広島大学附属中・高等学校研究紀要
〈第47号　2000〉

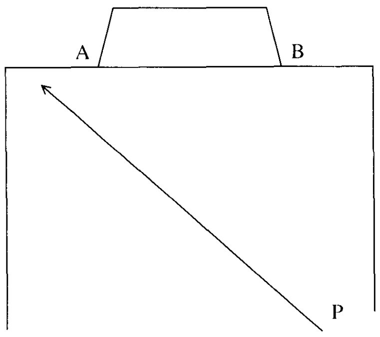
直線上の点から2定点を見込む角の最大値について

河　野　芳　文

円周角の定理は，一つの円とその上の弧ABをとるとき，弧AB外（内）の円周上の任意の点Pに対して，∠APBが一定であり，中心角∠AOBの半分に等しいことを主張する定理であるが，この定理の逆，円に内接する四角形の性質，方巾の定理などへと連なる一連の議論は，数学の結果の美しさとともに，数学的に考察することのよさを垣間みさせてくれるところでもある。本論文は，こうした学習教材に関連しながら，サッカーのシュートという生徒に身近かな問題を取り上げ，総合学習的要素を加味して作成した教材の実践報告である。

1.　は　じ　め　に

2002年度から始まる新学習指導要領では，円周角の定理に関連する一連の教材が2分されてその一方が高校に移される。これは，円周角の定理が美しく発展していく流れを絶つもので，残念なことではあるが，反面，総合的な学習の時間の創設により，数学が実際に役立ち，身近かな問題に関わってその問題解決に有益であることを示すことのできるチャンスが与えられたものとも考えられる。



このような考えから，次のような問題を考えることにした。

「サッカーの試合で，点Pの位置でボールをとらえた選手が，矢印の方向にドリブルし，2点A，Bを見込む角が最大となる地点P_0でシュートをする。点P_0の位置がどのような点であるかを答えよ。」

元来は，直線ℓとℓ上にない2点A，Bがあるとき，2点A，Bとℓ上の点Pがつくる角∠APBが最大となるような点Pを求める問題であった。しかし，それだけではあまり面白味がなく，自然な場面設定がないかと考えた。

たまたま，本校が使用している教科書に，サッカーボールをもった選手Pが∠APB＝90°をみたすように動くとき，選手Pが移動した跡はどんな図形の上にあるかとあったこと，および同僚の教師からサッカーのシュートという場面設定にしたらどうかとの助言をいただいたことから，生徒にとって身近な上のような場面設定に落ち着いた。

その場合，第1時間目で生徒にサッカーの競技の概要やルール，ポジションの役割について話したり，広島にあるサッカーチームのサンフレッチェの好きな選手についてその役割や戦績について調べさせることが有効であると考えられる。この1時間により，サッカーのルールを含めて，男女生徒ともこのスポーツに興味をもってくれることが期待できる上，第2時のサッカーのシュートに関する授業への興味付け，あるいは関心の高まりが期待できるからである。

実際の授業では，点P_0がどのような点であるかの特定までは試行錯誤をくり返しながらもたどりつけると思われるが，定規とコンパスを用いた点P_0の位置の作図には方巾の定理が関わっており，その着想，方巾の定理が内包する意味についての理解を期待することは難しいと思われた。したがって，この部分については，矢印の延長と直線ABとの交点Oを考え，O，A，B，Pの4点の間に成り立つ関係に目を向けさせることで克服させ，その後を切り抜けさせようと考えた。

こうした考察をもとにしても，1時間内でこの問題の解決をはかることは困難であり，その場合には作図による点P_0の位置の特定は次時にまわすことを考慮に入れた。

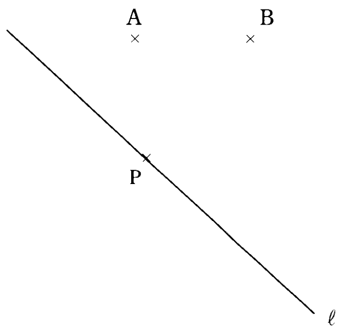
以下における内容は，私自身によるこの問題へのアプローチの仕方と，中学3年生に対する授業実践の報告である。

