

真正な数学的活動としての証明の再構成活動

— 「真正な数学的活動」概念の反省 —

上ヶ谷 友佑・小山 正孝

本稿の目的は、「真正な数学的活動」という概念の反省である。本稿では、数学書の比較分析を行い、数学者の活動の実態の推定を試みた。具体的には、齋藤正彦著『数学の基礎：集合・数・位相』と松坂和夫著『集合・位相入門』を取り上げ、特に、連続写像の定義と条件の同値性の証明に関して、両著作の記述内容の差異を調べた。その結果、(1) 松坂の著作においては丁寧に証明されている事柄が、齋藤の著作においては「あきらか」であるとして大胆に省略されている場合があること、(2) 松坂の著作においては集合論の表現をふんだんに用いて証明が記述されている事柄が、齋藤の著作においては中間的な概念を潤沢に採用することで、集合論の表現を直接用いずに証明が記述されている場合があること、という2点を指摘した。これらの差異から、数学者にとって、証明を書く活動とは、未知な定理の証明を書く場合であれ、既知の定理に対して既知の証明を参考にしながら新しく証明を構成する（証明を再構成する）場合であれ、普遍的かつ理想的な無機質な文章を書く活動というよりはむしろ、特定のターゲット層を読者として想定した人間のかつ暗黙的なメッセージを含ませ得る文章を書く活動である、ということが推定できた。本稿では、このことから得られる数学教育への示唆として、特定のターゲット層を読者として想定した既知の証明の再構成活動の真正性を指摘した。これは、今まで数学教育研究が着目してこなかった、新しい着眼点である。

キーワード：数学教育，真正な数学的活動，証明，数学者の思考

Reconstruction of Proofs as “Authentic Mathematical Activities”: Reflection on the Concept

Yusuke Uegatani and Masataka Koyama

This paper aims to reflect on the concept of “authentic mathematical activities” and attempts to understand mathematicians’ activities based on a comparative analysis of books from the field of mathematics. We included Masahiko Saito’s *Sugaku no kiso: shugo, su, iso* (The Basics of Mathematics: Sets, Numbers, and Topology) and Kazuo Matsusaka’s *Shugo, iso nyumon* (Introduction to Sets and Topology) in this study, focusing on the difference between the two authors’ descriptions of the definition of continuous mapping and proofs of the equivalence of conditions. We found that (1) things that the latter work thoroughly proved were boldly omitted in the former work on the grounds that they are “trivial” and (2) some cases have been observed

where the latter work has used abundant set theory expressions to clearly prove things, whereas in the former work, these are proven without directly using such expressions and with the adoption of intermediate concepts. In accordance with these differences, we infer that detailing proofs is not writing in universal, ideal, impersonal sentences but rather ones that include human and implicit messages for an assumed target audience. This occurs regardless of whether one is proving an as yet unknown theorem or constructing new proofs regarding known theorems while consulting known proofs (reconstructing proofs) . In this paper, we highlight the authenticity of the reconstruction of known proofs while considering a specific audience, which constitutes a suggestion to mathematics education. This is a new perspective that has not received sufficient attention in previous mathematics education research.

Keywords : Mathematics Education, Authentic Mathematical Activities, Proofs, Mathematicians' Thinking

1. 問題の所在

学校における数学の学びについて考える際にはもちろん、生涯学習としての数学の学びを考える上でも、教室において学習者達が真正な数学的活動を実現することは、数学教育研究において最も重要な課題の1つである。しかしながら、そうであるがゆえに、Weiss, Herbst & Chen (2009) が「誰が『非真正』な数学の擁護者として知られることを望むだろうか？」(p.276) と問うたくらい、「真正な数学的活動」とは、数学教育において無批判に受容されてきた理想形でもある。その上で彼らは、「何が『真正』な数学を『非真正』な数学から区別するのかについての合意がほとんどないように思われるし、後者よりも前者の出現を促進するために教師達にとって必要不可欠な資質が何であるかについてほとんど明らかにされていないように思われる」(p.290) と結論付けている。真正な数学的活動の実現を数学教育の目標に掲げることそれ自体に異論を挟む余地はほとんどないにせよ、どんな活動が真正であるのかについては、検証の余地が多分にあると言える。

