広島大学附属中・高等学校研究紀要
〈第46号　1999〉

複素数平面上の変換としての演算について

河　野　芳　文

高等学校数学における複素数の扱いは，１次方程式，２次方程式，高次方程式の解を考える流れの中で，これらの方程式が解をもつように数体を拡大する形で登場したと捉えることができる。これは，代数学の基本定理によって決着させられるものであり，興味深いものではあるが，その扱いはやや静的であり，複素数のすべての面を表しているとはいい難い。しかし，複素数平面が登場すると，複素数の演算の図形的意味が明らかとなり，我々は複素数をより視覚的，直感的に捉えることができる。さらに，演算を変換と捉えることにより，複素数のより動的な見方が可能となり，理解も深まるものと思われる。このような考えから，複素数の変換的側面を取り上げ，これによって複素数の図形的あるいは動的側面のよさを示そうと試みたものである。

1. はじめに

現指導要領の登場で１次変換の扱いが消えたが，多くの数学教育関係者はこれに変わるものは複素数の図形的扱いであろうと考えていたように思われる。

教科書においては複素数平面が登場し，演算の図形的意味や極形式，ド・モアブルの定理，２項方程式が扱われる中で，複素数の演算のもつ図形的意味を知らせるとともに，その幾何的応用が若干ではあるが扱われるようになった。

しかし，多くの教師にとって複素数平面の扱いは初めての経験であったり，20年ぶりの扱いであったため，充分円滑な指導ができるまでには日時を必要としたように思われる。

今回の私の取りくみも遅いとの誹りを受けるであろうが，数学Ｂの指導は２度目の経験であり，一度目の指導の経験をふまえた上での問題意識から生まれたものである。

複素数の扱いについては，まず実数係数の２次方程式が解をもつように実数体を拡大する形でこれを導入し，２次方程式の解の判別，解と係数の関係，因数定理，高次方程式といった流れで方程式を１つの柱として扱うが，この扱いはどちらかといえば静的であり，形式的に導入された数との印象が強い。虚数との呼称も影響していると思われるが，歴史的にも複素数が市民権を得るようになるには時間がかかっており，ガウスによる積極的利用が一役かっていることも周知の事実である。

ガウスによる複素数平面の導入は，単に複素数を視覚化したに留まらず，複素数の極座標表示と相俟って，複素数の四則演算の意味を視覚的，図形的に捉えることを可能にしたといえるが，さらに，この演算を複素数平面における変換と捉えることにより複素数の動的側面がより明確になると考えられる。

したがって，高校数学における複素数の扱いでは方程式論と変換の立場の双方をふまえることが大切であり，このいずれもが複素数のよさを知らせるためには不可欠であると考えられる。

このような観点に立ち，複素数の演算を変換の立場から捉えると

$$\varphi(z)=z\pm\alpha$$
$$\varphi(z)=\alpha z\ \ (\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta))$$
$$\varphi(z)=\frac{\alpha}{z}$$

は，それぞれ $\pm\alpha$ だけの平行移動，原点のまわりの角 θ の回転と原点を中心とする r 倍の拡大・縮小，逆数をとった後 α 倍する変換を表すものと理解することができる。

しかも，これらを有限回組み合わせて得られる変換は，

$$\varphi(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

の形に表されることから，我々にとって，１次分数変換を調べることが一つの目標になる。

そこで，平面上における基本的な図形である直線や円が１次分数変換により，どのような図形に写されるかを調べることが関心事となってくるのであるが，図形の形状という観点からは逆数をとる変換 $\varphi(z)=\dfrac{1}{z}$ の性質についての考察が本質的である。

こうした観点に従って考察を加えた上で，それに基づく授業展開の方法について考えてみたいと思う。

Operations of Complex Numbers as Transformations on the Complex Plane
Yoshifumi KOHNO

2. 複素数の四則演算と変換

複素数の演算を変換の立場から捉えると，どのような性質が見えてくるであろうか，以下において，この点について考察してみたい。

定義：複素数平面の各点 z に，複素数平面の点 w がただ一つ対応する規則 f が与えられているとき，この対応 f を複素数平面の変換といい，w を f による z の像という。そして，$w=f(z)$ と表す。f が複素数平面の変換であることを

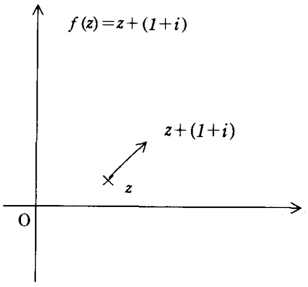
$$f: C \longrightarrow C$$

と表すことも多い。

加法・減法から導かれる変換として

1）平行移動 $f(z)=z+\alpha$

加法・減法 $z \pm z'$ の z' を定数 α にすると，z を $z \pm \alpha$ にうつす変換 $f(z)=z \pm \alpha$ が得られる。これは，複素数平面上の点を $\alpha\,(-\alpha)$ だけ平行移動する変換である。