2.　課　題　の　考　察

我々が考察すべき第一の課題は，次の問題である。

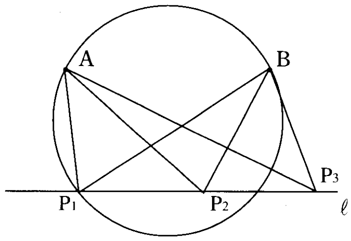
An Investigation on the Maximum Measure of Angle ∠APB Formed by a Point P on a Given Line and Fixed Points A & B
Yoshifumi KOHNO

課題 1． 右の図のように直線 ℓ と ℓ 外の 2 定点 A，B があるとき，ℓ 上の点 P で，$\angle APB$ が最大となるものを求めよ。



この問題を考察するにあたり，まず，特別ないくつかの場合について調べておこう。

最初は，2 点 A，B を結ぶ直線 AB が ℓ に平行な場合である。



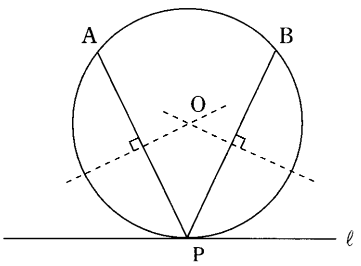
2 点 A，B を通り，直線 ℓ と交わる円をかき，ℓ 上の点 P_1，P_2，P_3 をそれぞれ円周上，円の内部，円の外部にとる。

すると，円周角の定理の逆の証明における考察から，

$$\angle AP_3B < \angle AP_1B < AP_2B$$

が分かり，したがって，求める点 P はこの円の内部の点であることが分かる。そこで，円と直線 ℓ の 2 つの交点の中点を P とすれば，P は線分 AB の垂直二等分線上にあるから，$AP = BP$ をみたす。

AP，BP の垂直二等分線の交点を O とし，O を中心とする半径 OA の円をかけば，この円は 3 点 A，B，P を通り，点 P で直線 ℓ に接することが示される。

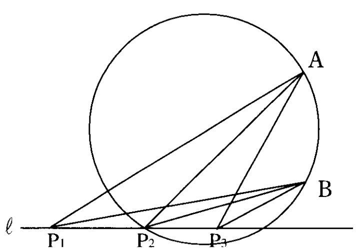


したがって，点 P 以外の ℓ 上の点 P′ はすべてこの円の外にあり，これから，

$$\angle APB > \angle AP'B$$

が従うから，点 P が求める点である。

次に，2 点 A，B を結ぶ直線 AB が直線 ℓ と垂直になる場合について考えてみる。



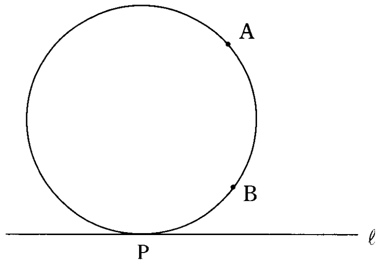
2 点 A，B を通り，直線 ℓ と交わる円をかき，図のように，円の外部，円周上，円の内部に 3 点 P_1，P_2，P_3 をとる。

すると，上の考察と同様にして，

$$\angle AP_1B < \angle AP_2B < \angle AP_3B$$

が成り立つから，求める点 P はこの円の内部にあることが分かる。

そこで，この円の半径を次第に小さくしていき，円が直線 ℓ に点 P で接する状態にすれば，点 P 以外の ℓ 上の点 P′ は円の外部にあるから，直線 AB に関して点 P と点 P′ が同じ側にある限り，



$$\angle APB > \angle AP'B$$

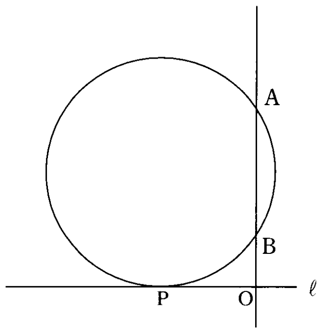
が成り立つ。したがって，この接点 P が求める点である。

なお，はじめの場合における点 P の作図は，線分 AB の垂直二等分線と ℓ との交点として容易に求められるが，2 つ目の場合は易しくはない。

そこで，2 つの場合に共通する内容を考察すれば，点 P が，2 点 A，B を通り，直線 ℓ に接する円と ℓ との接点であるという事実であり，直線 AB と直線 ℓ の交点 O があれば，方巾の定理から，

