広島大学附属中・高等学校研究紀要
〈第45号　1998〉

平均値の定理の一般化とその応用

河　野　芳　文

平均値の定理は，高等学校「数学Ⅲ」に含まれる教材であり，その図形的意味も明らかである。しかし，それにも関わらず，この定理はつかみどころがなく，その有用性の分かりにくいもののようである。そこで，本論文においては，この定理を一般化する方法について述べたり，その結果から導かれる事柄や応用の仕方のいくつかについて述べることを試みる。それにより，平均値の定理の美しさや有用性に触れることができ，この定理の意義の一端を知ることができると思われる。最後に，平均値の定理の一般化の1つであるテーラーの定理の教材化の試みについて報告した。この幾分レベルの高い実践を通して，定理を一般化することのよさや，平均値の定理の有用性についての理解が深まればよいと思われる。

1. はじめに

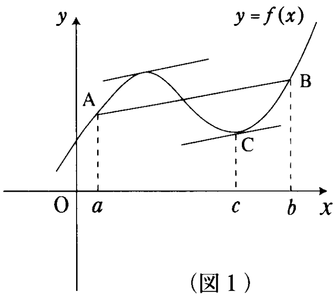
「数学Ⅲ」の教材であるロルの定理や平均値の定理の定式化は比較的簡単であるが，それを見ただけで定理の意味を理解するのはやや難しい。しかし，この定理を図形的に把える便利な方法がある。

定理　関数 $y=f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) で微分可能であるとき，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (a<c<b)$$

をみたす c が少なくとも1つ存在する。

この定理の意味は，(図1) において，2点 $A(a, f(a))$，$B(b, f(b))$ を結ぶ線分 AB に対し，区間内の点 $C(c, f(c))$ における接線で，線分 AB に平行なものが少なくとも1本ひけることを示すものである。



(図1)

あるいは，定理の式を変形して，

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c) \qquad (a<c<b)$$

とおけば，2つの関数値の大小が，その区間内のある点の微分係数の符合で決まることを意味していると捉えることもできる。

さらに，(図1) から分かるように，
$0<c-a<b-a$ であるから，

$$\theta=\frac{c-a}{b-a}$$

とおけば，$0<\theta<1$ であり，分母を払って整理すると，$c-a=\theta(b-a)$ から，

$$c=a+\theta(b-a)$$

を得る。そこで，さらに $b-a=h$ とおけば，平均値の定理は，

$$f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)\cdot h$$

と表される。これから，h が十分小さければ，

$$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)\cdot h$$

なる近似式が成り立つことも予想できる。しかし，同時に，θ の値が気になってくるところでもある。

以上の説明から，平均値の定理の意味は多少分かった気にはなるが，平均値の定理の有効性や意義を知らせるものとはなっていない。

そこで，平均値の定理のよさや有用性を知らせるためにも，この定理自身について考察を加えたり，その有用性を示すいくつかの結果や手法を生徒たちに例示する必要があると思われる。

2. 平均値の定理に関連した考察

まず，平均値の定理と同値であるロルの定理を定式化し，その証明を述べる。

定理1（ロルの定理）
関数 $y=f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) で微分可能であり，$f(a)=f(b)$ をみたすならば，

$$f'(c)=0 \qquad (a<c<b)$$

をみたす c が少なくとも1つ存在する。

∵ $f(x)$ が定数である場合は，$a<c<b$ をみたす任意の c に対して，$f'(c)=0$ が成り立つ。

Generalizations of Mean Value Theorem and their Applications
Yoshifumi KOHNO

$f(x)$ が定数でないとすれば，$f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で最大値，最小値をとり，どちらか一方の値は $f(a)$ と異なる。そこで，$f(x)$ が $x=c$ $(a<c<b)$ で，最大値 $f(c)$ $(>f(a))$ をとるとする。

このとき，$h>0$ として，$h \to 0$ とすると，

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leqq 0$$

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c-h)-f(c)}{-h}\geqq 0$$

が成り立つから，

$$f'(c)=0$$

よって，主張は示された。($y=f(x)$ が，閉区間 $[a, b]$ で $f(a)$ と異なる最小値をもつ場合も同様である。)
(証明終)

