広島大学附属中・高等学校研究紀要
〈第45号　1998〉

三角形の3つの頂点までの距離の和が最小となる点について

河　野　芳　文

平面幾何の分野において，最大・最小問題は興味あるテーマの1つである。このテーマは幾何学の問題として興味深いばかりでなく，我々の日常における実用性という観点からも有意義である場合が多い。そこで，今回は，平面上の1点PからΔABCの3つの頂点に線分をひき，それらの長さの和$PA+PB+PC$が最小となる場合について考えてみた。その内容は，教具による点Pの位置の考察・予想，点Pの位置の作図法，その作図法の正当化であるが，これを中学3年の円周角の性質までの学習をふまえた上で扱ったものである。この扱いにより，数学的な見方や考え方のよさの幾分なりとも示されればと考える。

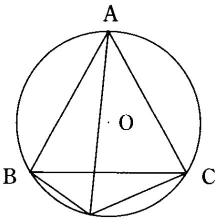
1. はじめに

数学の問題には，その問題が登場してきた背景をもつものが多い。問題によっては，その背景が容易に予想できるものもあるが，そのような予想，考察の困難なものも多い。

これまでに幾度か出会い，幾度か解いてきた問題でありながら，今年中学3年生を教える中で，何故このような問題が生まれてきたのか，どのような発想でこの問題が見い出されたのかと気になる問題があった。

それは，次のような問題である。

「正三角形ABCの外接円の弧BC上に1点Pをとるとき，
$AP=BP+PC$
が成り立つ。」



（図1）

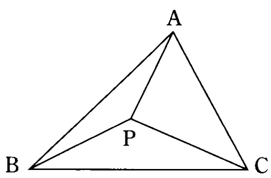
この問題自体は，線分BPを1辺とする正三角形DBPをつくれば，$\Delta DAB \equiv \Delta PCB$が成り立つことから解決するのであるが，誰がいかなる経緯で見い出したのかに興味がそそられた。

その後，しばらくして，本校の中等教育研究大会で中学3年生を相手に“円周角の性質の応用”をテーマにして公開授業を行うことになり，ここ数年の流れをうけて，三角形の3つの頂点までの距離の和が最小となる点の決定という問題について考えてみた。

これは，円周角の定理の応用に関わる問題と思われるいくつかの問題の1つとして考えてみた問題であったが，その解決をめざす過程で上記の問題が本質的な役割を果たすことが分かり，距離の和の最小性の解決とともに，上記の問題の出処の一端をも垣間見ることができた。

そこで，問題の有用性・日常性，問題解決にむけての定理の一般化の必然性，円周角の性質の有用性等を感じさせることができる問題と判断して，次の問題を扱うことにした。

「三角形ABCの3つの頂点までの距離の和
$PA+PB+PC$
が最小となる平面上の点Pの特定とその根拠を述べよ。また，その点Pの作図法を説明せよ。」



（図2）

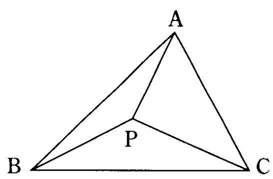
しかし，点Pを天下り式に示すのでは面白くないため，適切な教具をつくり，その教具を用いて点Pの位置を考察・予想させ，その上で予想が正しいことを数学的に推論し，証明させる方法を模索することにした。そして，幸いにも，その問題解決の過程の中で既知の定理を一般化して用いる必要も生じることが分かり，“一般化のよさ”の一端を知らせる扱いも可能になると判断した。

ただ，問題を数学的に捉え直した後でも，その問題解決，解法の正当性を論証することはかなり困難であると考えられたため，十分な時間をかけて丁寧に扱う必要があると思われた。

2. 点Pの位置の考察

問題

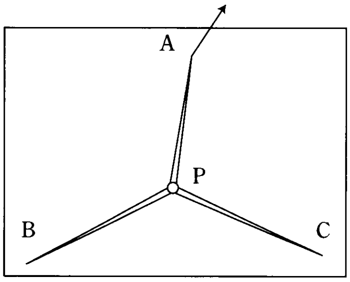
「与えられた三角形ABCについて，3つの頂点までの距離の和
$PA+PB+PC$
を最小とする点Pの作図法と，最小性の根拠を示せ。」



