広島大学附属中・高等学校研究紀要
〈第46号　1999〉

グラフ理論入門
——一筆がきとオイラーの定理——

河野芳文

本論文のテーマである“一筆がき”と“正多面体の分類”はかつて数学教育の現代化の流れの中で中３の教材として扱われたものである。この教材が消えた背景については賛否両論があるであろうが，ケーニヒスベルクの橋わたりの問題を解決するために，オイラーがこの問題をいかにして数学的問題として捉え，それをどのようにして解決したか学ばせることは，“問題を数学化する手法に触れさせる”あるいは“どのような道具立てをして問題解決をはかるか”を知らせる上で，好ましいものと思われる。指導する学年，指導する中身については更なる検討が必要であるが，生徒が興味をもち，意欲的に取り組む教材として，考察の対象になりうるものと考えられる。

1. はじめに

数学を指導する者にとって，１つの教材をどのように導入するかは，生徒に問題意識や興味を持たせる上からも重要である。しかも，その導入教材は生徒にとってより身近であり，学ぶ目的が容易に把握できることが望ましい。

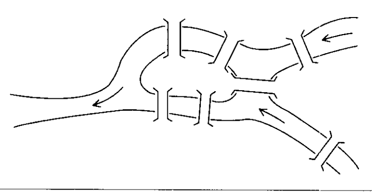
このような視点からみれば，グラフ理論入門は格好の教材であり，導入教材としてのケーニヒスベルグの橋渡り問題の適切さや，その問題の自然な数学化としてのグラフの導入は，数学的なものの見方や，考え方のよさを示す好例といえる。

とくに，入門的なグラフの理論から，一筆がきができるための条件や平面・空間におけるオイラーの定理などが導かれ，正多面体が正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体の五種類しかないことが導かれる展開は興味深い。

このグラフ理論の入門的扱いが中学校，高等学校のどの学年に相応しいのか，十分な検討はできていないが，４年前と今年（2000年）の２回にわたり，中学校一年生に指導する機会を得たので，実施した上でのよさや問題点についてまとめてみたいと思う。

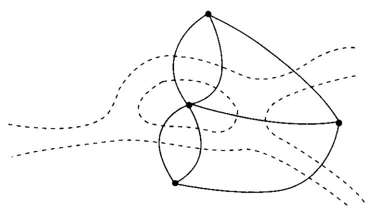
2. グラフ理論入門

18世紀の初頭，東プロシアの町ケーニヒスベルグには，右の図のように，２つの島と７つの橋があったが，町の人々の間に次のような問題が広まった。



（問題）これらの７つの橋を全部，しかもただ一回ずつ渡るような散歩のコースはあるか。

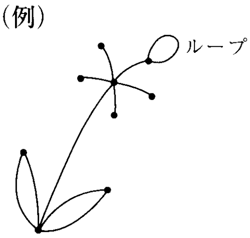
この問題はスイスの大数学者レオンハルト・オイラー（L. Euler）の耳に入り，彼によって新しい発想で解決された。オイラーは島と河の両岸を点で表し，橋を曲線でおきかえて右の図のような点と曲線からなる図形をつくり，この図形が一筆ができないことを示した。



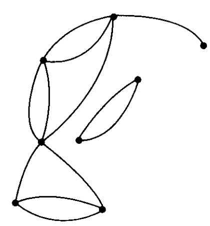
このようにして得られた図形をグラフという。より正確に言えば，

定義：いくつかの点と，そのいくつかを結ぶ，互いに交わらない曲線でできた図形をグラフという。点を頂点，曲線を辺といい，２点を結ぶ辺があるとき，これらの２点は隣接するという。１つの辺は１つまたは２つの頂点をもつが，一つの頂点しか持たない辺を，ループとよぶ。辺の先にある頂点をその辺の端点ということがある。