この定理を用いると，次の平均値の定理が証明できる。

定理 2 (平均値の定理)

関数 $y=f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) で微分可能ならば，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (a<c<b)$$

をみたす c が少なくとも 1 つ存在する。

∵ $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ とおけば，

$g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) で微分可能であり，

$$g(a)=g(b)=f(a)$$

をみたす。したがって，ロルの定理により，

$$g'(c)=0 \qquad (a<c<b)$$

をみたす c が少なくとも 1 つ存在する。

ここで，

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

であるから，

$$g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

すなわち，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (a<c<b)$$

が成り立つ。(証明終)

この定理から，次の命題が導かれる。

命題 3 関数 $y=f(x)$ が微分可能であるとき，

1) $f'(x)\equiv 0$ ならば，$f(x)$ は定数である。

2) $f'(x)\geqq 0$ ならば，$f(x)$ は増加関数であり，
　$f'(x)\leqq 0$ ならば，$f(x)$ は減少関数である。

∵ 1), 2) とも，

$$f(x')-f(x)=(x'-x)f'(c) \qquad (x<c<x')$$

が成り立つことから，明らかである。(証明終)

ここで，平均値の定理の不等式の証明への応用例をあげておこう。不等式の証明において常に有効とはいえないが，かなりの場合において有効といえるであろう。

(例題 1) 次の不等式を証明せよ。

1) $x>0$ のとき

$$\frac{1}{x+1}<\log(x+1)-\log x<\frac{1}{x}$$

2) $p>1$ として，$x>0$のとき，

$$x^p-px+p\geqq 1$$

∵ 1) 平均値の定理より，

$$\log(x+1)-\log x=1\cdot\frac{1}{c} \qquad (x<c<x+1)$$

をみたす c が存在する。一方，

$$\frac{1}{x+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}$$

が成り立つから，

$$\frac{1}{x+1}<\log(x+1)-\log x<\frac{1}{x}$$

2) $f(x)=x^p-px+p-1$ とおけば，$f(1)=0$ であるから，平均値の定理より，

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x)-f(1)\\&=(x-1)f'(c) \qquad (1\leqq c\leqq x)\end{aligned}$$

をみたす c が存在する。

ここで，

$$f'(x)=px^{p-1}-p=p(x^{p-1}-1)$$

であるから，

$$f(x)=(x-1)\cdot p\,(c^{p-1}-1)\geqq 0$$

よって，$(x-1)(c^{p-1}-1)\geqq 0$ より，

$$x^p-px+p\geqq 1 \qquad \text{(証明終)}$$

不等式の証明では，必ずしも平均値の定理を使用する必要はないが，平均値の定理を用いれば，解答がスマートかつ簡潔に済むことが多い。

特に，2）では，通常 $f(x)$ を微分し，その増減表から $f(x)\geqq 0$ を導く方法がとられるだけに，平均値の定理の偉力が分かるであろう。

次に，平均値の定理を一般化することを考えてみよう。

一つの方向は，コーシーの平均値の定理とよばれるものである。

定理 4 （コーシーの平均値の定理）

関数 $y=f(x)$, $y=g(x)$ は，ともに閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能とする。また，$g(a)\neq g(b)$ であり，$f'(x)$, $g'(x)$ は同時には 0 にならないとする。このとき，

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (a<c<b)$$

をみたす c が存在する。

∵ $F(x)=(g(b)-g(a))f(x)-(f(b)-f(a))g(x)$ とおけば，$F(x)$ は $[a,\ b]$ で連続，$(a,\ b)$ で微分可能で，

$$F(a)=F(b)=g(b)f(a)-g(a)f(b)$$

が成り立つ。したがって，ロルの定理により，

$$F'(c)=0 \qquad (a<c<b)$$

をみたす c が存在する。ここで，

$$F'(x)=(g(b)-g(a))f'(x)-(f(b)-f(a))g'(x)$$

であるから

$$(g(b)-g(a))f'(c)=(f(b)-f(a))g'(c)$$

仮定より，$f'(c)$, $g'(c)$ は同時には 0 にならないから，$g'(c)\neq 0$ である。したがって，

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (a<c<b)$$

（証明終）

定理 4 を利用すれば，極限計算で有用な次のロピタルの定理を証明することができる。

定理 5 （ロピタル）

1）関数 $y=f(x)$, $y=g(x)$ はともに開区間 $(a,\ b)$（または $(e,\ a)$）で微分可能であり，$g(x)\neq 0$ かつ，$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ が成り立つものとする。このとき，