$$OP^2 = OA \cdot OB$$

が成り立つことである。



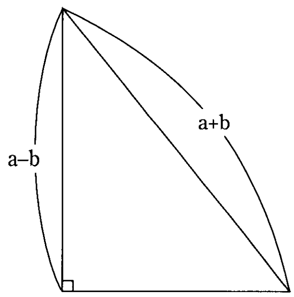
OA，OB は定数であるから，

$$OP = \sqrt{OA \cdot OB}$$

であり，問題は 2 つの正の実数 a，b が与えられたとき，定規とコンパスを使って $\sqrt{ab}$ を作図することができるかということになる。

定理　正の実数 $a, b\ (a > b)$ が与えられたとき，定規とコンパスを用いて $\sqrt{ab}$ を作図することができる。

(証明) これは，体論とよばれる理論を用いれば明らかであるが，より初等的な証明を与える。



明らかに，$a+b$，$a-b$ は作図可能であるから，$a+b$ を斜辺，$a-b$ を直角をはさむ 1 辺とする直角三角形を作図すれば，

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

である。よって，残る1辺の長さは，

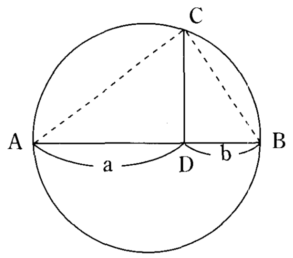
$$2\sqrt{ab}$$

である。

さらに，線分の垂直二等分線を引くことが可能であることを考慮すれば，$\sqrt{ab}$ が作図可能であることが分かる。

(別証) 次の方法もよく知られている。

まず，$a+b$ を直径とする円をかき，右の図のDからABに垂線をたてる。



この垂線と円との交点をCとすれば，ABは直径だから $\angle ACB=90°$ であり，

$$\Delta CAB \backsim \Delta DAC,\ \Delta DCB \backsim \Delta DAC$$

が成り立っている。このとき，

$$AD:CD=CD:DB$$

が成り立つから，

$$a:CD=CD:b$$

$$\therefore CD^2=ab$$

$CD>0$，$ab>0$ より

$$CD=\sqrt{ab}$$

したがって，CDが求める長さである。

(証明終)

以上により，$\sqrt{ab}$ の作図可能性が示された訳であるが，その証明の流れはそれ以前の話に対し，木に竹を接いだ感が否めない。$OP^2=OA\cdot OB$ の関係をうまく利用することはてきないであろうか。