（図3）

の解を予想するために，まず，次のような教具を作

The Point which Minimizes the Sum of the Distances from the Vertexes of a Triangle
Yoshifumi KOHNO



（図４）

ることにした。

厚さのある広い長方形の板を準備し，その上の3点A，B，Cに滑車のついた釘を打ちこみ，端を釘Aに固定した糸を中央のリングPを通した後，Bの滑車，リングP，Cの滑車，リングP，Aの滑車へとまわし，その端が引っ張れるようにする。

その場合，滑車と糸の摩擦，リングと糸の摩擦が小さくなるよう工夫することが大切である。

この教具の点Aにある糸の端を強く引っ張ると，リングPは移動し，ある定点に落ち着いた。幾度かくり返した後，∠APB，∠BPCなどを調べたところ，ほぼ，$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°$ が成り立つことから，点Pは，

$$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°$$

をみたす点であると予想した。

もし，この予想が正しければ，点Pを作図するためには，△ABCの外側に，辺AB，BC，CAをそれぞれ1辺とする正三角形ABD，BCF，CAFをかき，正三角形ABDの外接円と正三角形CAFの外接円の交点として，点Pを求めればよい。さらに，3つの正三角形の3つの外接円は1点Pを共有することも予想できる。

したがって，こうして求められる点Pが条件をみたす唯一の点であることを証明すればよい。

これを，以下において順に論証してみよう。

定理1　$f(P) = PA + PB + PC$ とおけば，$f(P)$ は，Pの連続関数で，最小値をもつ。

∵1）$f(P)$ はPの連続関数である。

∵）任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

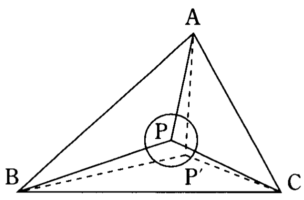
点Pの $\dfrac{\varepsilon}{3}$ 近傍内にP′をとれば，

$$|PA - P'A| < PP' < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|PB - P'B| < PP' < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|PC - P'C| < PP' < \frac{\varepsilon}{3}$$

であるから，



（図５）

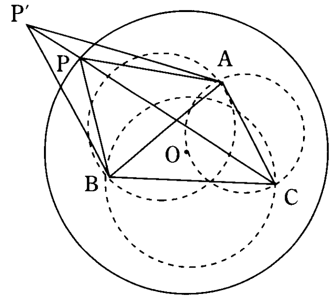
$$|f(P) - f(P')|$$
$$= |PA + PB + PC - P'A - P'B - P'C|$$
$$\leqq |PA - P'A| + |PB - P'B| + |PC - P'C|$$
$$\leqq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

したがって，$f(P)$ はPの連続関数である。

2）$f(P)$ は最小値をとる。

∵）3辺AB，BC，CAをそれぞれ直径とする3つの円をかき，この3つの円を内部に含む大きな円Oをとる。

円O外に点P′をとれば，∠AP′C，∠AP′B，∠BP′Cはすべて鋭角である。そこで，∠AP′Bが一番大きい場合について考える。（他の場合も同様である。）



（図６）

まず，CP′と円Oの交点をPとすれば，点Pは3辺AB，BC，CAを直径とする3つの円の外部にあるから，∠APC，∠BPCは鋭角であり，したがって，∠APP′，∠BPP′は鈍角である。

したがって，

$AP < AP'$，$BP < BP'$

が成り立つ。よって，

$$f(P) = PA + PB + PC$$
$$< P'A + P'B + P'C = f(P')$$

これから，円Oの外部の点Pでは $f(P)$ は最小値をとり得ないことが分かる。

そこで，点Pが円Oの周上および内部を動くとき，$f(P)$ が最小値をとることを示せばよいが，閉円板Oは有界閉集合であり，1）より，$f(P)$ は，その上で定義された連続関数であるから，$f(P)$ は閉円板Oの1点 P_0 で最小値をとる。

