広島大学附属中・高等学校研究紀要
〈第47号　2000〉

階差数列の和の考えを逆利用した数列の和の求め方

河　野　芳　文

数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は，$n \geq 2$ のとき，この数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を用いて，公式 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ から求められる場合がある。その場合，重要なことは b_k が分かっていることであるが，この考え方を発展させて解釈すれば，与えられた数列 $\{a_n\}$ に対し，n の関数 $f(n)$ で，$f(n+1)-f(n)=a_n$ をみたすものがとれるならば，$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\{f(k+1)-f(k)\} = f(n+1)-f(1)$ によって数列の和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求められることになる。本論文は，この観点から，数列の和を求める方法を一貫して扱ったものである。

1. はじめに

数列 $\{a_n\}$ が具体的に与えられているにも関わらず，その一般項 a_n を n の式として表すことが困難なことは多い。その場合，我々はこの数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$をとり，その一般項 b_n の形が分かれば，“$n \geq 2$ のとき，$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ が成り立つ” という事実を利用して，a_n が求められることもある。

重要なことは，b_k が k の式として表され，その和 $\sum_{k=1}^{n-1} b_k$ が求められることであり，式の和

$$\begin{aligned} a_n - \cancel{a_{n-1}} &= b_{n-1} \\ \cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}} &= b_{n-2} \\ &\cdots\cdots \\ +)\quad \cancel{a_2} - a_1 &= b_1 \\ \hline a_n - a_1 &= \sum_{k=1}^{n-1} b_k \end{aligned}$$

が有効に働いているからである。(もちろん，b_k がすぐに分からないとき，数列 $\{b_n\}$ の階差数列 $\{c_n\}$ をとって考えなければならないこともあり得る。)

しかし，これを逆に考えて，b_k の形は分かっていて，$\sum_{k=1}^{n-1} b_k$ が計算できるかどうかによらず，

$$a_k - a_{k-1} = b_k$$

をみたす a_k があるならば，

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = a_{n+1} - a_1$$

を利用して，数列 $\{b_n\}$ の和を求めることができるはずである。

このような考えに従って，数列 $\{a_n\}$ に対し，

$$f(n+1) - f(n) = a_n$$

をみたす n の関数 $f(n)$ を構成し，数列の和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求める方法についてまとめたのが以下の内容である。

2. 等差数列・等比数列の和の公式

一般に，$f(n)$ が n の1次以上の多項式であれば，$f(n+1)-f(n)$ の次数は $f(n)$ の次数より1小さい多項式となる。この事実を利用すると，等差数列の和の公式を求めることができる。

定理1． 初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は，

$$S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

で与えられる。ただし，$d \neq 0$ とする。

∵　$a_n = a+(n-1)d = dn+(a-d)$ であるから，n の2次式 $f(n) = pn^2+qn+r$ で，

$$f(n+1) - f(n) = a_n$$

をみたすものを求める。

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= p(n+1)^2 + q(n+1) + r \\ &\quad -(pn^2+qn+r) \\ &= 2pn + p + q \end{aligned}$$

であるから，恒等式の考えにより，

$$2p = d,\ p+q = a-d$$

r は任意だから，$r=0$ とすると，

$$p = \frac{d}{2},\quad q = a-d-\frac{d}{2} = a-\frac{3}{2}d$$

したがって，

$$f(n) = \frac{d}{2}n^2 + (a-\frac{3}{2}d)n$$

とおくことができる。このとき，

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= a_n \\ f(n) - f(n-1) &= a_{n-1} \\ &\cdots\cdots \\ +)\quad f(2) - f(1) &= a_1 \\ \hline f(n+1) - f(1) &= \sum_{k=1}^{n} a_k \end{aligned}$$

An Investigation of Finding the Sum of a Sequence Based on the Idea of the Sequence of Difference
Yoshifumi KOHNO

