

論文審査の要旨

博士の専攻分野の名称	博 士 (理 学)	氏名	沖吉 真実
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 ①・② 項該当		
論文題目			
Generating functions of Box and Ball System (箱玉系の母関数)			
論文審査担当者			
主 査	教 授	木村 俊一	
審査委員	教 授	島田 伊知朗	
審査委員	教 授	松本 眞	
審査委員	准教授	高橋 宣能	
〔論文審査の要旨〕			
<p>箱玉系は 1990 年に高橋大輔・薩摩順吉により構成されたセルオートマトンであり、無限個の保存量を持つ力学系である。特に時刻 T が十分大きい時に規則正しい振る舞いをする、という性質を持つ。本論文では箱玉系の母関数を定義し、その規則正しさを母関数の有理性としてとらえることを目標とした研究を行った。その結果、高橋・薩摩によるオリジナルの箱玉系のみならず、持ち球制限付き箱玉系についても母関数の有理性の証明に成功した。さらに無限箱玉系、及び持ち球制限付き無限箱玉系の場合にも考察を行い、母関数が有理関数となるためには初期状態での玉の配置が準周期的であることが必要であることを示し、その上で、逆に初期状態で玉の配置が準周期的であれば母関数が有理関数になることを予想して、その特別な場合について証明を与えた。以下にその詳細を記す。</p> <p>箱玉系では、箱が場所 $X=0, 1, 2, 3, \dots$ に一列に無限に並べられ、そのうちいくつかの箱に玉がそれぞれ高々 1 つずつ入れられた状態を考える。各時刻 $T=0, 1, 2, 3, \dots$ に玉の運び手が $X=0$ の端からはじめて X が大きくなる方向に移動し、その際玉が入った箱を通過する際には必ず玉を拾い、逆に玉を持っていて空き箱を通過する際には玉を箱に入れる、という操作を全ての玉を処理し終わるまで行う。高橋・薩摩の箱玉系では、玉の数が有限の場合が扱われている。箱玉系に対して、i 番目の箱に時刻 j で玉が入っていれば $a_{ij} = 1$、そうでなければ $a_{ij} = 0$ とし形式和 $\sum_{i,j} a_{ij} x^i t^j$ を母関数として定義した。高橋・薩摩の定理により、玉の個数が有限個であれば、時刻 T が十分大きい時、玉はいくつかのソリトン (= 連続して玉が入った箱の集まり) に大きさ順に並び、以降はそれぞれのソリトンがその大きさに応じて規則正しく動く。本論文では、まずこの高橋・薩摩の規則性から母関数の有理性が従うことを証明する。</p> <p>また、運び手が持ち球制限 k を課される場合を考察した。これは運び手が k 個玉を持っている場合、玉が入った箱を通過する際に何もせずに通り過ぎる、というルール変更を行</p>			

った箱玉系である。本論文ではこの場合にも持ち球制限がない場合と同様に時刻 T が十分大きい時に玉がいくつかのソリトンにわかれてそれぞれが規則正しく動く、ということをも k に関する帰納法で証明した。これにより、持ち球制限がある場合も母関数が有理的であることが示された。また、 k の値が玉の個数より大きければ、この場合の箱玉系の挙動は高橋・薩摩の箱玉系の挙動と変わらない。よって本論文では高橋・薩摩の定理に別証明を与えたことにもなっている。

さらに、玉の数が無限個ある場合を考える。この場合は母関数が必ずしも有理関数になるとは限らない。例えば $t=0$ を代入すると初期状態のみを表す母関数が得られるが、これが有理的になるための必要十分条件は、初期状態が準周期的、すなわちある番号から先は同じパターンが無限に繰り返すことであることが示される。本論文では逆に初期状態が準周期的であれば母関数が有理的になる、と予想し、その特別な場合に証明を与えた。すなわち、周期部分が (m, m) パターン、言い換えれば十分先まで行けば m 個連続して玉が入り、そのあと m 個連続して空き箱、という $2m$ 箱のパターンを繰り返す場合である。 (m, m) パターンの箱玉系では準周期部分が規則的に m 個ずつ進んでいき、それは準周期部分に玉が持ち込まれても変わらない。そこで準周期部分に玉が持ち込まれることを衝突と呼ぶことにすると、衝突するたびに準周期的でない部分の玉の個数は減ることになり、従って有限回しか衝突は起こらない。全ての衝突が終わったあとは準周期的部分とそれ以外の部分（こちらは玉が有限個）では独立に時間発展することになる。このことから母関数の有理性が示される。

最後に、持ち球制限付きの (m, m) パターンの場合にも母関数の有理性が示される。この場合は、準周期部分に持ち込まれた玉がその手前にたまっていく、という新しい現象が見られる。

本論文は箱玉系の研究に母関数という新しい視点を持ち込むことで、今後に大きな可能性を開いたものである。特に準周期的箱玉系は、これまで有限個の箱で研究されていた周期的箱玉系を無限に拡張して精密化したものになっている。

以上、審査の結果、本論文の著者は博士（理学）の学位を授与される十分な資格があるものと認める。

公表論文

Okiyoshi, Mami: Generating functions of Box and Ball System, Hiroshima Mathematical Journal, to appear