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\alpha\ \text{（有限）}\ \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$$

2）関数 $y=f(x)$, $y=g(x)$ はともに開区間 $(a,\ b)$（または $(e,\ a)$）で微分可能で，$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=+\infty$ が成り立つものとする。

このとき，

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\alpha\ \text{（有限）}\ \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$$

∵ 1）$f(a)=g(a)=0$ と定義すれば，$f(x)$, $g(x)$ は区間 $[a,\ b)$（または $(e,\ a]$）で連続であるから，コーシーの平均値の定理により，区間内に

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

をみたす c が存在する。

$x\to a$ のとき，$c\to a$ であるから，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\alpha$$

2）$f(x)$, $g(x)$ が区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるとして証明する。このとき，$\delta>0$ を十分小さくとれば，$a<x<a+\delta$ のとき，

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{f(x)-f(a+\delta)}\cdot\frac{f(x)-f(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)}\cdot\frac{g(x)-g(a+\delta)}{g(x)}$$

が成り立つから，コーシーの平均値の定理より，

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{f(x)-f(a+\delta)}\cdot\frac{f'(c)}{g'(c)}\cdot\frac{g(x)-g(a+\delta)}{g(x)}$$

をみたす $c\ (x<c<a+\delta)$ が存在する。任意の正数 $\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ を十分小さくとれば，$a<x<a+\delta$ のとき，

$$\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-\alpha\right|<\varepsilon$$

が成り立つようにできるから，

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \alpha \right| < 2\varepsilon$$

とできる。$\varepsilon > 0$ は任意であるから,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

(証明終)

(注) 2)の証明は幾分直観的であるが,$\varepsilon - \delta$ 論法で精密化するのは容易である。また,$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = -\infty$ の場合や,区間が $(e,\ a)$ の場合も同様にして証明できる。しかし,高校生には,上の証明法でも仲々分かりにくかった。

ロピタルの定理を用いる問題例をあげると,

(例題2)次の極限値を求めよ。

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$　　2) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x}$

∵ 1) $\lim_{x \to 0} \sin x = \lim_{x \to 0} x = 0$ であり,$x = 0$ を一端とする任意の開区間で分母 $x \neq 0$ であるから,ロピタルの定理の1)より,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

2) $\lim_{x \to \infty} x^2 = \lim_{x \to \infty} e^x = +\infty$ であるから,ロピタルの定理の2)より,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x}$$

さらに,$\lim_{x \to \infty} 2x = \lim_{x \to \infty} e^x = +\infty$ であるから,

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

(証明終)

こうした事実を学習したとはいえ,入試などでロピタルの定理を用いるのは適切とはいえないであろう。しかし,知っていれば検算には利用できる。

次に,平均値の定理のもう一つの一般化について考えてみよう。

(例題3) $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 - 5x^3$ を,

$$f(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$$

の形に表せ。

∵ 恒等式の考えで処理をするのが普通であるが,ここでは微分を用いる方法を示す。

$$f'(x) = 2 + 6x - 15x^2$$
$$f'(x) = b + 2c(x-1) + 3d(x-1)^2$$

であるから,

$$b = f'(1) = -7$$

また,$f''(x) = 6 - 30x$,$f''(x) = 2c + 6d(x-1)$ であるから,

$2c = f''(1) = -24$

さらに,$f'''(x) = -30$,$f'''(x) = 6d$ であるから

$6d = f'''(1) = -30$

これと,$a = f(1) = 1$ を考慮すれば,

$$f(x) = 1 - 7(x-1) - 12(x-1)^2 - 5(x-1)^3$$

(解答終)

この問題の解から,

$$a = f(1),\ b = f'(1),\ c = \frac{f''(1)}{2},\ d = \frac{f'''(1)}{6}$$

となることが分かるから,

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

の成り立つことが予想できる。

しかし,$f(x)$ は一般に多項式ではないから,$f^{(4)}(1) = f^{(5)}(1) = \cdots = 0$ となるとは考えられない。

そこで考えることは,$f(x)$ と多項式 $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$ の誤差であるが,これについては,次が成り立つ。