であるから，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = f(n+1) - f(1)$$
$$= \frac{d}{2}(n+1)^2 + (a - \frac{3d}{2})(n+1) - (\frac{d}{2} + a - \frac{3d}{2})$$
$$= \frac{d}{2}(n^2+2n) + (a - \frac{3}{2}d)n$$
$$= \frac{n}{2}(nd + 2d + 2a - 3d)$$
$$= \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$$

（証明終）

（例題１）初項３，公差４の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

∵ $f(n) = 2n^2 - 3n$ であるから，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = f(n+1) - f(1)$$
$$= 2(n+1)^2 - 3(n+1) - (-1)$$
$$= 2n^2 + n$$
$$= n(2n+1)$$

（別解）定理より，

$$S_n = \frac{n\{6 + 4(n-1)\}}{2} = n(2n+1)$$

一方，$pr^n - pr^{n-1} = (pr-1)r^{n-1}$ であるから，等比数列の和について，次の定理を証明することができる。

定理． 初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすれば，

$$S_n = \begin{cases} na & (r=1) \\ \dfrac{a(r^n-1)}{r-1} & (r \neq 1) \end{cases}$$

が成り立つ。

∵ $r=1$ のときは明らか。

$r \neq 1$ のとき，$f(n) = pr^{n-1}$ とおけば，

$$f(n+1) - f(n) = pr^n - pr^{n-1}$$
$$= (pr - p)r^{n-1}$$

これが $a_n = ar^{n-1}$ に等しいと考えると，

$$p(r-1) = a \quad \therefore p = \frac{a}{r-1}$$

よって，

$$f(n) = \frac{a}{r-1} r^{n-1}$$

これより，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = f(n+1) - f(1)$$
$$= \frac{a}{r-1} r^n - \frac{a}{r-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

（証明終）

（例題２）初項５，公比３の等比数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

∵ $f(n) = \dfrac{5}{3-1} \times 3^{n-1} = \dfrac{5}{2} \times 3^{n-1}$

であるから，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = f(n+1) - f(1)$$
$$= \frac{5}{2} \times 3^n - \frac{5}{2} = \frac{5(3^n-1)}{2}$$

（別解）定理の公式より

$$S_n = \frac{5(3^n-1)}{3-1} = \frac{5(3^n-1)}{2}$$

等差数列，等差数列の和 S_n についてはすでによく知っていることもあり，上述の解法については奇異な感じを抱くであろう。

3. $\sum_{k=1}^{n} k^r$ の公式について

ここでは，我々は，

$f(n+1) - f(n) = n^r$ （r は自然数）

をみたす n の $r+1$ 次の多項式 $f(n)$ を求めなければならない。

定理． 次の公式が成り立つ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

∵ (1) まず，

$f(n+1) - f(n) = n$

をみたす n の２次式 $f(n) = pn^2 + qn + r$ を求めてみよう。

$$f(n+1) - f(n) = p(n+1)^2 + q(n+1) + r$$
$$- (pn^2 + qn + r)$$
$$= 2pn + (p+q)$$

より，

$2p = 1,\ p + q = 0$

であるから，

$p = \dfrac{1}{2},\ q = -\dfrac{1}{2},\ r$ は任意

$\therefore f(n) = \dfrac{1}{2}n^2 - \dfrac{1}{2}n$ （$r=0$ とした）

これから，

$$\sum_{k=1}^{n} k = f(n+1) - f(1)$$
$$= \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

(2) 次に，

$f(n+1) - f(n) = n^2$

をみたす n の３次式 $f(n) = pn^3 + qn^2 + rn + s$ を求め

てみよう。

$$f(n+1)-f(n)=p(n+1)^3+q(n+1)^2+r(n+1)+s-(pn^3+qn^2+rn+s)$$
$$=3pn^2+(3p+2q)n+p+q+r$$