そこで本稿は、「真正な数学的活動」という概念を反省し、新しい角度からその本性に光を当てることを目的とする。特に本稿では、数学的活動の真正性をより深い形で議論するための1つの基礎資料を提供する。

2. 研究方法論

これまでの数学教育研究において、真正な数学的活動は、大きく分けて2つの観点から追究されてきたと言える。本稿では、それらを歴史的アプローチと実態的アプローチと呼ぶことにしよう。

歴史的アプローチとは、数学史をベースとして数学者の実践の様相を明らかにし、その様相を真正な数学的活動の典型例と見なす方法である。このアプローチにおいては、『証明と論駁』という著書で有名なラカトシュ(1980)

による数理哲学が、とりわけよく引用されている。この文献において数学者達の実践は、厳然とした絶対確実な知の体系を産出する過程というよりはむしろ、人間による誤解や誤謬を含み得るヘーゲル流の弁証法的発展 (Ernest, 1998) として記述される。『証明と論駁』で描かれる数学的コミュニケーションの様相は、多くの数学教育研究において真正な数学的活動の典型として見なされており、真理の伝達を最重要課題とする伝統的な教授実践に対するアンチテーゼとして、どのようにして教室で『証明と論駁』を実現するかが議論されてきた (例えば, Lampert, 1990; Larsen & Zandieh, 2007; Sriraman & Mousoulides, 2014)。

一方、実態的アプローチとは、一人ひとりの数学者が実態としてどんな活動を行っているかに焦点を当てた研究である。歴史的アプローチが、どちらかと言えば数学者コミュニティ全体の様相から真正な数学的活動の典型例の構築を試みるのに対して、実態的アプローチは、ある特定の数学者個人の活動の様相を調査し、そこから真正な数学的活動の典型例の構築を試みるものである。

歴史的アプローチが、教室における『証明と論駁』の実現という比較的単純な研究目標を志向しているのに対して、実態的アプローチは、調査の観点をどのように絞るかによって多様な研究目標を志向する。例えば、発話思考法による数学者の学習方略の調査研究 (Wilkerson-Jerde & Wilensky, 2011)、視線追跡装置を用いた初学者と数学者の証明の読み方の比較研究 (Inglis & Alcock, 2012)、数学の研究論文の構成の分析研究 (袴田ほか, 2015) などが挙げられ、近年、論文数が増加傾向にあるアプローチである。

本稿では「真正な数学的活動」について考察するために、後者の実態的アプローチの一種として、数学者の著作の分析という研究方法を採用する。より具体的には、齋藤正彦著

『数学の基礎：集合・数・位相』（齋藤, 2002；以下、『齋藤本』）と松坂和夫著『集合・位相入門』（松坂, 1968；以下、『松坂本』）を比較する。特に、これら2つの数学書に掲載されている位相空間における連続写像の特徴づけについて比較する。

両氏は、いずれも定評のある大学数学の入門書を複数著した日本の数学者であり、比較対象である『齋藤本』と『松坂本』はともにそうした入門書の1つである。ただし、それぞれ明確な意図を持った上で執筆されている。まず、『齋藤本』は、その「まえがき」において、たとえ物理学や工学を志す学生が厳密な実数論を必要としないとしても、数学を志す学生には、そもそも実数が存在するのかという根本的な問題から議論できることが必要不可欠であることを説く。その上で、実数論を含む全数学が集合論上に構築されることが数学における常識であるにもかかわらず、それをきちんと解説した数学書が少ないことを課題意識として、本書を執筆している。一方、『松坂本』は、現代数学の「言語」とも言うべき集合論と、同じく現代数学の基礎をなす位相空間論を、ほとんど予備知識なしに読めるように解説した古典的な入門書である。