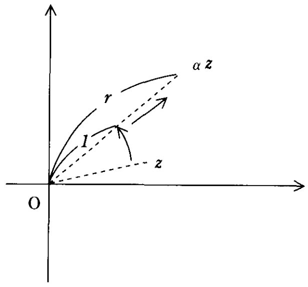
次に，乗法から導かれる変換として，

2）回転と拡大・縮小 $f(z)=\alpha z$

この変換は，乗法 zz' の z' を定数 α にして得られる変換 $f(z)=\alpha z$ で，$\alpha \neq 0$ のとき，

$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

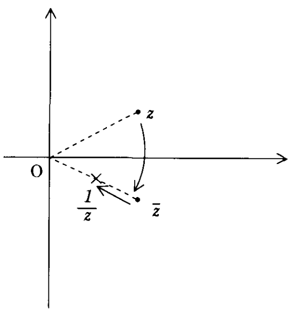
とすれば，z をOのまわりに θ だけ回転した後，Oを中心にして，r 倍に拡大・縮小する変換である。（$\alpha=0$ なら，すべての点を原点Oに写す。）



最後に，除法から導かれる変換であるが，これについては，$\dfrac{\alpha}{z}$ と $\dfrac{z}{\alpha}$ の2通りの変換が考えられる。しかし，後者は2）の場合に含まれるから，前者のみが新しい。

3）逆数をとり，α 倍する変換 $f(z)=\dfrac{\alpha}{z}$

この変換については，$f(z)=\alpha\cdot\dfrac{1}{z}$ であるから，変換 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ のみが問題となる。



しかし，

$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

であるから，この変換は，z の共役複素数をとった後，Oを中心として $\dfrac{1}{|z|^2}$ 倍に拡大・縮小した点に写す変換である。

複素数の四則から導かれる変換は以上の通りであるが，これらをいくつか合成して得られる変換はどのような形になるであろうか。

例として $f(z)=z-1$，$g(z)=\dfrac{2}{z}$，$h(z)=z+3$ として，合成 $(h\circ g\circ f)(z)$ を考えてみると

$$\begin{aligned}(k\circ g\circ f)(z) &= h\circ(g\circ f)(z)\\ &= h\left(\frac{2}{z-1}\right)\\ &= \frac{2}{z-1}+3=\frac{3z-1}{z-1}\end{aligned}$$

を得る。

したがって，次の定理を予想することができる。

定理1：複素数平面上の3つの変換を $f(z)=z+\alpha$，$g(z)=\alpha z$，$h(z)=\dfrac{\alpha}{z}\,(\alpha\neq 0)$ とするとき

1）これら3種類の変換をいくつか合成して得られる変換は

$$\varphi(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

の形の変換である。

2）$\varphi(z)=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\,(\alpha\delta-\gamma\delta\neq 0)$ の形の変換は，$f(z)$，$g(z)$，$h(z)$ の形の3種の変換の合成として表すことができる。

∵1）まず

$$\varphi(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},\ \psi(z)=\frac{pz+q}{rz+s}$$

とすると，

$$\begin{aligned}(\psi\circ\varphi)(z) &= \frac{p\cdot\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+q}{r\cdot\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+s}\\ &= \frac{(\alpha p+q\gamma)z+(p\beta+q\delta)}{(\alpha r+s\gamma)z+(r\beta+s\delta)}\end{aligned}$$

であるから，φ，ψ に2次の行列

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$$

を対応させれば，その合成 $\psi\circ\varphi$ には行列の積

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

が対応することに注意する。

このとき，3種類の変換 f, g, h に対しては $f(z)=\dfrac{z+\alpha}{0z+1}$，$g(z)=\dfrac{\alpha z+0}{0z+1}$，$h(z)=\dfrac{0z+\alpha}{z+0}$ より，それぞれ行列

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が対応すると考えることができるから，行列の積の性質により，3種の変換 f, g, h の合成の結果は，$\varphi(z)$ の形でなければならない。

なお，$\alpha\neq 0$ である限り，上の3つの行列はいずれも正則行列であるから，それらの積が

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

の形になることはない。したがって，$\varphi(z)$ が定数となることはない。

2）一般に，1次分数変換 $\varphi(z)=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ は，$\gamma=0$ のとき，条件より $\alpha\delta\neq 0$ であるから，$\varphi(z)=\dfrac{\alpha}{\delta}z+\dfrac{\beta}{\delta}=\dfrac{\alpha}{\delta}(z+\dfrac{\beta}{\alpha})$ であり，したがって，$f(z)=z+\dfrac{\beta}{\alpha}$，$g(z)=\dfrac{\alpha}{\delta}z$ の合成である。また，$\gamma\neq 0$ のとき