これが n^2 に等しいから，

$3p=1$，$3p+2q=0$，$p+q+r=0$

$\therefore p=\frac{1}{3}$，$q=-\frac{1}{2}$，$r=\frac{1}{6}$，s は任意

よって，$s=0$ として

$$f(n)=\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

これより，

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=f(n+1)-f(1)$$
$$=\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}(n+1)-0$$
$$=\frac{(n+1)\{2(n+1)^2-3(n+1)+1\}}{6}$$
$$=\frac{(n+1)(2n^2+n)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(3)　更に

$$f(n+1)-f(n)=n^3$$

をみたす n の 4 次式 $f(n)=pn^4+qn^3+rn^2+sn+t$ を求めてみよう。

$$f(n+1)-f(n)=p(n+1)^4+q(n+1)^3+r(n+1)^2+s(n+1)+t-pn^4-qn^3-rn^2-sn-t$$
$$=4pn^3+(6p+3q)n^2+(4p+3q+2r)n+(p+q+r+s)$$

これが，n^3 に等しいから，

$4p=1$，$6p+3q=0$，$4p+3q+2r=0$

$p+q+r+s=0$

$\therefore p=\frac{1}{4}$，$q=-\frac{1}{2}$，$r=\frac{1}{4}$，$s=0$

t は任意であるから，$t=0$ として，

$$f(n)=\frac{1}{4}n^4-\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2$$

とおくと，

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=f(n+1)-f(1)$$
$$=\frac{1}{4}(n+1)^4-\frac{1}{2}(n+1)^3+\frac{1}{4}(n+1)^2-0$$
$$=\frac{(n+1)^2}{4}\{(n+1)^2-2(n+1)+1\}$$
$$=\frac{(n+1)^2}{4}\cdot\{(n+1)-1\}^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

（証明終）

（例題 3）次の和を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2-6k+1)$$

$\because$　与式 $=3\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$$=3\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-6\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$=\frac{n}{2}\{(n+1)(2n+1)-6(n+1)+2\}$$
$$=\frac{n}{2}(2n^2-3n-3)$$

なお，定理の証明における $f(n)$ が (1)，(2)，(3) のそれぞれについて，

$$f(n)=\frac{n(n-1)}{2},\ \frac{n(n-1)(2n-1)}{6},\ \frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

になっていることを注意しておきたい。

4.　いろいろな数列の和の計算

これまでの話は，周知の事実を無理に階差の考えで整理し直すといった感が強かったが，以下で扱う例の中には，これまでに使った考え方で処理した方がはるかにうまくいくものがあることを了解できるであろう。

一般に，高等学校において扱われる数列は等差数列，等比数列が中心であり，他の数列の多くもこれらに Σ や乗法，除法などを有限回くり返して得られるものがほとんどである。

そのような数列の和を一般化して体系的に述べることも可能であるが，ここでは例題の形で扱うことにする。

（例題 1）数列 $\{a_n\}$ が

$$\frac{1}{2\cdot5},\ \frac{1}{3\cdot6},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{(n+1)(n+4)},\ \cdots\cdots$$

で与えられるとき，初項から第 n 項までの和 S_n を n の式で表せ。

$\because$　一般項 a_n を変形すると，

$$a_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+4}\right)$$

であるから，$f(n)=\frac{1}{3(n+1)}$ とおくと

$$\begin{array}{rcl}
f(n)-f(n+3)&=&a_n\\
f(n-1)-f(n+2)&=&a_{n-1}\\
\cdots\cdots&&\\
f(2)\ -\ f(5)&=&a_2\\
+)\quad f(1)\ -\ f(4)&=&a_1\\
\hline
\sum_{k=1}^{3}f(k)-\sum_{k=n+1}^{n+3}f(k)&=&\sum_{k=1}^{n}a_k
\end{array}$$

よって,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)$$
$$=\frac{n(13n^2+81n+122)}{12(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