（例）



連結なグラフ



連結でないグラフ

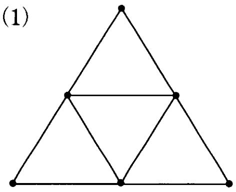
また，グラフがつな

An Introduction to Graph Theory
——One-path Writing and Euler's Theorems——
Yoshifumi KOHNO

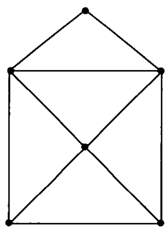
がっているか否かで，連結なグラフ，連結でないグラフとよぶ。

定義：グラフは，グラフのすべての頂点とすべての辺を通る一つながりの曲線で同じ辺を２度以上通らないものがあるとき，一筆がきができるという。

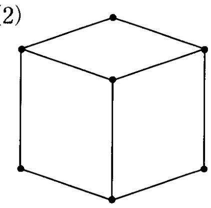
（例）　(1)



(2)



(2)



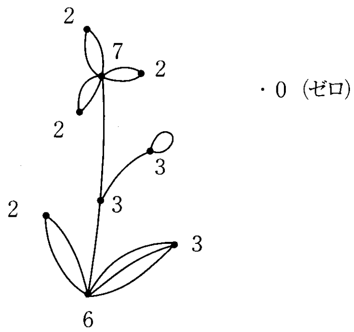
これらの例では，１），２）が一筆がき可能であり３）は一筆がきができない。しかも，１）では，どこからかき始めても一筆がきできるが，２）ではそうならない。

この違いが何に起因するかを調べるために，頂点の次数の概念を導入する。

定義：グラフの頂点Ｐに対して，この頂点を端点とする辺の個数を，この頂点Ｐの次数という。ただし，頂点Ｐを端点とするループがあるときは，辺の数を２とする。

また，グラフにおいて，次数が偶数（０も含む）である頂点は偶点，次数が奇数である頂点は奇点であるという。

（例）　（例）頂点の次数



このように次数の概念を導入した上で，上の３つの例を比べると，１）では，奇点の数が０，２）では，奇点の数が２つで，奇点が一筆がきの始点，終点となっている。さらに，３）では，奇点の数が４つとなっている。

そこで，いくつかの例を加えて奇点の数を調べてみれば，一筆がきできるグラフでは，始点＝終点となるものでは奇点が０，始点≠終点となるものでは奇点が２つとなり，一筆がきできないものでは奇点の数が３つ以上となっていることが分かる。

また，一筆がきできるグラフは連結でなければならないことも明らかである。

一筆がきにおいて，かき始めの点を始点，かき終わりの点を終点，途中で通過する点を通過点とよぶことにすれば，始点でまず１本の辺を使い，通過点で２本（通過点に入るために一本，通過点から出るために１本）の辺を使い，終点に入るために１本の辺を使うことが分かる。

このことから，始点でも終点でもない通過点は偶点であることが分かる。

以上の考察から，次の定理を予想することができる。

定理　グラフＫが一筆がきできるための条件は

１）そのグラフＫが連結で，

２）奇点の数が０または２となる

ことである。

∵⇒）グラフＫが一筆がきできるならば，明らかに連結でなければならない。

そこで２）について考える。

イ）始点≠終点のとき

定理の前の注意により，始点，終点を除く通過点はすべて偶点である。また，始点では，出るために１本の辺を使う外は通過するだけであるから，１＋２＋……＋２本の辺があることになり，奇点である。同様の理由で，終点も奇点である。したがって，この場合，奇点の数は２つである。

ロ）始点＝終点のとき

始点以外の点はすべて通過点であるから，それらは偶点である。そこで始点が問題となるが，始点では出るために１本の辺を使い，その後通過するごとに２本の辺を使った後，終点として入るために１本の辺を使う。したがって，１＋２＋……＋２＋１本の辺をもつことになり，偶点である。したがって，この場合，奇点の数は０である。