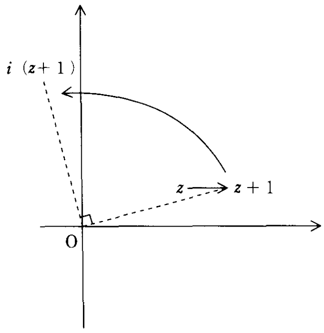
$$\varphi(z)=\frac{\beta-\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}}{\gamma z+\delta}+\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\dfrac{\beta}{\gamma}-\dfrac{\alpha\beta}{\gamma^2}}{z+\dfrac{\delta}{\gamma}}+\frac{\alpha}{\gamma}$$

と変形できるから，この変換は，3つの変換 $f(z)=z+\dfrac{\delta}{\gamma}$，$h(z)=\dfrac{\dfrac{\beta}{\gamma}-\dfrac{\alpha\beta}{\gamma^2}}{z}$，$g(z)=z+\dfrac{\alpha}{\gamma}$ の合成である。

（証明終）

例を1，2あげておこう。

例1）$f(z)=z+1$，$g(z)=iz$ とすれば，$(g\circ f)(z)=\mathrm{i}(z+1)$ である。



この変換は，z を実軸方向に1だけ平行移動した後，原点Oのまわりに90°回転する変換である。

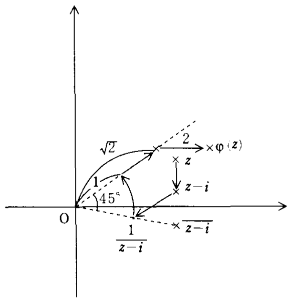
例2）$\varphi(z)=\dfrac{2z-i+1}{z-1}$

は，

$\varphi(z)=\dfrac{1+i}{z-i}+2$ と変形できるから，

$f_1(z)=z-i$，$h(z)=\dfrac{1+i}{z}$，

$f_2(z)=z+2$，の合成変換である。



定理により，直線あるいは円の1次分数変換 $\varphi(z)=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ による像を調べるには，3種類の変換 $f(z)=z+\alpha$，$g(z)=\alpha z$，$h(z)=\dfrac{\alpha}{z}$ による像が分かればよいが，このうち，$f(z)$，$g(z)$ による像はほぼ明らかである。したがって，我々の関心は，変換 $f(z)=\dfrac{\alpha}{z}$ あるいは $f(z)=\dfrac{1}{z}$ による像にある。

そこで，変換 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ による簡単な図形の像を調べてみよう。

複素数平面上の直線 l は，l 上の点 $\mathrm{A}(\alpha)$ と，l の方向を表す複素数 $\beta\,(\neq 0)$ を用いて

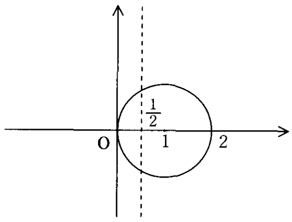
l：$z=\alpha+t\beta$　（t：実数）

と表すことができる。この形の方程式を用いて，いくつかの直線の逆数をとる変換 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ による像を求めてみよう。

例3）$z=0.5+ti$

これは直線 l の方程式において，$\alpha=0.5$，$\beta=i$ とおいて得られる実軸に垂直な直線であるが，実数 t に -4 から5まで0.3刻みの値を代入して，$f(z)=\dfrac{1}{z}$ による像をプロットさせると，それらの点はすべて円 $|z-1|=1$ の周上に並ぶ。このことから，求める像は円 $|z-1|=1$ であると予想される。

$$f(0.5+ti)=\frac{0.5-ti}{0.25+t^2}$$



この予想を証明してみよう。

証明１）

$$w=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{\frac{1}{2}-ti}{\frac{1}{4}+t^2}$$

$w=x+yi$ とおくと，

$$x=\frac{2}{1+4t^2},\ y=\frac{-4t}{1+4t^2}$$

であるから，

$$(x-1)^2+y^2=\frac{(1-4t^2)^2+16t^2}{(1+4t^2)^2}$$

$$=\frac{(1+4t^2)^2}{(1+4t^2)^2}=1$$

よって，求める像は $z=1$ を中心とする半径１の円である。（ただし，原点は除く。）

証明２）

$z=r\ (\cos\theta+i\sin\theta)\ (-90°<\theta<90°)$ とおくと，

$r\cos\theta=\frac{1}{2}$ であるから，$r=\frac{1}{2\cos\theta}$. よって，

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{r\,(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$=2\cos\theta\,(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$$