これら2冊を比較対象として選択した理由は、次に引用する『齋藤本』のあとがきからもわかるように、『松坂本』の内容が『齋藤本』の基礎になっているからである。

位相空間についてはつぎの本を参考にした。
ブルバギ『数学原論 位相1』東京図書（1968、
原本は1965）。
松坂和夫『集合・位相入門』岩波書店（1968）。
とくに松坂さんの本にはお世話になった。証明
を丸写したところもある。

（『齋藤本』, p.271）

このように、『齋藤本』は、『松坂本』とその執筆意図が微妙に異なるにもかかわらず、

多くの部分において影響を受けている。そのため、逆に言えば、『齋藤本』と『松坂本』に掲載されている同じ数学的内容に関する証明の記述を比較することで、数学者・齋藤正彦が、『松坂本』の証明を咀嚼し、再構成する過程で、何を必要とし、何を不要としたのかを明らかにすることができる。そして、この知見からは、学習者が既存の証明を咀嚼して再構成する過程としての数学的活動を真正なものにするための示唆が得られると期待できる。

なお、位相空間における連続写像とは、高等学校の数学において取り扱われる連続関数の概念を抽象化した概念である。Tall & Vinner（1981）は、連続関数の概念が、大学で数学を学ぶ学生の間においてできえ、「その関数のグラフが視覚的に途切れなく繋がっている」ということと混同されており、その混同が、関数の定義域の本性に関わる混同であることを指摘している（p.167）。したがって、このような混同の存在に留意した教材研究を行うための手がかりとして、特に連続写像の概念について、齋藤がどのように考えたかを考察することは価値があると考えられる。

3. 比較結果

本節では、連続写像の定義と条件の同値性の証明に焦点を当てて、『松坂本』と『齋藤本』におけるそれぞれの記述を比較した結果を、その引用を交えながら述べる。なお、各引用における【XXX】のラベルは、後の考察の便宜のため筆者が追記したものである。

（1）連続写像の定義

さて、『松坂本』において連続写像の特徴付けは、3つの同値な命題が示されることによってなされている。それらは、要約すると次の通りであり、次の（i）～（iii）のいずれかを満たす写像は、他の2つも同時に満たすこととなり、そのような写像を連続写像と呼ぶ。

【松坂本・連続写像の定義】 $(S, \mathcal{D}), (S', \mathcal{D}')$ をそれぞれ位相空間とする。 f を S から S' への写像とすると、次の 3 条件は互いに同値である。

(i) S' の任意の開集合 O' に対して $f^{-1}(O')$ は S の開集合となる。

(ii) S' の任意の開集合 A' に対して $f^{-1}(A')$ は S の開集合となる。

(iii) x を S の任意の点とし、 $f(x) = x'$ とする。

そのとき、 x' における任意の近傍 V' に対して、 $f^{-1}(V')$ は x の近傍となる。

(『松坂本』, p.175 参照)

『齋藤本』においても、記号の割当が多少異なることを除けば、本質的に同じ命題が掲載されている。しかしながら、いくつかの相違点が見られる。まず、連続写像の定義が、

(i) ~ (iii) のいずれかを満たす写像ではなく、次のように『松坂本』の (iii) と類似した次の形式で定義されている。

【齋藤本・各点連続の定義】 X, Y を位相空間、 f を X から Y への写像、 a を X の点とする。 Y の点 $f(a)$ の任意の近傍 B に対し、 X の点 a の近傍 A で $f[A] \subset B$ なるものが存在するとき、 f は a で**連続**であるという。

(『齋藤本』, p.114, 強調原文)

【齋藤本・連続写像の定義】 f が X の各点で連続のとき、単に f は**連続**であるとか、 f は X から Y への**連続写像**であるとかいう。

(『齋藤本』, p.115, 強調原文)

『齋藤本』が、各点における連続性という局所的な性質を定義した上で、写像の連続性という大域的な性質を定義するという段階的な定義を採用しているのに対して、『松坂本』は、連続写像の定義の中に、各点における連続性を内包した形で定義している。