また,次のような場合もある。

(例題2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n が,

$$a_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+p)}\quad(p\geq 2)$$

で与えられるとき,初項から第 n 項までの和 S_n を n の式で表せ。

∵ $$a_n=\frac{1}{p-1}\left\{\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+p-1)}-\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots\cdots(n+p)}\right\}$$

であるから, $f(n)=\dfrac{1}{p-1}\cdot\dfrac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}$

とおくと,

$$\begin{array}{rl}
 & f(n)-f(n+1)=a_n\\
 & f(n-1)-f(n)=a_{n-1}\\
 & \cdots\cdots\\
 & f(2)-\ \ f(3)\ \ =a_2\\
+) & f(1)-\ \ f(2)\ \ =a_1\\
\hline
 & f(1)-f(n+1)=\sum_{k=1}^{n}a_k
\end{array}$$

したがって,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=f(1)-f(n+1)$$
$$=\frac{1}{p-1}\left\{\frac{1}{2\cdot3\cdot\cdots\cdot(p+1)}-\frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+p)}\right\}$$
$$=\frac{(n+2)(n+3)\cdots(n+p)-(p+1)!}{(p-1)(p+1)!(n+2)(n+3)\cdots(n+p)}.$$

(例題3) 次の数列 $\{a_n\}$

$1,\ 3\cdot3,\ 5\cdot3^2,\ \cdots\cdots,\ (2n-1)\cdot3^{n+1},\ \cdots\cdots$

の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

∵ $a_n=3^{n-1}(2n-1)$ であるから, $f(n)=3^{n-1}(pn+q)$ とおいて,

$$f(n+1)-f(n)=3^{n-1}(2n-1)$$

をみたす p, q の値を求める。

$$3^n\{p(n+1)+q\}-3^{n-1}(pn+q)=3^{n-1}(2n-1)$$

より,

$$3pn+3p+3q-pn-q=2n-1$$
$$2pn+(3p+2q)=2n-1$$

これを n の恒等式とみて解くと,

$$2p=2,\ 3p+2q=-1$$
$$\therefore p=1,\ q=-2$$

そこで, $f(n)=3^{n-1}(n-2)$ とおくと,

$$\begin{array}{rl}
 & f(n+1)-f(n)=a_n\\
 & f(n)-f(n-1)=a_{n-1}\\
 & \cdots\cdots\\
+) & f(2)-f(1)=a_1\\
\hline
 & f(n+1)-f(1)=\sum_{k=1}^{n}a_k
\end{array}$$

よって,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=f(n+1)-f(1)$$
$$=3^n(n-1)-(-1)$$
$$=3^n(n-1)+1.$$

(別解) 次は通常用いる解法である。

$$\begin{array}{rl}
 & S_n=1\cdot1+3\cdot3+5\cdot3^2+\cdots+(2n-1)\cdot3^{n-1}\\
-)& 3S_n=\qquad\ 1\cdot3+3\cdot3^2+\cdots+(2n-3)\cdot3^{n-1}+(2n-1)\cdot3^n\\
\hline
 & -2S_n=1+2(3+3^2+\cdots3^{n-1})-(2n-1)\cdot3^n
\end{array}$$
$$=1+2\times\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}-(2n-1)\cdot3^n$$
$$=1+3^n-3-(2n-1)\cdot3^n$$
$$=-(2n-2)\cdot3^n-2$$

したがって,

$$S_n=\frac{-(2n-2)\cdot3^n-2}{-2}=(n-1)\cdot3^n+1.$$

解答を見る限りにおいては別解の方が簡明であるが,解法の発展性ということまで考えると,別解には限界がある。

たとえば,次のような例題を考えてみれば明らかである。

(例題4) 次の数列 $\{a_n\}$

$2,\ 7\cdot3,\ 18\cdot3^2,\ 35\cdot3^3,\ 58\cdot3^4,\ \cdots\cdots$

の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

∵) まず,次の数列を $\{c_n\}$ として,

$2,\ 7,\ 18,\ 35,\ 58,\ \cdots\cdots$

の一般項を求めてみよう。この数列の階差数列は

$5,\ 11,\ 17,\ 23,\ \cdots\cdots$

であるから,一般項を b_n とすれば,

$$b_n=5+(n-1)\cdot6=6n-1$$

が成り立つ。したがって, $n\geq2$ のとき

$$c_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(6k-1)$$
$$=2+6\times\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)$$
$$=3n^2-4n+3$$