方巾の定理 $OP^2=OA\cdot OB$ は，2点A，Bを通る円にAB上の点Oから接線OPを引くと，

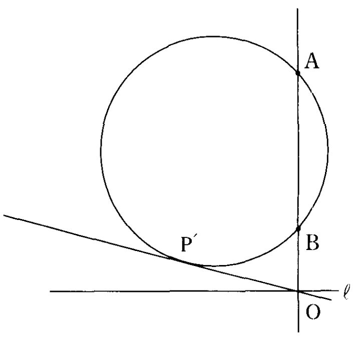
$$OP^2=OA\cdot OB$$

が成り立つと主張する定理であるから，とにかく2点A，Bを通る円を1つかき，Oからこの円に接線を引き，接点をPとすれば，円の大きさに無関係に

$$OP^2=OA\cdot OB$$

が成り立つ。したがって，円の大きさによらず，OPの長さは常に一定なのである。

このことを踏まえれば，次のような作図法が可能になる。



まず，2点A，Bを通る円をかき，直線AB，直線 ℓ の交点Oからこの円に接線を引く。その接点を P′ とすれば，方巾の定理により

$$OP'^2=OA\cdot OB$$

が成り立つから，

$$OP^2=OP'^2。$$

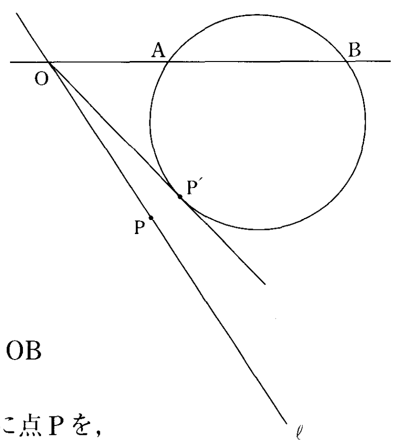
すなわち，$OP=OP'$ が成り立つ。

そこで，OP′ の長さを直線 ℓ 上にうつし，$OP=OP'$ が成り立つように点Pをとれば，この点Pが求める点になっている。

これまでの議論をふまえると，次の定理が証明できる。

定理　直線 ℓ と ℓ 上にない2定点A，Bがあるとき，ℓ 上の点Pで $\angle APB$ が最大となる点が存在する。この点Pは，2点A，Bを通り，直線 ℓ に接する円と直線 ℓ の接点である。

(証明) 2点A，Bを通る直線と直線 ℓ の交点をOとする。



2点A，Bを通る円をかき，Oからこの円に接線 OP′ をひくと，

$$OP'^2=OA\cdot OB$$

が成り立つ。

そこで，ℓ 上に点Pを，Pが直線ABに関して P′ と同じ側にあり，$OP=OP'$ をみたすようにとれば，3点A，B，Pを通る円がただ1つかける。この円と直線 ℓ の共有点をP，P″ とすれば方巾の定理により，

$$OP\cdot OP''=OA\cdot OB$$

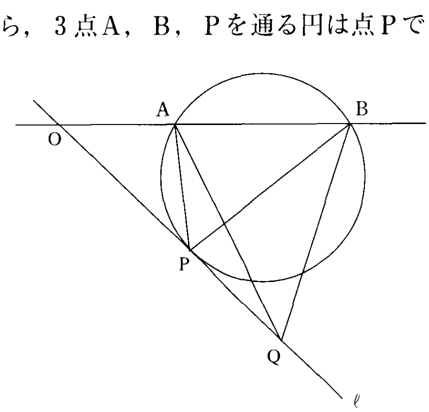
が成り立つ。一方，点Pの取り方により

$$OP^2=OA\cdot OB$$

が成り立つから，

$$OP^2=OP\cdot OP''$$

これから，$OP=OP''$，すなわち，$P=P''$ であることが導かれるから，3点A，B，Pを通る円は点Pで直線 ℓ と接することが分かる。



したがって，直線 ℓ 上の点Qを点Oに関して，Pと同じ側にとれば，点Qは，3点A， B，Pを通る円の外側にあり，

$$\angle APB > \angle AQB$$

が成り立つ。

点Pのとり方は，一応2通り考えられるから2つの場合について，∠APB の大きさを比べて，∠APB がより大きい方をとればよい。

（証明終）

この定理について，筆者はまず直線 ℓ を x 軸にとり，2点A，Bの座標を A(a, b)，B(ka, kb)（ただし，k > 1），P (x, 0) として，余弦定理から，cos ∠APB を x で表し，その最小値を調べるという形をとったが，面倒な計算の後に $OP^2=OA\cdot OB$ にたどり着き，方巾の定理を意識するに到ったことを告白せねばならない。その結果，図形的考察に方針を変え，上記の定理にたどりつくことができたのである。

3.　授業実践の試み

中学3年生における図形分野の学習では，円周角の定理，円に内接する四角形の性質，三平方の定理などが中心になる。

一方，2002年度から実施される新学習指導要領の方針として，内容を精選して生徒が主体的に学習し，探究する形態が求められている。そのためには，実験，観察，操作活動なども積極的に取り入れ，生徒自身が見聞し，理解し，判断しながら学習できるよう配慮する必要がある。

このような考えから，中3の図形分野の学習では単に教科書に沿った流れの展開をするのではなく，生徒に問いかけたり，作図をさせたりしながら，幾分ペースを落として進めるよう心がけた。