なお、『齋藤本』においては、もう 1 つ、閉包に関連した同値命題が示されているが、本

稿では『松坂本』の 3 条件を比較対象とする。

(2) (i), (ii) の同値性の証明

『松坂本』において連続写像の特徴付けに関する 3 条件の同値性は、2 つに分けて証明されている。まず、(i) と (ii) の同値性については次のように証明されている。

【松坂本・(i), (ii) の同値性】(i), (ii) が同等であることは、 S' の任意の部分集合 M' に対して

$$f^{-1}(S' - M') = S - f^{-1}(M')$$

が成り立つ (第 1 章 (4.4)') ことから、直ちに示される。実際、いま (i) が成り立つとし、上式の M' を S' のある開集合 A' とすれば、 $S' - A' \in \mathcal{D}'$ であるから、 $f^{-1}(S' - A') \in \mathcal{D}$ 。したがって $S - f^{-1}(A') \in \mathcal{D}$ 、すなわち $f^{-1}(A') \in \mathcal{U}$ 。ゆえに (ii) が成り立つ。逆も同様である。(『松坂本』, p.176)

なお、上記引用中の第 1 章 (4.4) ' とは、『松坂本』の第 1 章において読者に対して証明することが練習問題として課された公式であるが、どのように証明すれば正解であるのかについて、『松坂本』には一切言及がない。つまり、練習問題の答えが載っていない。

一方、このような証明に対して、『齋藤本』において対応する証明は次のように記述されている。

【齋藤本・(i), (ii) の同値性】補集合を考えればあきらか。(『齋藤本』, p.116)

つまり、『齋藤本』では、同じ証明がわずか一言で済まされているのである。

(3) (i), (iii) の同値性の証明

『松坂本』において、(i) と (iii) の同値性については次のように証明されている。

【松坂本・(i), (iii) の同値性】(i) \Rightarrow (iii) :
 $x \in S, f(x) = x'$ とし, V' を x' の任意の近傍とする。そうすれば

$$x' \in U' \subset V'$$

となる $U' \in \mathcal{D}'$ が存在し,

$$x \in f^{-1}(U') \subset f^{-1}(V').$$

(i) より $f^{-1}(U') \in \mathcal{D}'$ であるから, $f^{-1}(V') \in \mathcal{V}_S(x)$ 。

(iii) \Rightarrow (i) : $O' \in \mathcal{D}'$ とし, $f^{-1}(O') = O$ とする。 x を O の任意の点とし, $f(x) = x'$ とすれば, $x' \in O'$ であるから $O' \in \mathcal{V}_{S'}(x')$ 。したがって (iii) により $O = f^{-1}(O') \in \mathcal{V}_S(x)$ 。これが O の任意の点 x に対して成り立つから, 定理 9 によって $O \in \mathcal{D}$ 。 (『松坂本』, p.176)

なお, 上の引用における $\mathcal{V}_S(x)$ とは, 位相空間 S における x の近傍系, すなわち, x の近傍全体の集合を表している。また, 定理 9 とは, 次の定理である。

【松坂本・開集合の必要十分条件】 S の空でない部分集合 O が開集合であるための必要十分条件は, O の任意の点 x に対して, O が x の近傍となっていることである。

(『松坂本』, p.161)

一方, 『齋藤本』では, これに対応する証明は, 2 つに分けて記述されている。まず, 次のように各点連続の必要十分条件が証明されている。

【齋藤本・各点連続の必要十分条件】 f が a で連続であるためには, $f(a)$ の任意の近傍 B に対して $f^{-1}[B]$ が a の近傍であることが必要十分である。

証明 f が a で連続とし, B を $f(a)$ の近傍とすると, a の近傍 A で $f^{-1}[B]$ に含まれるものがある。近傍の定義によって $f^{-1}[B]$ も a の近傍である。

逆に B が $f(a)$ の近傍とする。仮定によって

$f^{-1}[B]$ は a の近傍であり, $f[f^{-1}[B]] \subset B$ だから, f は a で連続である。

(『齋藤本』, p.114)