この式で, $n=1$ とおくと2を得るから,

$$c_n=3n^2-4n+3$$

したがって,与えられた数列 $\{a_n\}$ の一般項は,

$$a_n=3^{n-1}(3n^2-4n+3)$$

で与えられる。

そこで，$f(n)=3^{n-1}(pn^2+qn+r)$ とおき，

$$f(n+1)-f(n)=a_n$$

を満たすように，p，q，r の値を定める。

$$\begin{aligned} f(n+1)-f(n) &= 3^n\{p(n+1)^2+q(n+1)+r\} \\ &\quad -3^{n-1}(pn^2+qn+r) \\ &= 3^{n-1}\{2pn^2+(6p+2q)n \\ &\quad +(3p+3q+2r) \end{aligned}$$

であるから，

$$2p=3,\ 6p+2q=-4,\ 3p+3q+2r=3$$

これより

$$p=\frac{3}{2},\ q=-\frac{13}{2},\ r=9$$

よって，$f(n)=3^{n-1}(\frac{3}{2}n^2-\frac{13}{2}n+9)$ とおくと，

$$\begin{array}{rl} & f(n+1)-\cancel{f(n)}=a_n \\ & \cancel{f(n)}-\cancel{f(n-1)}=a_{n-1} \\ & \cdots\cdots \\ +) & \cancel{f(2)}\ -f(1)=a_1 \\ \hline & f(n+1)-f(1)=\sum_{k=1}^{n}a_k \end{array}$$

より，

$$\begin{aligned} S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k &= f(n+1)-f(1) \\ &= 3^n\{\frac{3}{2}(n+2)^2-\frac{13}{2}(n+1)+9\} \\ &\quad -(\frac{3}{2}-\frac{13}{2}+9) \\ &= \frac{3n(3n^2-7n+4)}{2}-4 \end{aligned}$$

これを一般化して，

定理. 数列 $\{a_n\}$ の一般項が，n の ℓ 次の多項式 $g(n)$ と定数 p ($p\neq 0$, $\mathrm{p}\neq 1$) により，

$$a_n=p^{n-1}\cdot g(n)$$

で与えられるとき，

1）n の ℓ 次の多項式 $h(n)$ で，$f(n)=p^{n-1}\cdot h(n)$ とおくとき，

$$f(n+1)-f(n)=a_n$$

をみたすものが存在する。

2）1）のように，$f(n)$ をとるとき，

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=f(n+1)-f(1)$$

が成り立つ。

∵ 1）$g(n)=s_0n^\ell+s_1n^{\ell-1}+\cdots\cdots+s_\ell$ として，$h(n)=t_0n^\ell+t_1n^{\ell-1}+\cdots\cdots t_\ell$ とおくと，

$$\begin{aligned} & f(n+1)-f(n) \\ &= p^n\{t_0(n+1)^\ell+t_1(n+1)^{\ell-1}+\cdots\cdots+t_\ell\} \\ &\quad -p^{n-1}(t_0n^\ell+t_1n^{\ell-1}+\cdots\cdots+t_\ell) \\ &= p^n\{t_0\sum_{i=0}^{\ell}{}_\ell C_i\cdot n^i+t_1\sum_{i=0}^{\ell-1}{}_{\ell-1}C_i\cdot n^i+\cdots\cdots+t_\ell\} \\ &\quad -p^{n-1}(t_0n^\ell+t_1n^{\ell-1}+\cdots\cdots+t_\ell\} \\ &= p^{n-1}\{(pt_0-t_0)n^\ell+(pt_0\ell+pt_1-t_1)n^{\ell-1}+\cdots\cdots \\ &\quad +(pt_0+pt_1+\cdots\cdots+pt_\ell-t_\ell)\} \end{aligned}$$