定理6 (テイラーの定理)

関数 $y = f(x)$ が $x = a$ を含む区間で n 回微分可能であるとき,

$$R_n(x) = f(x) - \left\{ f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^2 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \right\}$$

とおけば,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

をみたす c が存在する。

∵

$$F(x)=f(x)-\left\{f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)\right.$$

$$\left.+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\right\}$$

とおけば，明らかに，

$$F^{(p)}(x)=f^{(p)}(x)-\sum_{k=p}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{(k-p)!}(x-a)^{k-p}$$

であるから，

$$F(a)=F'(a)=F''(a)=\cdots=F^{(n-1)}(a)=0$$

よって，コーシーの平均値の定理より

$$\frac{F(x)}{(x-a)^n}=\frac{F(x)-F(a)}{(x-a)^n-0}$$

$$=\frac{F'(x_1)}{n(x_1-a)^{n-1}}\qquad(a\leqq x_1\leqq x)$$

$$=\frac{F'(x_1)-F'(a)}{n(x_1-a)^{n-1}-0}$$

$$=\frac{F''(x_2)}{n(n-1)(x_2-a)^{n-2}}\qquad(a\leqq x_2\leqq x_1)$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\frac{F^{(n)}(x_n)}{n!}\qquad(a\leqq x_n\leqq x_{n-1})$$

そこで，$x_n=c$ とおけば，$F^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)$ より

$$F(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n\qquad(a\leqq c\leqq x)$$

（証明終）

この定理で，$n=1$ とおけば平均値の定理が得られるから，テイラーの定理は平均値の定理の一般化の一つの形となっている。

次に，このテイラーの定理を用いて，平均値の定理の１つの形

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)\qquad(0<\theta<1)$$

における極限 $\lim_{h\to 0}\theta$ について調べてみよう。

まず，具体例でみると，

（例題３） ２次関数 $f(x)=px^2+qx+r$ について，

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$$

をみたす θ の値を求めよ。

∵ $f(a+h)-f(a)$

$=p(a+h)^2+q(a+h)+r-(pa^2+qa+r)$

$=2aph+ph^2+qh$

$=h(2ap+ph+q)$

一方，

$$f'(x)=2px+q$$

であるから，

$f'(a+\theta h)$

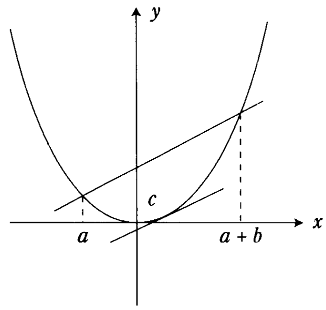
$=2p(a+\theta h)+q$

$=2ap+2p\theta h+q$

よって，条件式より，

$$ph=2\theta ph$$

$$\theta=\frac{1}{2}$$



（図２）

（解答終）

この例題でみる限りは，$\theta=\dfrac{1}{2}$ の根拠が $f(x)$ の何にあるのかが明白でない。そこで，定理６を利用してその根拠を調べることにしよう。

まず，平均値の定理により

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$$

$$=f(a)+h\{f'(a)+\theta h\cdot f''(a+\theta_1\theta h)\}$$

$$=f(a)+f'(a)h+\theta f''(a+\theta_1\theta h)\cdot h^2$$

一方，テイラーの定理より

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)\cdot h+\frac{f''(a+\theta' h)}{2}\cdot h^2$$

よって，

$$\theta\cdot f''(a+\theta_1\theta h)=\frac{1}{2}f''(a+\theta' h)\qquad\text{—}(*)$$

したがって，$f''(a)\neq 0$ で，$f''(x)$ が連続ならば，

$$\lim_{h\to 0}\theta\cdot f''(a+\theta_1\theta h)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}f''(a+\theta' h)$$

より，

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$$

しかし，$f''(a)=0$ なら，問題は残る。

例題の場合，$f''(x)=2p\neq 0$ であり，このことから，極限をとるまでもなく，$\theta=\dfrac{1}{2}$ が成り立っていることが理解できる。