$$=2\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta\cdot i$$

$$=1+\cos 2\theta-\sin 2\theta\cdot i$$

$$=(\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta))+1$$

これより，求める像は $z=1$ を中心とする半径１の円を描く。ただし，$z=0$ は除く。）

証明３）

直線の式から t を消去して，直線の方程式

$$z+\bar{z}=1$$

を得る。

一方，$w=\frac{1}{z}$ であるから，$z=\frac{1}{w}$

これを上の方程式に代入して，

$$\frac{1}{w}+\frac{1}{\bar{w}}=1$$

$$w\bar{w}-w-\bar{w}=0$$

$$(w-1)(\bar{w}-1)=1$$

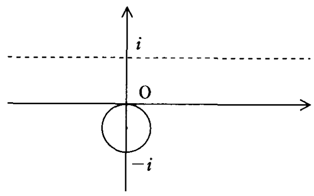
$$|w-1|^2=1$$

よって，求める像は $z=1$ を中心とする半径１の円である。（ただし，原点を除く。）

例４）$z=t+i$

これは，直線 l の方程式において，$\alpha=i$，$\beta=1$ とおいて得られる実軸に平行な直線であるが，実数 t に－４から５まで0.3刻みの値を代入して $f(z)=\frac{1}{z}$ による像をプロットさせると，それらの点はすべて円 $\left|z+\frac{1}{2}i\right|=\frac{1}{2}$ の周上に並ぶことが分かる。よって，求める像は円 $\left|z+\frac{1}{2}i\right|=\frac{1}{2}$ であると予想できる。

$$f(t+i)=\frac{1}{t+i}=\frac{t-i}{t^2+1}$$



これを証明してみよう。

証明１）

$$w=\frac{1}{z}=\frac{t}{t^2+1}-\frac{i}{t^2+1}$$

ここで，$w=x+yi$ とおくと，

$$x=\frac{t}{t^2+1},\ y=\frac{-1}{t^2+1}$$

であるから

$$x^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{t^2+(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2})^2}{(t^2+1)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}(t^2+1)^2}{(t^2+1)^2}=\frac{1}{4}$$

よって，求める像は $z=-\frac{1}{2}i$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円である。（ただし，原点は除く。）

証明２）

$z=r\ (\cos\theta+i\sin\theta)\ (0°<\theta<180°)$

とおくと，$r\sin\theta=1$ より，$r=\frac{1}{\sin\theta}$

よって

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$
$$=\sin\theta\,(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$$
$$=\sin\theta\cos\theta-i\sin^2\theta$$
$$=\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{1-\cos 2\theta}{2}i$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\cos(90^\circ-2\theta)+i\sin(90^\circ-2\theta)\right\}-\frac{i}{2}$$

これより，求める像は $z=-\frac{i}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円である。(ただし，原点Oは除く)

証明 3)

$z=t+i$ から t を消去して

$$z-\bar{z}=2i$$

一方，$w=\frac{1}{z}$ であるから，$z=\frac{1}{w}$

これを上の方程式に代入して

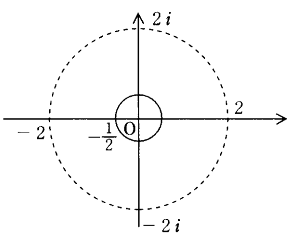
$$\frac{1}{w}-\frac{1}{\overline{w}}=2i$$
$$2iw\overline{w}+w-\overline{w}=0$$
$$w\overline{w}-\frac{i}{2}w+\frac{i}{2}\overline{w}=0$$
$$(w+\frac{i}{2})(\overline{w}-\frac{i}{2})=\frac{1}{4}$$
$$\left|w+\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

よって，求める像は $z=-\frac{i}{2}$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円である。(ただし，原点 0 を除く)

例 3) $|z|=2$

これは，原点を中心とする半径 2 の円であるから，この円周上のいくつかの点 $z=2$，$1.6+1.2\,i$，$1.2+1.6\,i$，……，$1.6-1.2\,i$ などをとり，$w=\frac{1}{z}$ でうつしてみると，それらの像はすべて，円 $|z|=\frac{1}{2}$ の円周上に並ぶ。

よって，求める像は円 $|z|=\frac{1}{2}$ であると予想できる。



これを証明してみよう。

証明 1)

$z=s+ti$，$s^2+t^2=4$ とすると，

$$w=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{s-ti}{s^2+t^2}=\frac{s-ti}{4}$$

$w=x+yi$ とおくと，

$$x=\frac{s}{4},\ y=-\frac{t}{4}$$

であるから，

$$x^2+y^2=\frac{s^2}{16}+\frac{t^2}{16}=\frac{s^2+t^2}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

したがって，求める像は原点を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円である。

証明 2)