⇐）まず，簡単ないくつかの注意をしておく。

任意のグラフにおいて，各頂点の次数の合計は辺の数の２倍に等しいから偶数であり，したがって奇点の個数も偶数である。

奇点の数が０である一筆がき可能なグラフは閉じた一筆がきをもつから，任意の頂点からかき始

めることができる。しかし，奇点の数が2の一筆がき可能なグラフでは，2つの奇点のうちの一方が始点，他方が終点となる。

そこで，次の主張 P(n) を考える。

P(n)：辺の数がnである連結なグラフで，奇点の数が0または2となるものは一筆がきできる。

この主張をnについての帰納法で証明する。

Ⅰ）P(0)，P(1) は明らかに正しい。

Ⅱ）P(0)，P(1)，……，P(k) は正しいとして P(k+1) が成り立つことを示す。

k+1本の辺をもつ連結なグラフで，奇点の数が0または2であるものをKとする。

グラフKがループをもてば，Kからループ1本をとり除いたグラフ K' も連結であり，奇点の数が0または2であるから，帰納法の仮定により K' も一筆がき可能である。したがって，Kも一筆がき可能である。

以上の議論により，Kはループをもたないとして考えてよい。

イ）Kが奇点をもたないとき

1つの辺PQをとり除いたグラフを K' とすれば，K' は連結である。（K' が連結でなければ K' はPを含むグラフとQを含むグラフに分かれるが，いずれのグラフも奇点の数が1となり，はじめの注意に反する。）帰納法の仮定により，Pから始まり，Qで終わる K' の一筆がきが存在するから，これに辺PQを加えたKも一筆がき可能である。

ロ）Kが2つの奇点P，Qをもつとき

Pを端点とする辺PRをとり除いたグラフ K' を考える。

ⅰ）R＝Qのとき

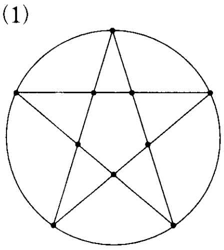
グラフ K' は奇点をもたないから，K' が連結であれば，帰納法の仮定より，Pから始まり，Pで終わる一筆がきが存在する。したがって，Kも一筆がき可能である。K' が連結でなけば，K' はPを含む連結なグラフ K_1' とQを含む連結なグラフ K_2' に分かれるが，いずれも奇点をもたないから，Pから始まりPで終わる一筆がき，Qから始まりQで終わる一筆がきが存在する。したがって，Kも一筆がき可能である。

ⅱ）R≠Qのとき

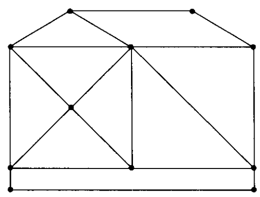
R，Qのみが奇点であるから，グラフ K' が連結であれば，Rから始まりQで終わる一筆がきが存在する。したがって，Kも一筆がきが可能である。また，グラフ K' が連結でなければ，K' は頂点Pを含む連結なグラフ K_1' と頂点Rを含む連結なグラフ K_2' に分かれる。ここで，K_1'，K_2' に含まれる奇点の数を考えれば，頂点Qはグラフ K_2' に含まれることが分かる。

K_1' は奇点をもたず，K_2' は奇点Q，Rをもつから，帰納法の仮定より，Pから始まりPに終わる一筆がき，Qから始まりRに終わる一筆がきが存在する。したがって，グラフKも一筆がき可能である。

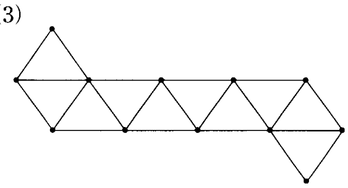
（例）(1)



(2)



(3)