また，これらの考察を一般化して，次の定理を導くことができる。

定理7　関数 $y=f(x)$ が，$x=a$ を含むある区間で n 回 $(n \geqq 2)$ 微分可能で，$f^{(n)}(x)$ が連続であるとき，

1）$f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0,\ f^{(n)}(a)\neq 0$ ならば，平均値の定理

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$$

をみたす θ について，

$$\lim_{h\to 0}\theta=\sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}$$

が成り立つ。

2）$f^{(n)}(a)\neq 0$ ならば，

$$f(a+h)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot h^k+\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}\cdot h^n$$

における θ について，

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n}$$

が成り立つ。

∵1）平均値の定理，およびテイラーの定理より，

$$f(a+h)$$

$$=f(a)+hf'(a+\theta h)$$

$$=f(a)+h\left\{f'(a)+\theta h\cdot f''(a)+(\theta h)^2\cdot\frac{f'''(a)}{2!}\right.$$

$$\left.+\cdots+(\theta h)^{n-2}\cdot\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-2)!}+(\theta h)^{n-1}\cdot\frac{f^{(n)}(a+\theta_1\theta h)}{(n-1)!}\right\}$$

$$=f(a)+hf'(a)+\theta h^2\cdot f''(a)+\theta^2h^3\cdot\frac{f'''(a)}{2!}$$

$$+\theta^{n-2}h^{n-1}\cdot\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-2)!}+\theta^{n-1}h^n\cdot\frac{f^{(n)}(a+\theta_1\theta h)}{(n-1)!}$$

$$=f(a)+hf'(a)+\theta^{n-1}h^n\cdot\frac{f^{(n)}(a+\theta_1\theta h)}{(n-1)!}$$

また，テイラーの定理より，

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+h^2\cdot\frac{f''(a)}{2}$$

$$+\cdots+h^{n-1}\cdot\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

$$+h^n\cdot\frac{f^{(n)}(a+\theta' h)}{n!}$$

$$=f(a)+hf'(a)+h^n\cdot\frac{f^{(n)}(a+\theta' h)}{n!}$$

よって，

$$\theta^{n-1}\cdot\frac{f^{(n)}(a+\theta_1\theta h)}{(n-1)!}=\frac{f^{(n)}(a+\theta' h)}{n!}$$

$h\to 0$ として，

$$\lim_{h\to 0}\theta^{n-1}=\frac{1}{n}$$

したがって，

$$\lim_{h\to 0}\theta=\sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}$$

2）テイラーの定理と平均値の定理より

$$f(a+h)$$

$$=f(a)+hf'(a)+h^2\cdot\frac{f''(a)}{2}$$

$$+\cdots+h^{n-1}\cdot\frac{f^{(n-1)}(a+\theta h)}{(n-1)!}$$

$$=f(a)+hf'(a)+h^2\cdot\frac{f''(a)}{2}$$

$$+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\{f^{(n-1)}(a)+\theta h\cdot f^{(n)}(a+\theta_1\theta h)\}$$

一方，テイラーの定理より，

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+h^2\cdot\frac{f''(a)}{2}$$

$$+\cdots+h^{n-1}\cdot\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}+h^n\cdot\frac{f^{(n)}(a+\theta' h)}{n!}$$

よって，

$$\frac{\theta}{(n-1)!}\cdot f^{(n)}(a+\theta_1\theta h)=\frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(a+\theta' h)$$

$h\to 0$ として，$f^{(n)}(a)\neq 0$ に注意すれば，

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n}$$

（証明終）

この定理で，$\lim_{h\to 0}\theta$ の存在は示されたとはいえ，一般に θ を h で表すのは困難な場合が多い。その意味で，平均値の定理は c の値，あるいは θ の値の存在を主張する存在定理ということができる。存在定理は，微分方程式の解の存在定理が，解の存在を保障するのみで，具体的な解の形を教えてくれるものではないにも関わらず，有益な結果を導く際のキー

ポイントとなっているように，有効であることが多い。したがって，平均値の定理やその一般化について考察を加えたり，平均値の定理を利用して解決できる問題や場面を生徒により多く示してやることが必要であろう。