原点を中心とする半径 2 の円の方程式は

$z=2\ (\cos\theta+i\sin\theta)$

と表されるから，

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{2(\cos\theta+i\sin\theta)}$$
$$=\frac{1}{2}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$$

よって，求める像は原点を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円である。

証明 3)

原点を中心とする半径 2 の円の方程式は，$|z|=2$ で与えられる。

一方，$w=\frac{1}{z}$ であるから，$z=\frac{1}{w}$

これを上の方程式に代入して

$$\left|\frac{1}{w}\right|=2$$

したがって，

$$|w|=\frac{1}{2}$$

以上より，求める像は原点を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円である。

以上の例から分かることは，原点を通らない直線や円は，逆数をとる変換により円に写されそうだということであるが，$f(z)=\frac{1}{z}$ の分母を 0 にする点，すなわち原点を通る直線や円の像はどうなるであろうか。

その例として，直線 $z=t\,(1+i)$ の像と，円 $|z-1|=1$ の像について，簡単に調べてみよう。$z=t\,(1+i)=t+ti$ とすれば，$t\neq 0$ のとき，

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{t(1+i)}=\frac{1-i}{2t}=\frac{1}{2t}(1-i)$$

tが0でない実数値をとって変わるとき，$\frac{1}{2t}$も0でないすべての実数値をとるから，直線$z=t+ti$の原点を除く点の像全体は，原点を除く直線$z=t\,(1-i)$を描く。

また，円$|z-1|=1$の上の原点を除く点zの$f(z)=\frac{1}{z}$による像wは，$w=\frac{1}{z}$，すなわち，$z=\frac{1}{w}$を用いて，

$$\left|\frac{1}{w}-1\right|=1$$

をみたす。したがって，

$$|w-1|=|w|$$

これは，0と1を結ぶ線分の垂直二等分線を表す。

この事実は，$f(z)=\frac{1}{z}$に対し，$f^{-1}(z)=\frac{1}{z}$であることを思えば，例3）から明らかであった。

これらのことから，次の定理が成り立つと予想できる。

定理2：複素数平面の変換$f: C\to C$が$f(z)=\frac{1}{z}$で与えられるとき，zのfによる像をwとすれば，

1）直線$z=\alpha+t\beta$（t：実数，$\beta\neq 0$）のfによる像は，

i）$\alpha /\!/ \beta$のとき，直線$w=s\cdot\frac{1}{\beta}$（s：実数，$s=0$の点を除く）

ii）$\alpha \not\parallel \beta$のとき，円$\left|w-\frac{\bar{\beta}}{\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta}\right|=\left|\frac{\beta}{\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta}\right|$

（ただし，点$w=0$を除く）

2）円$|z-\alpha|=r$のfによる像は，

i）$|\alpha|=r$のとき，直線$\left|w-\frac{1}{\alpha}\right|=|w|$

ii）$|\alpha|\neq r$のとき，

$\alpha=0$なら，円$|w|=\frac{1}{r}$

$\alpha\neq 0$なら，$|\alpha|\left|w-\frac{1}{\alpha}\right|=r|w|$をみたすアポロニウスの円である。

この定理を直接証明してもよいが，直線の場合と円の場合をあわせて証明するために，まず，次の定理を証明しておこう。

定理3：

1）任意の直線lの方程式は，lに関して対象な2点α，βをとって，

$$|z-\alpha|=|z-\beta|$$

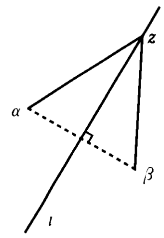
と表すことができる。

2）任意の円Cの方程式は，適当な2点α，βと1と異なる正の定数kを用いて，

$$|z-\alpha|=k|z-\beta|$$

と表すことができる。

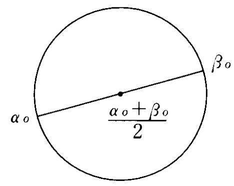
∵1）直線lに関して対称な2点α，βをとるとき，l上の任意の点zから2点α，βまでの距離は等しいから，



$$|z-\alpha|=|z-\beta|$$

逆に，zがこの関係式を満たせば，zはα，βを結ぶ線分の垂直二等分線l上にある。

2）円Cの1つの直径をとり，その両端の点をα_0，β_0とする。そして1と異なる正の数kをとり，



$$\begin{cases}\dfrac{1\alpha+k\beta}{k+1}=\alpha_0\\[2ex]\dfrac{-\alpha+k\beta}{k-1}=\beta_0\end{cases}$$