たとえば，円と直線の節で，「円外の1点から，その円にひいた2つの接線の長さは等しい。」という定理が登場するが，

「教科書には，円外の点から2本の接線が引いてあるけど，どうやって引くの？」

「どうして，円の中心と接点を結ぶ半径は接線に垂直になるの？」

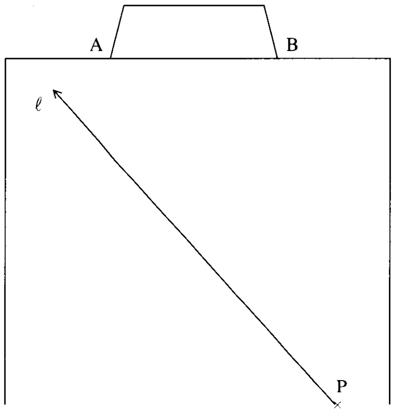
と投げかけると，しばし沈黙が続いたり，その後隣同志で議論し合ったりする姿が見られる。時には，1時間で半ページしか進まなかったり，日によっては，3～4ページ進むこともあったりする。

こうした授業の進め方は，授業者にとってはじれったく，退屈なことも多い。時間をかけた割に進まないため，進度の予定のずれることもある。

しかし，こうした授業の進め方の良い面であろうか，いつもより概念の理解や定理の定着がよく，今回の研究授業に対する不安はあまりなかったように思われる。

研究授業までの取り組みとしては，円の性質として円と弦，円と直線，円と円の関係を学んだ後，円周角の節で円周角と中心角，円周角の定理の利用，円周角の定理の逆について学び，続く円と四角形の節で，円に内接する四角形の性質，四角形が円に内接する条件，接線と弦のつくる角，円についての定理の利用ということで方巾の定理までを扱った。

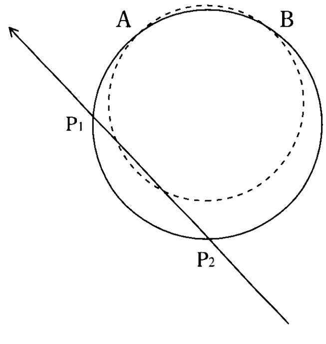
こうした学習内容を踏まえた上で，総合的な学習あるいは課題学習的な意味あいをもつ研究授業を行うことにし，冒頭にあげた課題を教材にすることにした。



授業のはじめにまず，課題を提示し，右の図をプリントにして配布した上で，図の矢印の上にいくつか点Pをとり，∠APB が最大となる点Pの位置について考えてみるよう投げかけた。

すると，生徒たちはいくつかの点Pをとり，∠APB の大きさを比べ始めた。

それからしばらくすると，およそ10名の生徒が2点A，Bを通る円と直線 ℓ の交点 P_1，P_2 に着目するようになった。そこで，そのうちの1人に尋ねると，



「2点A，Bを通る円と直線 ℓ の交点を P_1，P_2 として，P_1 と P_2 の中点Pが求める点であると思う。」とのことであった。

そこで，この意見を改めて説明した上で，他の生徒に投げかけると，同意を示す者もいたが，よく分からないと答える者も出てきたので，2点A，Bを通る円の半径を変えてみると，2つの円が直線 ℓ と交わってできる弦の中点が一致しそうにないことが分かってきた。

この結果をふまえて，生徒たちは隣同志で話し合ったりしていたが，何人かが気付き，

「2点A，Bを通る円で直線 ℓ に接するものをかき，その接点をPとすれば，この点が求める点です。」

という。その理由を尋ねると，

「点P以外の点は，この円の外にあるから，それを

P′とすると，∠APB より ∠AP′B が小さくなるからです。」
という。それを大きな声で発表するよう求めたが，恥ずかしがって答えないので，仕方なく，私の方でくり返して述べた。

その説明で，多くの生徒は納得したが，残る15分くらいの時間で，そのような円の作図法について変えてみるよう求めてみた。

すると，しばらくして一人の生徒が手をあげ，点Aを通り，AB に垂直な直線と ℓ の交点を求めれば，それが接点Pになるのではないかという。その理由を尋ねると，

「∠PAB = 90° になるから，PB は円の直径になり，この円は点Pで直線 ℓ に接するから。」
という。これは，こちらが準備したプリントからたまたま近似的に BP⊥ℓ が成り立ってしまったのであるが，
「BP⊥ℓ となる根拠がきちんと説明できるかな。」
との投げかけに，多くの生徒が熱心に取り組み，答えの出ないまま，終わりを迎えることになった。

