＣ関数で、高次の係数Γ_λはこの微分方程式から導かれるある漸化式により順次決定される。一般のEisenstein積分の場合、この漸化式の中にKの既約表現を含む項が現れるため、係数の中にこの既約表現からくる極が現れることになる。Helgason, Johnson, Arthur, Trombi等は独立に漸近展開の係数にこの極を打ち消すような多項式を掛けることにより係数の一つの評価を与え、その評価をPaley-Wiener型の定理の証明の中で用いた。しかし彼らの評価は漸近展開の係数に多項式を掛けたものが指数増大度で押さえられることを示しており、Gangolliが帯球関数の場合に与えた評価より粗い評価となっている。我々はGangolliが行った方法をEisenstein積分の場合に改良することによって、Kの既約表現からくる極を打ち消す多項式を漸近展開の係数に掛けたものが、次のように多項式増大度で押さえられることを示した。

定理１　ある多項式$P_\lambda(\nu),(\lambda\in L)$と$D,d_1>0$が存在して、すべての$\nu\in R$に対して次が成り立つ。

$$\|P_\lambda(\nu)\Gamma_\lambda(\nu-\rho)\|\le D(1+\|\nu\|+m(\lambda))^{2d}m(\lambda)^{d_1}. \tag{4}$$

この定理によりHelgasonによるG/KのPaley-Wiener定理の簡単な別証明を得ることができる。またTrombiによる階数１の半単純リー群のK有限なL^p-急減少関数に対するPaley-Wiener型定理の簡単な別証明も得られている。

Harish-ChandraのＣ関数はKnappとSteinにより開発された主系列の表現の間のintertwining作用素とも関連し、主系列以外の表現の主系列の表現の中への埋め込みを与えることができるので、リー群の表現論の中で重要な位置を占めるものである。Harish-ChandraのＣ関数の計算は階数１のリー群の場合に帰着できることが知られており、$SU(n,1)$の場合での具体形を得ることが重要である。我々の方法は主系列表現の無限小作用素を具体的に計算することにより、Harish-ChandraのＣ関数の漸化式を作成することに依るものである。$SU(n,1)$のHarish-ChandraのＣ関数の具体形は次で与え

られる。

定理2 $\mu \in D_M$を最高ウエイトにもつ既約表現σ_μと$\lambda \in D_K$を最高ウエイトにもつ既約表現τ_λに対して、$[\tau_\lambda : \sigma_\mu] \neq 0$であれば、$SU(n,1)$のHarish-ChandraのC関数は次で与えられる。

$$(5) \qquad C_{\tau_\lambda}(\sigma_\mu : \nu) = \frac{(n-1)!2^{-\nu+n}\Gamma(\nu)\prod_{j=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{\nu-n-|\sigma_\mu|}{2}+j-\mu_j\right)\prod_{j=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{\nu+n+|\sigma_\mu|}{2}-j+\mu_j\right)}{\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\nu-n-|\sigma_\mu|}{2}+j-\lambda_j\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\nu+n+|\sigma_\mu|}{2}-j+1+\lambda_j\right)}$$

Cohnは一般にHarish-ChandraのC関数の行列式がガンマ関数の積商で書けることを示し、その零点はKの表現の最高ウエイトの有理数係数の線形和で書けるということを予想した。我々は零点の具体的表示を得ることによって、この予想が$SU(n,1)$の場合に正しいことを示した。また[1]により$Spin(n,1)$のHarish-ChandraのC関数の具体形も得られており、これより次の系を得る。

系1 Cohn予想は$SU(p,q)$で正しい。

またHarish-ChandraのC関数の具体形を用いて、$SU(n,1)$のすべての既約ユニタリ表現を内積も含めて具体的に実現することができる。更にKraljevićの結果を用いて、$SU(n,1)$のすべての離散系列の表現の主系列の表現の中での埋め込みを実現した。

第3章　離散系列の分解

主定理の応用として、離散系列の表現の埋め込みを用いて、$SU(n,1)$の正則離散系列と反正則離散系列の表現を$U(n\text{-}1,1)$に制限したときの既約分解を与えることができる。これらの結果はMartensによって得られているが、我々の証明は正則離散系列と反正則離散系列の表現のKスペクトルの構造のみを用いており、不変部分空間を具体的に実現できる利点がある。我々の証明は離散系列の表現を$U(n\text{-}1,1)$の極大コンパクト部分群に制限したときの表現空間の分解を与えたのち、$U(n\text{-}1,1)$のCartan分解のベクター部分の作用で不変な部分空間を構成するもので、Johnson, Wallachがクラス1の表現の組成列を決定した方法の拡張である。ΛをHarish-Chandraパラメータとする離散系列の表現を(π_Λ, V_Λ)で表すことにする。

定理3 $SU(n,1)$の正則離散系列と反正則離散系列の表現を$U(n\text{-}1,1)$に制限したときの既約分解は次で与えられる。(cf. [1])

(1) 正則離散系列の場合。

$$V_\Lambda = \sum_{\substack{\ell \in S_c^+ \\ \beta \in S_m}} \mathcal{V}(\ell,\beta) + \sum_{\substack{\ell \in S_c^- \\ \beta \in S_m \\ |\beta| \geq |\lambda_m| - \ell}} \mathcal{V}(\ell,\beta).$$

ここで$\mathcal{V}(\ell,\beta)$のBlattnerパラメータは$(-(n+1)\ell, \beta)$である。

(2) 正則離散系列の場合。

$$V_\Lambda = \sum_{\substack{\ell \in \tilde{S}_c^+ \\ \beta \in \tilde{S}_m}} \mathcal{W}(\ell, \beta) + \sum_{\substack{\ell \in \tilde{S}_c^- \\ \beta \in \tilde{S}_m \\ |\beta| \geq |\lambda_m| - \ell}} \mathcal{W}(\ell, \beta).$$

ここで$W(\ell, \beta)$のBlattnerパラメータは$(-(n+1)\ell, \beta)$である。

我々の方法では離散系列のKスペクトルの構造と主系列の表現の無限小作用素のみを用いているので、正則離散系列と反正則離散系列の表現以外の表現、例えば非正則離散系列の表現や非退化な離散系列の極限を$U(n\text{-}1,1)$に制限したときの既約分解などにも適応可能である。非退化な離散系列の極限の場合はVargasにより同様の既約分解が得られているが、不変部分空間の具体形は得られていない。また非正則離散系列の表現の場合は$n=2$の場合にのみXieにより不変部分空間の具体形が構成されている。我々の結果によりこれらの結果を$SU(n,1)$の場合に拡張することができる。

参考文献

[1] Masaaki EGUCHI, Shin KOIZUMI and Masaichi MAMIUDA, The Expressions of the Harish-Chandra C-functions of semisimple Lie groups Spin(n,1), SU(n,1), J. Math. Soc. Japan, Vol. 51, No. 4, 1999.

[2] A. W. Knapp, Representation Theory of Semisimple Groups, An Overview Based on Examples, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1986.