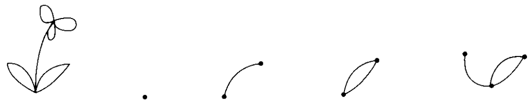


（証明終）

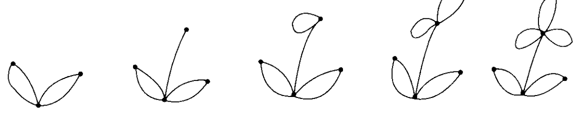
次に，連結なグラフがもつ他の性質の1つを調べてみよう。

グラフは，いくつかの頂点と辺でできているから，1つの頂点から出発して，これに頂点や端点のついた辺を1つずつ付け加えてつくることができる。

（例）　イ）　ロ）　ハ）　ニ）



ホ）　ヘ）　ト）　チ）　リ）



とくに，例）のように連結なグラフでは，1つの頂点から出発して，端点のついた辺の1つまたは2つの端点をそれまでにできているグラフの頂点に重ねながらかき上げることができる。この事実の証明も，辺の数nの帰納法により可能である。

さて，ここで新しい記号を導入する。

定義：平面上のグラフについて，頂点の個数をV，グラフによって区切られる平面の部分の個数をF，辺の個数をEと表す。

上の例）のイ）では，V=1，F=1，E=0であるが，ロ），ハ），……，リ）の場合についても，V，F，Eの値を求めると，次の表のようになる。

	イ）	ロ）	ハ）	ニ）	ホ）	ヘ）	ト）	チ）	リ）
V	1	2	2	3	3	4	4	4	4
F	1	1	2	2	3	3	4	5	6
E	0	1	2	3	4	5	6	7	8

この表から，V，F，Eの間には，

$V+F-E=2$

が成り立つことが予想できる。

定理（平面グラフのオイラーの定理）

平面上の連結なグラフについて

$V+F-E=2$

が成り立つ。

∵1）グラフが1頂点だけから成るとき，

$V=1,\ F=1,\ E=0$

であるから，

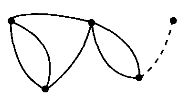
$V+F-E=2$

である。

2）連結なグラフは，1つの頂点から出発して，端点のついた辺をつけ加えていく形で得られるから，この操作でV+F−Eの値が変わらないことを示す。

イ）1つの辺を1端点のみ重なるようにつなぐとき。

このとき，Vの値，Eの値は1増えて，Fの値は不変であるから，

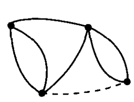


$V+F-E=2$

である。

ロ）1つの辺の2つの端点を異なる2つの頂点に重ねるとき。

このとき，Fの値，Eの値は1増えて，Vの値は不変であるから，

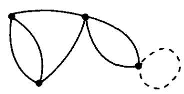


$V+F-E=2$

である。

ハ）1つの辺をループとして1つの頂点につなぐとき。

このとき，Fの値，Eの値は1増えて，Vの値は不変



であるから，

$V+F-E=2$

である。

3）平面上の連結なグラフは，1つの頂点から出発して，2）のイ），ロ），ハ）の操作のいずれかを行いながらつくられるから，1），2）により，

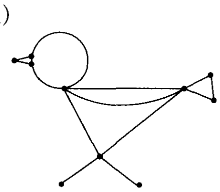
$V+F-E=2$

が成り立つ。

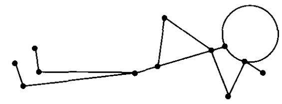
（証明終）

（例）次のいずれのグラフも連結であり，V+F−E=2が成り立つ。

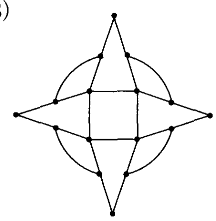
(1)



(2)