しかし，授業後，何人かの生徒が声をかけてくれ，「今日の授業は，とても面白かった。」「２学期の授業で一番面白かったよ。」と評価してくれたことで，幾分救われた思いがした。

中学校　数学科学習指導案

指導者　河野　芳文

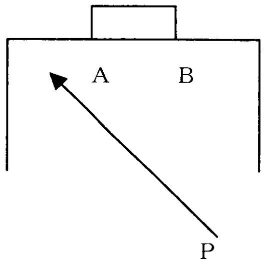
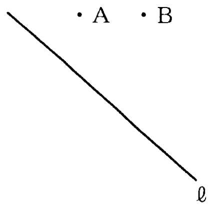
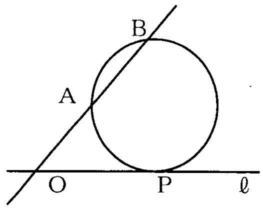
日　　時　2000(平成12)年 11月17日(金)　　第２限（11：10〜12：00）
場　　所　数学教室（２号館４階）
学年・組　中学校　第３学年Ｂ組（男子20名　女子20名　計40名）
題　　目　円の性質と四角形
目　　標　１．円の対称性に着目して，円の弦の性質，接線の性質や三角形の外接円，外心について理解を深めさせる。
２．円周角と中心角の関係に着目させながら，円周角の定理を理解させ，これを用いて円に関する性質を証明したり，簡単な問題解決ができるようにする。
３．円に内接する四角形の性質や4点が同一円周上にあるための条件を，円周角の定理などをもとに導き，理解させる。
４．弦と接線のつくる角と円周角の関係を理解させ，種々の場面で活用できるようにする。
時間配当　１．円の性質……………………………４時間
２．円周角………………………………４時間
３．円と四角形…………………………５時間
４．方べきの定理………………………２時間
５．課題学習……………………………３時間（本時はその第１時）
指導の経過と今後の計画

図形に関しては，中学２年で三角形や四角形を教材として，合同や相似などの概念を中心に平面図形の性質を理解させるとともに，見通しをもって推論したり，論理的に表現したりすることの大切さやよさを学習させている。さらに，中学３年では，これまでの学習をうけて，円に関連する性質，直角三角形に関する性質等を中心に学習し，見通しをもって図形を考察したり，論理的に表現する能力をいっそう伸ばすよう努める必要がある。

本時においては，円に関連した性質の学習を踏まえて，直線 ℓ 上を点Pが動くとき，点Pから ℓ 外の２定点A，Bを見込む角が最大となるようにその位置を特定すること，さらに，時間があれば，その位置の作図法について考察する。この題材の扱いを通して，方べきの定理を含めた円に関する性質の学習のまとめにしたいと考えるが，同時に，身近な問題を数学的に捉えなおし，合理的に解決する場面を設定することで，総合学習的要素をも加味したつもりである。

本時の題目　課題学習――ナイス　シュート！――２点を見込む角が最大となる点の決定
本時の目標　１．方べきの定理を含めた円に関連する性質の学習をふまえて，直線 ℓ 上の点Pで ℓ 外の２定点A，Bを見込む角が最大となるものがもつべき性質を考察させ，その位置を特定させる。特定できた点Pの位置を，作図により求める方法について考えさせる。
２．また，サッカーのシュートというより現実的な問題が，数学的な定式化により，合理的に考察でき，解決できることのよさを実感させたいと考えている。