であるから，

$$t_0(p-1)=s_0,\ pt_0\ell+t_1(p-1)=s_1,\ \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots,\ pt_0+pt_1+\cdots+pt_{\ell-1}+t_\ell(p-1)=s_\ell$$

を解いて，順に t_0，t_1，……，t_ℓ を求めることができる。この t_0，t_1，……，t_ℓ を用いて，

$$h(n)=t_0n^\ell+t_1n^{\ell-1}+\cdots\cdots t_\ell$$
$$f(n)=p^{n-1}\cdot h(n)$$

とおけば，

$$f(n+1)-f(n)=a_n\quad(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つ。

2）1）より，

$$\begin{array}{rl} & f(n+1)-\cancel{f(n)}=a_n \\ & \cancel{f(n)}-\cancel{f(n-1)}=a_{n-1} \\ & \cdots\cdots \\ +) & \cancel{f(2)}\ -f(1)=a_1 \\ \hline & f(n+1)-f(1)=\sum_{k=1}^{n}a_k \end{array}$$

が成り立つ。

（証明終）

本定理で述べた形の数列 $\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和 S_n を求めるには，素朴な形で $a_{n+1}-pa_n$ などを考えたりする方法もあるが，$g(n)$ の次数が高くなれば，このような操作を幾度も行わねばならず，面倒である。

定理で述べた方法は，２項間の漸化式の問題

「$a_1=a$, $a_{n+1}=pa_n+f(n)$，ただし，$p\neq 1$ で $f(n)$ は n の多項式」

の解法に通ずるもので，これを一般化したものと考えることができる。

それは，$f(n)$ と同じ次数の多項式 $g(n)$ をうまくとり，数列 $\{a_n-g(n)\}$が等比数列になるようにするもので，

$$a_{n+1}-g(n+1)=p\{a_n-g(n)\}$$

から，

$$a_{n+1}=pa_n+\{g(n+1)-pg(n)\}$$

と変形し，等式

$$g(n+1)-pg(n)=f(n)$$

が n についての恒等式となるようにするものである。この $f(n)$ が（等比数列）×（n の多項式）になったと考えればよい。

5. 終 わ り に

与えられた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めるために，階差数列をとることはしばしば有効である。この方法の有効性は，元の数列 $\{a_n\}$ の一般項が直接分からな

いにも関わらず，階差数列の一般項およびその和が求められる点にあるが，視点を変えて考えると，式

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geq 2)$$

したがって，式

$$a_{n+1} - a_1 = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

は，b_n を階差にもつ数列 $\{a_n\}$ の一般項が分かれば，数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $\sum_{k=1}^{n} b_k$ が求められることを主張している。

この事実は，数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n が分かっているとき，この数列を階差数列にもつ数列 $\{f(n)\}$ がとれれば，

$$f(n+1) - f(n) = a_n$$

であることを用いて，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = f(n+1) - f(1)$$

として求められることを意味する。

このような観点から数列およびその和を見直し，一歩を進めたのが本論文の内容であるが，これは関数の定積分計算において，被積分関数 $f(x)$ の不定積分 $F(x)$ を求めて，

$$F(b) - f(a) = \int_a^b f(x)dx$$

とするのに対応する内容といえるであろう。

もっと整理し，より深い考察を加えるべきであろうが，今は十分な時間も取れないまま，とりあえずこのような不十分な形で発表いたします。

参考文献

1) 那須俊夫，平林一栄編「改訂版　高等学校数学A」第一学習社，2000年
2) 宮原　繁「モノグラフ　漸化式」科学新興社，1998年
3) 楠　幸男「無限級数入門」朝倉書店，1979年