3.　平均値の定理と授業実践

平均値の定理にはじめて出会うとき，多くの生徒は，その定理の意味が図形的には明確であるにも関わらず，突然現れたこの定理がどのような役に立つのか分からず，とまどうことが多い。

教科書の記述には，“ある区間で $f'(x)\equiv 0$ であるならば，この区間で定数である”ことや，“ある区間で $f'(x)>0$ ならば，この区間で関数 $f(x)$ は増加する”とか，“関数 $f(x)$ の不定積分は定数の差を除いて，一意的に決まる”ことなどが取り上げられている。

もちろん，これはこれで重要なことであろうが，生徒にとっては，c はどんな値であるか，θ はどんな値をとり，a，h を使ってどのように表されるのかといった疑問や，そのほかの場合でどのように役立つのかを知りたいといった思いが残る。そこで，私はこの20年というもの，不等式 $f(x)\geqq 0$ を示す場面で，通常のように，$f'(x)$ を求めた上で，$f(x)$ の増減表を利用した解法を示すと同時に，改めて平均値の定理を用いた別証明を考えるようにしている。

幸いにして，教科書の例題における $f(x)$ では，$f(a)=0$ をみたす a の値を見い出しやすいことが多く，そのため，

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x)-f(a) \\ &= (x-a)f'(c) \qquad (a\leqq c\leqq x) \end{aligned}$$

のように，平均値の定理を使う形に持ちこむことができる。そこで，後は，$f'(c)$ の状況や符合に着目すれば増減表を調べるまでもなく，解決してしまうことが多い。

他の場面としては，生徒にロピタルの定理を説明する場合，コーシーの平均値の定理を示す必要があることから，このコーシーの平均値の定理を用いて，テイラーの定理を証明し，$\lim\limits_{h\to 0}\theta$ を考察させるときがある。

ただ，この流れで $\lim\limits_{h\to 0}\theta$ を扱う場合には，自然な流れでテイラーの定理を証明しようとして，コーシーの平均値を使うことになり生徒の負担を多くしたり，コーシーの平均値の定理を用いず，ロルの定理だけですまそうとして，テイラーの定理に，奇抜だが不自然な証明をつけなければならなくなるなど，困難なことが多い。

不等式の証明における平均値の定理の利用については，すでに前節でも述べたので，ここではあえて，テイラーの定理を，“関数 $f(x)$ の多項式による近似とその誤差”という観点で扱った授業実践について述べてみたい。

そのアイデアは，n 回連続的微分可能な関数 $f(x)$ を，多項式 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ で近似した場合，両者の誤差はどのような式で表されるかを考えるもので，

$$F(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

とおくとき，$F(a)=F'(a)=\cdots=F^{(n-1)}(a)=0$ が成り立つことを利用するものである。

$F^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)$ であるから，区間の $a\leqq x\leqq b$ における $F^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)$ の最大値を M，最小値を m とすれば，$m\leqq F^{(n)}(x)\leqq M$ であるから，