本時の指導過程

学習内容	指導過程・学習活動	指導上の留意点
(課題の提示)	課題．サッカーの試合で，右図の位置にいるPが，ボールをとらえた。Pはいっきに矢印の方向に走り，ゴールめがけてシュートするつもりであるが，シュートを決めるためにも$\angle APB$が最大になる地点でシュートしたい。その地点を求めよ。 	・問題の意味を丁寧に説明し，理解させる。
(展開) 点Pの位置の解析	・2定点A，Bに対し，直線ℓ上の点Pをいくつかとり，点Pから2定点A，Bを見込む角$\angle APB$が最大となる点Pについて考えさせ，発表させる。  ・2定点A，Bを通る円を考え，円周角の性質との関係について考えさせた後，点Pの位置を答えさせる。	・点Pを3つ取り，$\angle APB$を図示する。 ・必要に応じて，2定点A，Bを通り，直線ℓと交わる円を図示する。
点Pの位置の作図 (まとめ)	・直線ABと直線ℓの交点をOとすると， $OP^2 = OA \cdot OB$ この関係を使って，点Pの位置を作図する方法はないか考えさせる。  1)．2定点A，Bを通る任意の円を描き，点Oからその円に接線を引き，接線の長さを求める方法について考えさせる。 2)．方べきの定理より，接線の長さは2点A，Bを通る円によらず一定であることに気付かせ，点Pの位置を作図させる。 ・点Pの位置の特性に基づく位置の特定法，並びにその作図法についてまとめる。	
備考	中学数学3（大阪書籍） 定規，コンパス	

4. 反省と課題

2年ぶりの中3の授業で，これまでの授業方法を改め，生徒に考えさせたり，操作活動を取り入れるよう心がけてきたが，心なしか生徒が意欲的になり，生き生きしていたように思われる。

しかし，そのために進度が定まらず，思わぬ時間をとられる場面や困惑する場面にも出合う結果になってしまった。

生徒にしっかり考えさせることには誰も異論はないと思われるが，教師主導の場面も必要であり，そのバランスの難しさに苦慮しているのが教員の姿のようにも思われる。

今回の授業では，点Pの位置の特定までは，生徒

とのやり取りを通じて何とか進めうるものと考えていたが，後半の点Ｐの位置の作図については，方巾の定理がからんでいることもあり，適当なタイミングで，直線ABと直線ℓの交点をＯとすれば，

$$OP^2 = OA \cdot OB$$

が成り立つことに気付かせる必要があったと思われる。問題はそのタイミングであったが，残り時間が15分程でもあり，生徒達が熱心に考察している段階でヒントを与えることは彼等の思考を中断させてしまいかねないとの思いから，その時間内でヒントを与えることは諦めた。

したがって，残りの部分は次時にまわさざるを得なかったが，その授業では多くの生徒が納得しながら聞いてくれたにも関わらず，研究授業時のような盛り上がりが見られなかったのは残念である。さらに研究授業の折，１名の男子生徒が直線 AB と直線ℓの交点Ｏを求め，方巾の定理に基づいて点Ｐの作図に成功していたことを後日知らされて，残念な思いと同時に申し訳ない思いがしたことであった。

協議会での意見では，

・生徒は結構意欲的であったが，発表した生徒が全体に分かるように，もう少し大きな声で発表して欲しかった。

・線分ABの垂直二等分線上に円の中心があることを利用して考察をすすめた者がいたのではないか。
→中心をそのようにとりながら，半径を変え，ℓに接する円を模索している生徒が数名いた。

・かなり難かしい課題であったが，点Ｐが円の内部，周上，外部にあるときで，∠APB がどのようになるかよく分かっていたように思う。そのあたりの指導はどうだったのか。
→一方的にこちらが指導するのではなく，実際の授業でも点をとらせてじっくり考えさせた。

・点Ａを通り，AB に垂直な直線にこだわった生徒がいたが。
→これは，私の図の設定がまずかったためだと思います。

・前半で，ある生徒が，点Ｐは２点Ａ，Ｂを通る円が直線ℓから切りとる弦の中点だと答えましたが，そのあと，そうでない例を示したのは流石だと思いました。

いろいろと問題点の多い授業であったが，一生懸命取りくんでくれた生徒に感謝するとともに，協議会で有益なアドバイスをいただいた先生方にもお礼を申し上げたい。

身近かにありそうな場面設定で，生徒が興味をもってくれそうな問題ということもあり，再度指導案を検討して，必要なら２時間分の教材として編成し直せればと考えている。

参考文献

1. 小平邦彦「幾何のおもしろさ」岩波書店，1985
2. 笹部貞市郎「幾何学辞典」聖文社，1986
3. 正田　実他「中学数学３」大阪書籍，1998