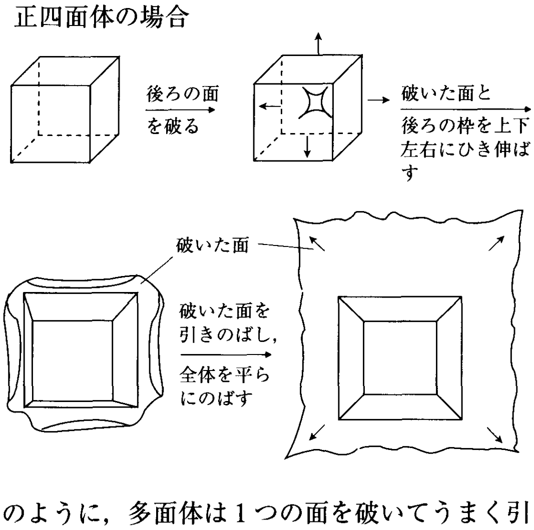


(3)



この平面のグラフについてのオイラーの定理を用いると，多面体に関するオイラーの定理を導くことができる。それには，多面体が伸縮自在な材料でできているとして，1つの面を破り，その穴を広げて平らにつぶすという手法を用いる。

（例）正四面体の場合



このように，多面体は1つの面を破いてうまく引き伸ばした後で平らにつぶせば，連結な平面グラフとその周囲の平面部にすることができる。

しかも，このような変形でV，F，Eの個数は変わらないから，多面体について次の性質の成り立つことが導かれる。

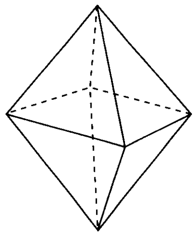
定理：(多面体とオイラーの定理)

多面体において，頂点の数をV，面の数をF，辺の数をEとすれば，

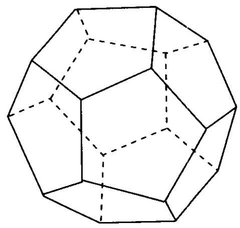
$$V+F-E=2$$

が成り立つ。

(例) 1）正八面体　　　2）正十二面体



V=6，F=8
E=12より，
V+F−E=2



V=20，F=12，
E=30であるから，
V+F−E=2

次に，正多面体が5種類しかないことを示そう。

正多面体とは，すべての面が合同な正多角形からなり，どの頂点にも等しい数の正多角形が集まっている凸多面体である。

そこで，正多面体が正n角形でできていて，1つの頂点にp枚の正n角形が集まっているとする。

このとき，明らかに，n≧3，p≧3であるが，正n角形の1つの内角は

$$180°-\frac{360°}{n}$$

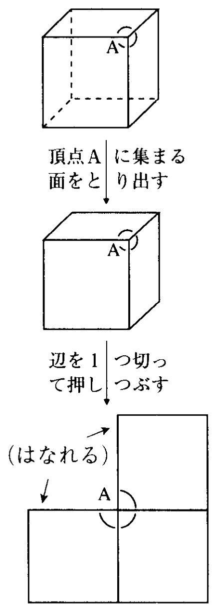
であり，それが一つの頂点にp枚集まって尖っているから

$$\left(180°-\frac{360°}{n}\right)\times p<360°$$

が成り立つ。両辺を 180° で割って

$$\frac{n-2}{n}\times p<2$$

$$\therefore p<2\times\frac{n}{n-2}\cdots\cdots\cdots(*)$$



n≧3，p≧3 であるから，

i）n=3 のとき，

p＜6 より，p=3，4，5

ii）n=4 のとき，

p＜4より，p=3

iii）n=5 とき，

$p<\frac{10}{3}$ より，p=3

iv）n≧6 のとき，

p＜3 となるから，この不等式をみたすpの値は存在しない。

以上より，

定理：1つの頂点に正n角形がp枚ずつ集まって正多面体ができるとすれば，

(n, p)=(3, 3)，(3, 4)，(3, 5)，(4, 3)，(5, 3)

でなければならない。

これから，正多面体は5種類以下であることが分かるが，丁度5種類であることは，正n角形を1つの頂点にp枚ずつ集めながら正多面体が5種類存在することを実際に確かめればよい。