をみたす2点α，βをとる。

$\alpha+k\beta=(k+1)\alpha_0$

$-\alpha+k\beta=(k-1)\beta_0$

より，

$$\alpha=\frac{(k+1)\alpha_0-(k-1)\beta_0}{2}$$

$$\beta=\frac{(k+1)\alpha_0+(k-1)\beta_0}{2k}$$

であるが，zが方程式

$|z-\alpha|=k|z-\beta|$

をみたすとすれば，

$$|z-\alpha|^2=\left|z-\frac{(k+1)\alpha_0-(k-1)\beta_0}{2}\right|^2$$

$$=\left|\left(z-\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}-\frac{k(\alpha_0-\beta_0)}{2}\right)\right|^2$$

$$=\left|z-\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}\right|^2-\frac{k(\bar{\alpha}_0-\bar{\beta}_0)}{2}\left(z-\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}\right)$$

$$-\frac{k(\alpha_0-\beta_0)}{2}\left(\bar{z}-\frac{\bar{\alpha}_0+\bar{\beta}_0}{2}\right)+\frac{k^2|\alpha_0-\beta_0|^2}{4}$$

$$k^2|z-\beta|^2=k^2\left|z-\frac{(k+1)\alpha_0+(k-1)\beta_0}{2k}\right|^2$$

$$=\left|kz-\frac{(k+1)\alpha_0+(k-1)\beta_0}{2}\right|^2$$

$$=\left|k\left(z-\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}\right)-\frac{\alpha_0-\beta_0}{2}\right|^2$$

$$=k^2\left|z-\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}\right|^2-\frac{k(\bar{\alpha}_0-\bar{\beta}_0)}{2}\left(z-\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}\right)$$

$$-\frac{k(\alpha_0-\beta_0)}{2}\left(\bar{z}-\frac{\bar{\alpha}_0+\bar{\beta}_0}{2}\right)+\frac{|\alpha_0-\beta_0|^2}{4}$$

より，

$$\frac{(k^2-1)|\alpha_0-\beta_0|^2}{4}=(k^2-1)\left|z-\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}\right|^2$$

$k^2-1\neq 0$ であるから，

$$\left|z-\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}\right|=\frac{|\alpha_0-\beta_0|}{2}$$

これは，点 z が円 C 上の点であることを意味する。

この証明を逆にたどれば，円 C 上の点は方程式 $|z-\alpha|=k|z-\beta|$ をみたすことが分かる

（証明終）

この定理において，直線 l，円 C の方程式に現れる α，β はもちろん，k のとり方については，無数の取り方が可能であることを注意しておきたい。

また，直線と円をまとめて，その方程式を

$$|z-\alpha|=k|z-\beta|\quad (k>0)$$

と表すことができるため，定理 2 の一般化である次の定理の証明が容易になる。

定理 4：複素数平面の変換 $f(z)=\dfrac{pz+q}{rz+s}$ （p, q, r, s は複素数，$ps-qr\neq 0$）による図形 S:$|z-\alpha|=k|z-\beta|\,(\alpha\neq\beta)$ の像は

1）図形 S が点 $-\dfrac{s}{r}$ を通るならば，直線

2）図形 S が点 $-\dfrac{s}{r}$ を通らなければ，円

となる。

∵ f による z の像を w とおけば

$w=\dfrac{pz+q}{rz+s}$ より，$rzw+sw=pz+q$

$$(rw-p)\,z=q-sw$$

よって，

$$z=\frac{-sw+q}{rw-p}$$

これを S の方程式に代入して，

$$\left|\frac{-sw+q}{rw-p}-\alpha\right|=k\left|\frac{-sw+q}{rw-p}-\beta\right|$$

$$|-sw+q-\alpha rw+\alpha p|$$
$$=k|-sw+q-\beta rw+p\beta|$$

$$|(r\alpha+s)w-(p\alpha+q)|$$
$$=k|(r\beta+s)w-(p\beta+q)|$$

定理の直前の注意により，$r\alpha+s\neq 0$，$r\beta+s\neq 0$ が成り立つとしてよいから，

$$|r\alpha+s|\left|w-\frac{p\alpha+q}{r\alpha+s}\right|$$
$$=k|r\beta+s|\left|w-\frac{p\beta+q}{r\beta+s}\right|$$

これにより

$$\left|w-\frac{p\alpha+q}{r\alpha+s}\right|=k\cdot\frac{|r\beta+s|}{|r\alpha+s|}\cdot\left|w-\frac{p\beta+q}{r\beta+s}\right|\cdots\cdots(*)$$

1）図形Kが点 $-\dfrac{s}{r}$ を通るなら，

$$\left|-\frac{s}{r}-\alpha\right|=k\left|-\frac{s}{r}-\beta\right|$$

$$|r\alpha+s|=k|\beta r+s|$$

したがって，(*) より，

$$\left|w-\frac{p\alpha+q}{r\alpha+s}\right|=\left|w-\frac{p\beta+q}{r\beta+s}\right|$$