$$\int_a^x m\,dx\leqq\int_a^x F^{(n)}(x)dx\leqq\int_a^x M dx$$

ここで，$F^{(n-1)}(a)=0$ であることに注意すれば，

$$m(x-a)\leqq F^{(n-1)}(x)\leqq M(x-a)$$

以下，同様にして，$n-1$ 回積分すれば，

$$\frac{m(x-a)^n}{n!}\leqq F(x)\leqq\frac{M(x-a)^n}{n!}$$

を得る。ここで，$f^{(n)}(x)$ は連続であるから，連続関数についての中間値の定理により，

$$F(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \qquad (a<c<b)$$

をみたす c が存在する。$b<a$ の場合についても，同様である。

本時の指導過程

学　習　内　容	指　導　過　程・学　習　活　動	指　導　上　の　留　意　点
（導　　入） 恒等式の係数と微分係数	課題.1 xについての恒等式 $f(x)=1+2x+3x^2-5x^3$ $=a+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3$ の係数a, b, c, dを$f(1), f'(1), f''(1), f'''(1)$を用いて表せ。	・必要なら、$f'(x)$, $f''(x)$ などを求めるよう指示する。
	・与式を微分することにより、a, b, c, dが$f(1), f''(1)$などを用いてどのように表されるか考えさせる。 ・$f(\mathrm{x})$を$f(1), f'(1)$などを用いて表させ、$n \geqq 4$のとき、$f^{(n)}(1)=0$であることが、$f(x)$が4次以下の多項式となることを保証していることを理解させる。	・ここで、この条件が$f(x)$が多項式であることを特徴付けていることを注意する。
（展　　開） テーラーの定理とその証明	課題.2 区間$a \leqq x \leqq b$でn回微分可能で、$f^{(n)}(x)$が連続である関数$f(x)$と$\sum_{k=1}^{n-1}\{f^{(k)}(a)/k!\}\cdot(x-a)^k$の誤差$F(x)$はどのように表せるか。	
	・連続関数$f^{(n)}(x)$の区間$a \leqq x \leqq b$における最大値をM、最小値をmとすれば、不等式$m \leqq F^{(n)}(x) \leqq M$が成り立つから、両辺を$a$から$x$まで積分して、$m(x-a) \leqq \underline{F}(x) \leqq M(x-a)$がえられることに気付かせる。 ・$F^{(n-1)}(a)=F^{(n-2)}(a)=\cdots\cdots=F(a)=0$が成り立つことに注意させながら、不等式を$n-1$回積分させ、不等式 $m(x-a)^n \leqq n!F(x) \leqq M(x-a)^n$ をみちびかせ、$n!F(x)=f^{(n)}(c)\cdot(x-a)^n$が成り立つことを理解させる。 ・$F(x)=\{f^{(n)}(c)/n!\}\cdot(x-a)^n$と書けることを理解させる。	・$F^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)$が成り立つことに注意させる。 ・連続関数$f^{(n)}(x)$に中間値の定理を使う。
（ま　と　め）	・テイラーの定理で、$n=1$としたときが平均値の定理であることを理解させる。 ・$n!$が急激に大きくなる数であること、したがって、誤差$F(x)$はかなり小さくなることを述べる。	・テイラーの定理の一般形$f(x)=f(a)+\cdots\cdots$の形にも言及する。
次時の予告	・平均値の定理のθについて学習する。	

4. 反省と課題

授業では，コーシーの平均値の定理を使用しないで，自然な形でテイラーの定理を登場させ，かつ自然な証明法を与えようと試みた。そのため，テイラーの定理の証明を与えるのに2週間近くを要することになったが，得られた証明は，連続関数に関する中間値の定理と $\int (x-a)^n dx = \frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1} + C$ のみを利用する初等的なものである。

実際に扱ってみた印象では，多項式による導入例のせいもあってか，テイラーの定理の定式化や証明の方が，コーシーの平均値の定理の定式化や証明よりも自然なものとして受け入れられたようである。

しかし，それに続く $\lim_{h\to 0}\theta$ の扱いはやはり難しく，きちんと理解した生徒は少なかった。

指導する側としては，一つの存在定理である平均値の定理がいくつかの場面で強力に働くことや，平均値の定理自体に対する理解を深めようと試みたが，思ったように流れず，改善すべき点もいくつか明確になってきたと思う。

ただ，不等式の証明における平均値の定理の働きの見事さや簡潔さは多くの生徒に印象深いものであったらしく，授業後「自分も，平均値の定理がこのようにうまく使えるようになりたい。」とか，「平均値の定理はすばらしいですね。」といった声も聞かれたことは，嬉しい。

平均値の定理とその周辺に関わる扱いには多くの改善すべき点が残っているが，やりがいのある部分でもあると思っている。なお，テイラーの定理の初等的証明については，同じアイデアによるものが参考文献〔6〕に見い出されたので，それに基づいて一部改良できたことを報告するとともに，著者の田村二郎先生には感謝申し上げる次第である。

〈参考文献〉

1. 杉浦光夫「解析入門Ｉ」東大出版会，1990
2. 福田安蔵他「微積分演習Ｉ」共立出版，1974
3. 高木貞治「解析概論」岩波書店，1977
4. W. RUDIN “PRINCIPLES OF MATHEMATICAL ANALYSIS” McGRAW-HILL KOGAKUSHA LTD., 1976
5. 小平邦彦「解析入門」岩波書店，1991
6. 田村二郎「基礎数学—力学との境界をゆく—」近代科学社，1989