その上で, 写像の連続性と (i) の同値性が次のように示されている (なお, B° は B の開核を表す)。

【齋藤本・連続性と (i) の同値性】 f が連続とし, B を Y の開集合とする。 $f^{-1}[B]$ の任意の点 a に対し, B は $f(a)$ の近傍だから, 仮定によって $f^{-1}[B]$ は a の近傍であり, したがって $f^{-1}[B]$ は開集合である。逆に

$f(a) = b$ とし, B を b の近傍とする。 B° は b の開近傍だから, 仮定によって $f^{-1}[B^\circ]$ は a を含む開集合, よって $f^{-1}[B]$ は a の近傍である。

(『齋藤本』, p.116)

4. 考察

(1) (i), (ii) の同値性の証明について

(i), (ii) の同値性の証明の比較において最も印象的なポイントは, 【松坂本・(i), (ii) の同値性】の証明と【齋藤本・(i), (ii) の同値性】の証明の記述量の差であろう。開集合と閉集合は互いに補集合の関係にあり, 対をなす概念であることから, 開集合について成立する事柄と, 形式的にはほぼ同型な事柄が閉集合についても成立し, また逆に, 閉集合について成立する事柄と, 形式的にはほぼ同型な事柄が開集合についても成立するということは, 位相空間論にある程度精通した者であれば, 齋藤の言うように, 「あきらか」であると感ぜられるかもしれない。しかしながら, 「あきらか」であるという主張は, 証明と言いながら何も証明していない。これ以上の説明の余地がないくらい自明な命題の証明であればいざしらず, 『松坂本』のように, 同じ命題に対してもっと緻密な証明を与えることも可能なわけであるから, 『齋藤本』においては, かなり大胆な省略があると言ってよいであろう。

そもそも『齋藤本』が、実数の存在といった根本的な問題を厳密に解説することを意図された本であったことを踏まえると、その省略の程度の大きさが一層際立って感じられる。

では、この点について『松坂本』が極めて緻密に論を進めているか、といえ、そうでもない。【松坂本・(i), (ii) の同値性】は、第1章(4.4)'の公式を利用して証明されているが、先に示した通り、『松坂本』において、当該の公式そのものの妥当性は証明されていない。もちろん、教育的配慮によって意図的にその証明が省略されているわけであるが、少なくとも、全体として厳密な証明が与えられているわけではないことには注意が必要である。

(2) (i), (iii) の同値性の証明について

【松坂本・(i), (iii) の同値性】の記述を見てみると、『松坂本』は、『齋藤本』の【齋藤本・連続性と(i)の同値性】と比較して、 \in や \subset といった集合論の記号をふんだんに使った構成となっている。『松坂本』が、現代数学の言語である集合論の入門書となることを意図した数学書であることを踏まえると、ある数学的内容が日本語を用いてでも集合論の記号を用いてでも記述できるのであれば、積極的に後者の方法を採用しているということは、極めて自然なことである。

一方、『齋藤本』の【齋藤本・連続性と(i)の同値性】の証明は、『松坂本』の【松坂本・(i), (iii) の同値性】と比較して、日本語を多用した記述になっている。そして、特に、【齋藤本・各点連続の定義】と【齋藤本・連続写像の定義】を分けて定め、【齋藤本・各点連続の必要十分条件】を一旦証明した上で、【齋藤本・連続性と(i)の同値性】を証明していることから、1つ1つの証明がある程度まとまった短めの分量で抑えられている。このことは、概念的に細かく構造化されているだけでなく、文章のまとまりという点でもよ

く構造化された証明になっている。概念的にも分量的にも構造化が行き届いているため、『齋藤本』は、集合論の基礎の上に全数学が展開可能であることを解説することを意図しながらも、文章としては形式的な集合論の表記法にあまり依存せず、概念的なコミュニケーションによって証明が読解できるような構成になっている。