（証明終）

定理1により，$f(P)$ が最小値をとる点 P_0 の存在が確認できたから，教具で見い出した点Pが求める点であることを示そう。

そのために，補題を1つ準備しておこう。

補題2　正三角形ABCの外接円をOとする。2つの半直線AB，ACで囲まれた閉領域内の点をPとするとき，

1）点Pが弧BC上にあれば，

$AP = BP + PC$

2）点Pが弧BC上になければ，

$AP < BP + PC$

が成り立つ。

∵1）線分AP上に，PD = BPをみたす点Dをとれば，

$AB = BC$

$\angle BAD = \angle BCP$

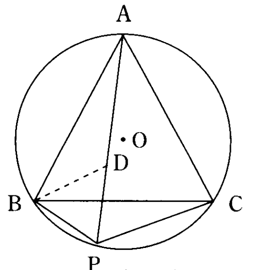
$\angle ABD = \angle CBP$

が成り立つから，

$\Delta ABD \equiv \Delta CBP$

これより，

$AP = AD + DP = AD + DB = CP + BP$



（図7）

2）線分BPを1辺とする正三角形DBPを図のようにとれば，

$AB = BC$

$BD = BP$

$\angle ABD = \angle CBP$

が成り立つから，

$\Delta ABD \equiv \Delta CBP$

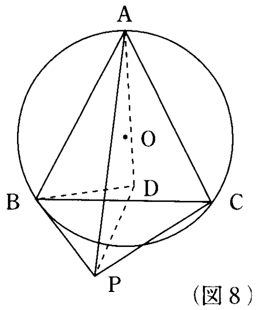
これより，

$AP < AD + DP$

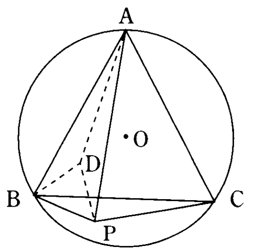
$= AD + DB$

$= CP + BP$

（これは，図8，図9の双方についての証明となっている。）



（図8）



（図9）

（証明終）

定理3　任意の三角形ABCにおいて，3つの辺AB，BC，CAを1辺とする正三角形DBA，ECB，FACを三角形ABCの外にとる。このとき，

1）3つの正三角形DBA，ECB，FACの外接円をそれぞれO_1，O_2，O_3とすれば，これら3つの円は1点Pで交わる。

2）1）の点Pは，$f(P) = PA + PB + PC$の値を最小にする点である。

∵1）円O_1と円O_3の交点をPとすれば，ΔADB，ΔACFは正三角形であるから，

$\angle APB = 120°$

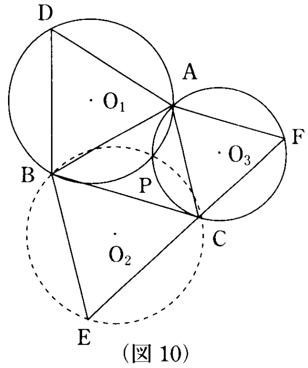
$\angle APC = 120°$

よって，

$\angle BPC = 120°$

したがって，点Pは正三角形CBEの外接円O_2上にある。

すなわち，3つの円O_1，O_2，O_3は1点Pで交わる。



（図10）

2）2つの場合に分けて証明する。

i）点P′が3つの円の弧$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CA}$のいずれかの上にあるとき，

∵）まず，3点D，P，Cが一直線上にあることを示す。

ΔDBAは正三角形であるから，

$\angle DPA = 60°$

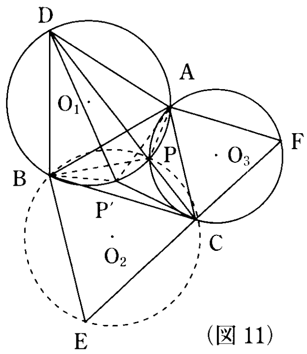
また，四角形APCFは円に内接するから，

$\angle APC = 120°$

したがって，

$\angle DPC = 180°$

となり，3点D，P，Cは一直線上にある。



（図11）

このことをふまえて，$f(P) < f(P')$が成り立つことを示そう。

いずれの場合も同様であるから，P′が弧$\overset{\frown}{AB}$上にあるとして証明する。

このとき，補題2により，

$f(P') = P'A + P'B + P'C$

$= DP' + P'C$

$> DC$

$= DP + PC$

$= AP + BP + PC = f(P)$

$\therefore f(P') > f(P).$

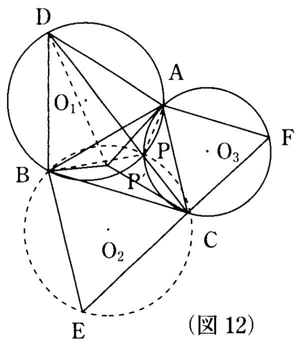
ii）点P′が3つの円の弧$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CA}$の上にないとき，