ここで，$ps-gr\neq 0$ であるから，f は 1 対 1 の変換であり，

$$\frac{p\alpha+q}{r\alpha+s}\neq\frac{p\beta+q}{r\beta+s}$$

であるから，w は直線を描く。

2）図形 S が点 $-\dfrac{s}{r}$ を通らないとすれば，

$$\left|-\frac{s}{r}-\alpha\right|\neq k\left|-\frac{s}{r}-\beta\right|$$

$$|r\alpha+s|\neq k|r\beta+s|$$

よって，

$$k\cdot\frac{|r\beta+s|}{|r\alpha+s|}\neq 1$$

したがって，（＊）より，w は円を描く。

（証明終）

（注）定理 4 では，暗黙の了解で $r\neq 0$ としたが，ここで，$r=0$ の場合に触れておこう。

$r=0$ のとき，$f(z)=pz+q$ の形であるから $f(z)$ は，

$$g(z)=pz,\quad f_1(z)=z+q$$

の合成変換である。

したがって，直線は直線，円は円にうつることが分かるが，具体的な像の方程式を求めるには，図形

Sの方程式に，

$$w=pz+q,\ \text{したがって},\ z=\frac{w-q}{p}$$

を代入して得られる

$$\left|\frac{w-q}{p}-\alpha\right|=k\left|\frac{w-q}{p}-\beta\right|$$

すなわち，

$$|w-(p\alpha+q)|=k|w-(p\beta+q)|$$

とすればよい。

なお，定理4について細かいことを言えば，1）については点 $-\frac{s}{r}$ に対応する像はなかったり，2）で，点 $-\frac{s}{r}$ にうつる点がなかったりするが，これについての ∞ を取り込んだ議論には触れないでおく。

3. 複素数平面における1次分数変換の授業実践

現指導要領による教育が始まってほぼ十年になるが，複素数の扱い，とりわけ複素数平面の扱いについては大方の共通理解できるものができ上がっているとはいい難い。

前半の部分については，旧指導要領での扱いもあり，方程式論という一つのバックボーンに支えられて一貫した扱いも可能であったが，反面，方程式が解をもつように創られた人為的な数体との印象も強く，学ぶ者にとって本当に自然で必然性のあるものとは受け取られていなかったように思われる。

しかし，複素数平面以降の複素数は実在感を増し，演算自体にも幾何学的意味づけが可能となるなど，前半部のいわば静的な姿とはうって変わって，動的な動きを見せてくれる。

そこで，複素数の動的な側面を変換の立場から捉え直すことにより，図形への応用を含めた分野での複素数の動的な働き，有用性および面白さが伝えられるのではないかと考え，そのような授業の展開を試みることにした。

この立場から，複素数の演算についても，加減をベクトルの加減に他ならぬものと捉えるだけに留まらず，変換としては平行移動としての意味をもつことなどを強調して説明した。この点は乗除についても同様である。

こうした指導の延長上において，$f(z)=z+\alpha$，$g(z)=\alpha z$，$h(z)=\frac{\alpha}{z}$ などの変換有限個の合成結果である一次分数変換 $\varphi(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ による直線や円の像を考察するのは自然であり，具体例による実験・操作の結果から一般的法則を帰納させるとともに，それを生徒たちに論証させることを目ざした。

これは，21世紀を生きる若者が「生きる力」として持つべき能力の1つであるとともに，このような学習により，複素数のよさ・面白さ，更には数学のよさ，面白さを感じとる者が一人でも増えてくれることを願っての取りくみであった。

なお，以下の指導案は，一次分数変換による直線・円の像を生徒自身が調べた際のものである。

実際に授業で扱った折には，まず復習として一次分数変換 $f(z)=\frac{3z-2}{z-1}$ を平行移動，逆数をとる変換などの合成として表させ，変換 f による直線や円の像を知るには，逆数をとる変換 $f(z)=\frac{1}{z}$ による像を知る必要があることに気付かせるよう心がけた。

その上で，実軸や虚軸に平行な直線が，変換 $f(z)=\frac{1}{z}$ でどのような図形に写されるのか，実際に点をとらせて予想させた上で，コンピュータにより再確認させる形の展開をした。

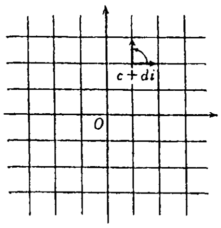
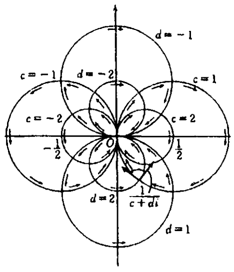
しかし，それで十分とはいえないため，そのことを納得させ，生徒とともに論証による確認を行った。