Tall (2011) は、数学的対象が目に見えないモノであるにもかかわらず確固たるモノであるかのように認識できることを表すための用語としてクリスタリン・コンセプトという概念を提唱した。人は、同値関係にある複数の異なる命題を柔軟に同一視したり、相等関係にある複数の異なる表現を柔軟に同一視したりするという数学的な実践の中で、あたかも単一の数学的対象の異なる側面について語っているかのような感覚を得るのである。この感覚によって構成される概念が概念的な結晶化になぞらえて、クリスタリン・コンセプトと呼ばれるものである。

『松坂本』と『齋藤本』の特性をこのクリスタリン・コンセプトの観点から考察するならば、『松坂本』が、集合論による表現と日本語による表現の間を同値関係や相等関係に基づいて柔軟に行き来するようなクリスタリン・コンセプトの使用を要求する記述となっているのに対して、『齋藤本』は、日本語による表現同士の間を柔軟に行き来するクリスタリン・コンセプトの使用を要求する記述となっている、と言えるであろう。高等な数学を学ぶ上では、どちらも必要不可欠な素養である。集合論の解釈方法は比較的単純なので、日本語によって表現された数学的内容を集合論による表現へと翻訳できるならば、その内容を一切の曖昧さを残さずに把握することができる。そのため、『松坂本』は、厳密さという観点で高度な数学的コミュニケーションの手段を利用した数学書である。一方、『齋藤本』は、概念の階層構造をより細かく設定するこ

とによって、どんな場合においても簡潔なコミュニケーションができるように配慮した言葉遣いがなされており、簡潔さという観点で高度な数学的コミュニケーションの手段を利用した数学書である。

『松坂本』のような記述は、集合論・日本語間の差異が大きいと、一度それに対応したクリスタリン・コンセプトが形成されさえすれば、その差異の大きさを活かした極めて柔軟な数学的コミュニケーションが可能となる反面、それ相応の学習を経なければ、そもそもそのような大きな差異を同一視できるようにはならないであろう。一方、『齋藤本』は、概念の階層構造が細かい分、小さなクリスタリン・コンセプトをたくさん形成しなければならない反面、その分、一つひとつの表現間の差異が小さく、クリスタリン・コンセプトが相対的に形成しやすい状況が生み出されていると言えよう。

このことは、齋藤の「まえがき」からは直接的には読み解けない暗黙的なメッセージを示唆している。齋藤は、全数学が集合論の上に構築できることを解説する意図で執筆したにも関わらず、実際には、『松坂本』と比較して、あまり集合論を言語とした表現を使用していない。このことは、意図と実態が一致していないと見るよりはむしろ、全数学が集合論上に構築できることを実感するためには、実際に集合論を言語とした表現を使用する必要がないということがメタ情報として付加されていると見て取るべきであろう。例えば、コンピュータが電気で動いていることは常識であるが、コンピュータを活用するにあたっては、マウスやキーボードの操作と情報処理との関係がわかっている必要はない。しかし、いざマウスが故障したとなると、電気信号に関する知識が有効となり得る。数学もこれと同じである。位相空間論を活用するにあつ

ては、位相空間論の概念間の関係がわかっている必要はない。しかし、いざ位相空間論において行き詰まったとなると、集合論に関する知識が有効となり得る。こういった関係なのである。

概念的な簡潔さを欠いているという点で、『松坂本』のスタイルは、決して否定されるべきものではなく、集合論との関係を密接に保つ意味で、価値のあるスタイルである。しかしながら、少なくとも『齋藤本』において、そのスタイルは重視されなかったとすることができよう。齋藤は、集合論的表現と日本語表現の間の溝を埋めるための中間的概念を『松坂本』よりも潤沢に採用しており、数学の基礎が集合論にあるということを読者に実感させながらも、実際には集合論の表現を極力使用せず、抽象的な情報の取り扱いを重視した記述を心掛けているものと考えられる。