しかし，正多面体の頂点の数Vについて

$$pV=2E \quad よって，\ V=\frac{2E}{p}$$

が成り立つこと，同じく面の数Fについて，

$$nF=2E \quad よって，\ F=\frac{2E}{n}$$

が成り立つこと，したがって，オイラーの定理から

$$\frac{2E}{p}+\frac{2E}{n}-E=2\cdots\cdots\cdots(**)$$

が成り立つことを用いることもできる。

このとき，

1）(n, p)=(3, 3) のとき，

(＊＊) より，E=6，V=4，F=4

2）(n, p)=(3, 4) のとき，

(＊＊) より，E=12，V=6，F=8

3）(n, p)=(3, 5) のとき，

(＊＊) より，E=30，V=12，F=20

4）(n, p)=(4, 3) のとき，

(＊＊) より，E=12，V=8，F=6

5）(n, p)=(5, 3) のとき，

(＊＊) より，E=30，V=20，F=12

であるから，正多面体は，正四面体，正八面体，正二十面体，正六面体，正十二面体の五種類であることが示された。

以上をまとめて，

定理：正多面体は，正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体の5種類しか存在しない。

3. グラフ理論入門と授業実践

新学習指導要領による数学教育の実施を間近かに控えて，本校でも中高6ケ年に加えて小学校をも取り込んだ12年一貫教育を目ざした取り組みのあるべき姿を模索し続けている。総合的な学習の時間にも関連して，数学教育の重点化の必要性とともに，その弾力的な扱いの重要性を感じてもいるこの頃であ

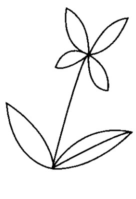
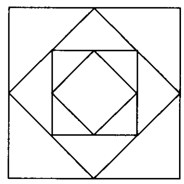
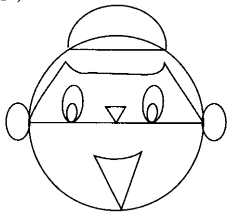
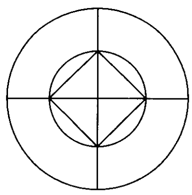
る。

そのような中にあって，中学１年生から中学３年生にかけての新しい教材開発も重要な任務であり，生徒への授業実践の試みを通して，その内容の適否を判断したり，改善を強いられることになる。

今回実施したグラフ理論の入門は，中学１年生にとっては難しい部分もあるが，ケーニヒスベルグの橋渡りという生徒にとっても題意が捉えやすく，興味ある問題を通して，問題がいかに数学化され，その解決のために，どのような概念が導入されて問題解決に到るかを，面白くかつコンパクトに示し得るという意味で，興味を引く題材である。さらに，正多面体の分類に関わってオイラーの定理を扱うことを試みたが，中学１年生にはオイラーの定理が限界であり，その正多面体分類への応用までには困難を感じたことを告白せねばならない。

しかし，以下に指導案で示す一筆がきの問題を含めて，生徒の興味・関心は強く，そのテーマの有効性の判断は間違ってはいないように思われる。

一筆がきの問題は，ケーニヒスベルグの橋渡りの問題を導入教材として，数学史的な話を挿入しながら提示したが，生徒に身近かな面白い問題でもあることから，予想通り熱心に取り組んだようである。その後一筆がきの問題を与え，試行錯誤しながらの一筆がきを試みさせた後，一筆がきの可能性について考えさせた。しかし，生徒自身による見通しが立てにくいため，頂点の次数や偶点，奇点の概念を説明した上で改めて問いかけたところ，「奇点の数が２以下であれば，一筆がきできる。」とか，「奇点の数が４以上だと，一筆ができないと思う。」との声が出ると同時に，「奇点の数が２の場合は，２つの奇点が始点と終点になっています。」との声が返ってきた。そこで，その理由について問いかけをしながら始点，通過点，終点の考え方を説明し，一筆がきできる図形の条件としてまとめ，一緒に証明に取りくんだ。２時間をかけての扱いであったが，生徒は興味深く取りくみ，大半の生徒が理解してくれたように思われた。