研究授業は，ここまでで終わったが，次時において，原点を通る直線や円の像は円にならず，直線になること，その理由は原点が $f(z)=\frac{1}{z}$ の分母を0にする点であることに起因することを確認した。

その上で，$f(z)=\frac{3z-2}{z-1}$ による直線や円の像が，どのような場合にどのような図形になるかを集約させ，その論証を行った。

本時の指導過程

学 習 内 容	指 導 過 程・学 習 活 動	指導上の留意点
（導　　入） 前時の復習	課題1．$w=(3z-2)/(z-1)=1/(z-1)+3$ で表される式によって，点 z を点 w にうつす対応は，逆数を取る対応 $w=1/z$ と平行移動をどのように組み合わせて得られるか。	・$3z-2=3(z-1)+1$ となることに気づかせる。

	・少し時間を与えた後，生徒に答えさせる。	・$z \to z-1 \to 1/(z-1)$ $\to 1/(z-1)+3$ となっていることに注意させる。
（展　開）	・課題1．の対応による図形の像を調べるには，対応 $w=1/z$ について調べるとよいことを理解させる。	
課題の提示	課題2．対応 $w=1/z$ により，実軸，虚軸に平行な直線はどのような図形にうつされると考えられるか。また，原点を中心とする円は，どのような図形にうつされると考えられるか。さらに，その理由についても考えよ。	・$z=2+yi$ とすると，$1/z=(2-yi)/(4+y^2)$
結果の予想	・軸に平行な直線上の格子点を取り，それらを対応 $w=1/z$ によりうつした像から結果を予想させる。 ・同様に，原点を中心とする半径 r の円の周上にいくつかの点を取らせ，その像から結果を予想させる。	
予想の正当性の論証	・予想した結果が正しいかどうか調べるにはどうすればよいか考えさせる。 ・生徒とともに，予想が正しいことを検証する。 ・最後に，軸に平行な直線や原点を中心とする円が課題1の対応によりどのような図形にうつされるか調べさせる。	
（ま と め）	・課題1の対応による図形の像は，対応 $w=1/z$ によって決まることを確認する。 ・対応 $w=1/z$ により，軸に平行な直線や原点を中心とする円が円にうつされることから，一次分数変換の性質を理解させる。	w 平面
備　　考	使用教科書　　高等学校数学B（第一学習社）	

4. 反省と課題

複素数平面の扱いにおいて，変換の扱いもあるにはあるが，変換の立場を積極的に前面に出して授業展開した点が，今回の取り組みの特徴であったかと思われる。取り組む側の思いとしては，1次変換に変わるものとしての複素数の動的側面をより強調してみたいとの気持ちがあり，日々の授業からやや力が入っていたように思われる。

授業と並行して大学生用の関数論の本を読み直したりもしたが，関数論における素材としての一次分数変換の扱いを見ることも有益であったと思う。しかし，高校教材としての一次分数変換とみるとき，どのような観点でどこまで扱うかと考えれば，視点を変えての扱いや定式化も必要となり，その証明にも工夫が必要となり，教材研究のための良い機会を得ることができたように思われる。

複素数平面以降の扱いについては，生徒からは比較的好評であり，「複素数の振るまいが視覚的に見えるようで，ベクトルよりも面白い。」とか，「数学は嫌いだけど，複素数平面は興味が持てた。」との声が聞かれた。中には「直線 $z=0.5+ti$ の像は，コンピュータによる図示や，自分たちが手作業で点をプロットして，$z=1$ を中心とする円になりそうだと判断して始めて，$(x-1)^2+y^2$ を計算しようという気になった。それだけに，手作業や，コンピュータによる図示は大切だと思う。」といった声もきかれたが，少し深入りし過ぎた部分もあり，「後半では難しいところもあり，一次変換の扱いは十分理解できなかった。」との声もあり，生徒の理解を見ながら扱う素材を取捨すべきとの思いを強くした。

研究授業後の協議会においても，逆数をとる変換 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ の意味などもう少し生徒に考えさせたり，

パソコンソフトによる点の像の図示についても，ソフトに改善の余地があるとの指摘をいただいた。

複素数平面の扱いも遠からず消えるが，変換の観点をふまえた扱いのよさを生かしつつ，教材の精選や指導法の改善に努めたいと思う。

参考文献

1) 吉田洋一「函数論」(岩波書店) 1970

2) 小林幹雄「複素数の幾何学」(共立出版) 1966

3) 田村二郎「解析関数」(裳華房) 1970

4) 野口潤次郎「複素解析概論」(〃) 1993

5) チャーチル／ブラウン「複素関数入門」(マグロウヒル出版) 中野　實訳　1992

6) S. Lang「Complex Analysis」(Addison Wesley) 1977