5. 数学教育への示唆

本稿の知見に基づく数学教育への示唆を議論する前に、そもそも、本稿が分析対象とした「数学の入門書の執筆」という数学者の活動が、真正な数学的活動に該当するののかという批判は十分にあり得るであろう。実際、『齋藤本』も『松坂本』も、どちらも入門書であり、大学の数学教育において使用される教科書であるから、齋藤は、その執筆過程において何らかの新しい定理を発見したわけではないし、齋藤なりの教育的意図が含まれた記述であるという点で、数学者同士の洗練されたコミュニケーションとは異なるスタイルで記述されている可能性が高い。もし「真正性」という語を、数学者が新しい定理を発見し、それを正当化する活動との類似性で規定するのであれば、確かに入門書の執筆という活動は真正ではない。しかしながら、本稿におい

て特に強調しておきたいことは、数学者の数学者としての新しい数学的知識の産出活動を、新しい定理を発見し、それを正当化する活動にのみ限定する理由はどこにもない、ということである。

Rav (1999) は、もし与えられた定理の真偽を瞬時に判定してくれる機械が作られたとしても、数学者は満足しないだろう、と指摘する。その上で、証明とは、数学的な方略や方法の伝達役を果たしている、と主張する。つまり、数学者は、定理の真偽を判定するただけに証明しているのではなくて、証明を構成する活動を通して、数学的な方略や方法という数学的な方法知を生み出しているのである。したがって、新しい定理の発見だけが新しい数学的知識の創造なのではなくて、証明の新しい構成（証明の再構成）もまた、新しい数学的知識の創造なのである。もちろん、既知の定理を証明し直すという活動は、既知の定理の既知の証明と類似のアイデアを使用し得るから、証明し直す活動によって産出される新しい数学的知識は、その新規性の程度で言えば、それほど高くない場合もあるであろう。しかしながら、それでも、証明の再構成活動は、新しいターゲット層を読者として執筆したり、同じターゲット層であっても、より効果的な記述を準備したりという形で、程度の差こそあれ、新規な数学的な方法知を産出する活動であると捉えることができる。

このような観点に立つならば、齋藤が『松坂本』を参考にしながら、実数論を厳密に展開するための入門書を著したように、既知の定理の既知の証明を参考にしつつも、特定のターゲット層を読者として想定しながら証明を再構成するという活動は、れっきとした数学者の知識産出活動の1つである、と捉えることができる。その意味で、もし数学の学習者が、既知の定理の既知の証明を参考にしつつ、特定のターゲット層を読者として想定しながら証明を再構成する活動を行うならば、

それは、真正な数学的活動の一種であると言えるであろう。歴史的アプローチにおいて、ラカトシュ (1980) の『証明と論駁』が真正な数学的活動の典型例と見なされるということは、極めて自然なことであるし、それが典型例であることに疑いの余地はない。しかしながら、もし『証明と論駁』で描かれている活動のみが真正な数学的活動であると考えたとしたら、それは数学者の知識産出活動に対して、矮小な見方をしてしまっていると言えるであろう。

本稿が指摘したことは、教室における真正な数学的活動の実現に対して、新しい角度から光を当てることになるであろう。Sriraman & Mousoulides (2014) が指摘するように、『証明と論駁』を模範とする活動の教育的価値の大きさにもかかわらず、実際にそれを実現できたという報告は、それほど多くない。単純に考えても、真理を追究しようという姿勢の強い数学者達が集まるからこそ、証明に対して論駁を試み、それに対して新しい証明を試み……、という連鎖が発生すると考えられるのであって、真理の追究に対して十分に動機づけられているとは限らない子ども達が集まっただけでは、そのような理想的な連鎖がなかなか発生しないであろうことは想像に難くない。しかしながら、本稿が示した、既知の定理の既知の証明を参考にしつつ、特定のターゲット層を読者として想定しながら証明を再構成するという活動は、真理を追究するという活動と比較して、学習者にとって目的が理解しやすく、取り組みやすいと考えられる。数学の授業実践へ導入するためにはまだまだ検討すべきことがあるけれど、真正な数学的活動に対する新しい着眼点として、今後、さらなる発展を期待することができよう。