学習内容	指導過程・学習活動	指導上の留意点
（導　入） 課題の提示	課題１．次の平面グラフについて，一筆書きができるかどうか調べよ。また，一筆書きできるものについては，一筆書きを実行せよ。 １） ２） ３） ４）	一筆書きの意味を確認する。
（展　開） 次数の定義と結果の予想	・どのグラフが一筆書きできるか答えさせ，その理由について考えさせる。 ・頂点の次数の概念を定義し，再度導入例について考えさせる。 ・生徒に規則について考えさせ，どのような場合に一筆書きできるか，自由に答えさせる。 ・生徒の答えを踏まえながら，一筆書きできる条件についてまとめる。	・一筆書きできるグラフの始点や終点に注目させる。

予想の正当性の論証	・始点，通過点，終点について，その次数が奇数になるか，偶数になるか考えさせる。 ・このような考察を踏まえて，証明について考えさせ，一緒に証明を進める。 ・定理の結果を踏まえて，いくつかのグラフを提示し，一筆書きが可能かどうか，またその理由について答えさせる。また，可能なものについては，一筆書きを実行させる。	・始点，通過点，終点の様子を図示し，その特徴に注目させる。 ・一筆書きできるとの判断と，実際にできることを示すことの違いを知らせる。
（まとめ）	・平面グラフが一筆書きできるための条件は，そのグラフが連結で，奇点の数が0または2となることであることを確認する。 ・頂点，辺，ループなどの用語と次数などの概念を確認する。	・頂点の次数の概念の有用さに触れる。
備　　考	自作のプリント教材	

4. 反省と課題

グラフ理論の入門的扱いは，中学生にも身近で興味深いものであり，一筆がきに限らず意欲的に取りくんでくれたようであった。一筆がきできるための条件については，十分性の証明が長く，難しいものであるため，必要性の証明のみを扱うことにした。このような扱いは数学的には不十分であるが，生徒が証明という考え方の意義を十分理解していない状況の下では許されるのではないかと思われる。また，それによって生徒の負担も軽減し，すっきりしたものになったのではないだろうか。一通りの証明を終えた時点では，7割の生徒が分かったと答えたが，質問を受けながら説明を加えるうちに，ほぼ全員が理解してくれたように思われる。

続くオイラーの定理，正多面体の分類においても生徒は前向きで，具体例を示しながらの展開には好意的であった。しかし，多面体についてのオイラーの定理では，トポロジー的操作が加わったこともあり理解に時間を要した。これはトポロジー的操作の難しさというよりも，トポロジー的操作によって，辺の数，頂点の数などが不変であるとの認識が困難であることに起因したように思われる。

このような状況をふまえて，気分転換の意味もあり1時間ほど覆面算などのクイズを扱った。その後，正多面体が5種類しかないことを操作的に扱うとともに，オイラーの定理によって証明することを試みた。操作的に5種類しかないことを確かめる扱いでも，前半の不等式の扱いには十分な時間をかける必要を感じたが，操作的扱いで見られた活気がオイラーの定理による説明で失われたことを思えば，最後のオイラーの定理による分類は不適切であったかもしれない。代数的式変形の難しさを考えれば，中2以降の学年で扱うこともありうると思われるが，指導法の改善・工夫で補える部分もあるであろう。

参考文献

1. 柴岡泰光「教養の数学」（東京図書）1991
2. C. L. リウ「組合せ数学入門Ⅰ，Ⅱ」（共立出版）伊理正夫他訳　1987，1983
3. R. J. ウィルソン「グラフ理論入門」（近代科学社），斉藤伸自他訳，1985
4. R. H. リュー「離散数学入門」（マグロウヒル社）1986