6. 結論

本稿は、「真正な数学的活動」という概念を反省し、新しい角度からその本性に光を当て

ることを目的として、数学的活動の真正性について新しい着眼点を提供した。具体的には、これまでの数学教育研究では、数学者が新しい定理を発見し、それを正当化する場面との類似性として数学的活動の真正性を捉える傾向にあった点を反省した。そして、数学者による数学的知識の産出場面とは、そのような場面に限られるものではなく、既知の定理の既知の証明を参考にしつつ、特定のターゲット層を読者として想定しながら証明を再構成するという場面においてもあり得、そのような場面との類似性として数学的活動の真正性を捉えることができることを指摘した。実際、『松坂本』と『齋藤本』の比較を通じて、どんな読者を想定してどんな意図で執筆するかによって、大きな差異が生じ得るということが確認できた。初学者にとって、既知の定理の証明を再構成する活動は、未知の定理の証明を構成する活動と比較して取り組みやすいと考えられることから、真正な数学的活動に対する新しい着眼点として、今後、注目していくことができるであろう。

今後の課題としては、この新しい観点から見た真正な数学的活動を教室で実現するための具体案を検討することである。具体的な読者を想定した証明の再構成活動は、相対的に取り組みやすい活動であるとはいえ、具体的に誰を読者として想定するのがよいのか、検討の余地がある。齋藤と同じように初学者を想定するのであれば、後輩や同級生がよいかもしれないし、洗練された数学的コミュニケーション能力を活用するという点では、先輩や先生といった熟達者を想定してもよいかもしれない。また、保護者や他教科の先生など、数学に関する既有知識が推し量りにくい数学と必ずしも関係のない人達を読者として想定することだって考えられる。どんな読者を想定するだけでも多様な検討が可能であると目されるので、今後の考察対象としていきたい。

参考文献

- Ernest, P. (1998) *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*, SUNY Press.
- Fallis, D. (2003) Intentional gaps in mathematical proofs. *Synthese*, 134(1), pp.45-69.
- 袴田綾斗・寺垣内政一・影山和也 (2015) 「数学者による活動分析：数学科教師教育への示唆を目指して」『学習システム研究』(2), pp.66-73。
- Inglis, M. & Alcock, L.(2012) Expert and Novice Approaches to Reading Mathematical Proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(4), pp.358-390.
- ラカトシュ I.著, ウォラル J.& ザハール E.編 (佐々木力訳) (1980) 『数学的発見の論理：証明と論駁』共立出版。
- Lampert, M. (1990) When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal*, 27 (1), pp.29-63.
- Larsen, S. & Zandieh, M. (2007) Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), pp.205-216.
- Lehman, H. (1980) An examination of Imre Lakatos' philosophy of mathematics. *The Philosophical Forum*, 12(1), pp.33-48.
- 松坂和夫 (1968) 『集合・位相入門』岩波書店。
- Rav, Y. (1999) Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, 7(1), pp.5-41.
- 齋藤正彦 (2002) 『数学の基礎：集合・数・位相』東京大学出版会。
- Sriraman, B. & Mousoulides, N. (2014) Quasi-empirical Reasoning (Lakatos) . In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp.511-513), Springer Netherlands.
- Tall, D. (2011) Crystalline concepts in long-term mathematical invention and discovery. *For the Learning of Mathematics*, 31(1), pp.3-8.

Tall, D. & Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), pp.151-169.

Weiss, M., Herbst, P. & Chen, C. (2009) Teachers' perspectives on "authentic mathematics" and the two-column proof form. *Educational Studies in Mathematics*, 70(3), pp.275-293.

Wilkerson-Jerde, M. H. & Wilensky, U. J. (2011) How do mathematicians learn math?: resources and acts for constructing and understanding mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 78(1), pp.21-43.

著者

上ヶ谷 友佑 広島大学大学院教育学研究科
博士課程後期

小山 正孝 広島大学大学院教育学研究科