∵）他の場合も同様であるから，点P′が円O_1の内部にある場合について証明する。

このとき，次の不等式が成り立つことを示せばよい。

$f(P') > f(P).$

図において補題2を利用すれば，



（図12）

$$
\begin{aligned}
&f(\mathrm{P}')\\
&= \mathrm{P'A} + \mathrm{P'B} + \mathrm{P'C}\\
&> \mathrm{DP'} + \mathrm{P'C}\\
&> \mathrm{DC}\\
&= \mathrm{PD} + \mathrm{PC}\\
&= \mathrm{PA} + \mathrm{PB} + \mathrm{PC}\\
&= f(\mathrm{P})\\
&\therefore f(\mathrm{P}') > f(\mathrm{P}).
\end{aligned}
$$

ⅰ)，ⅱ）より，（図６）の実線の円内の任意の点 P' に対して，

$$f(\mathrm{P}') \geqq f(\mathrm{P})$$

が成り立つ。

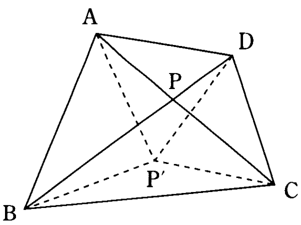
（証明終）

定理１，補題２，定理３の流れは，シュタイナーの問題に対する１つの解答の提示である。この問題は，凸 n 角形の場合に次のように一般化できる。

「凸 n 角形の n 個の頂点を A_1，$\mathrm{A}_2, \cdots$，A_n とするとき，n 個の頂点までの距離の和 $\mathrm{PA}_1 + \mathrm{PA}_2 + \cdots + \mathrm{PA}_n$ の値を最小にする点Ｐを求めよ。」

$n = 4$ の場合，すなわち，凸四角形の場合は明らかである。

すなわち，求める点Ｐは，四角形 ABCD の２つの対角線 AC，BD の交点である。



（図 13）

このとき，明らかに

$\mathrm{AP'} + \mathrm{P'C} \geqq \mathrm{AC}$

$\mathrm{BP'} + \mathrm{P'D} \geqq \mathrm{BD}$

であるから，

$$
\begin{aligned}
f(\mathrm{P}') &= \mathrm{P'A} + \mathrm{P'B} + \mathrm{P'C} + \mathrm{P'D}\\
&\geqq \mathrm{AC} + \mathrm{BD}\\
&= \mathrm{PA} + \mathrm{PC} + \mathrm{PB} + \mathrm{PD} = f(\mathrm{P})\\
\therefore\ & f(\mathrm{P}') \geqq f(\mathrm{P})
\end{aligned}
$$

しかし，$n \geqq 5$ の場合について，私はその解をまだ見い出していない。恐らく，誰かによってすでに解決されているには相違ないと思われるが。

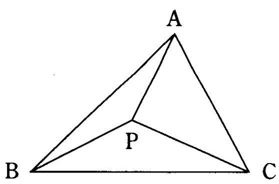
3. 授業実践の試み

問題

「与えられた三角形 ABC について，３つの頂点までの距離の和

PA + PB + PC

の値を最小にする点Ｐの位置を特定し，その点Ｐの位置を作図によって求める方法，および，その方法が正しいことを示せ。」は興味あるものであるが，この問題をいきなり提示して考えさせるのは無理があると思われる。



（図 14）

そこで，前述したごとく，流れをスムーズにするために，（図４）で示したような教具をつくり，それを操作しつつ，点Ｐの位置について予想させる場面を設定することにした。

そうした場面設定から点Ｐの位置が満たすべき条件 ∠APB＝∠BPC＝∠CPA＝120° が読みとれるならば，点Ｐの位置の作図に目を向けさせるのはごく自然な流れであり，試行錯誤しつつもその作図法に気付くのではないかと思われた。

問題は，求める点Ｐが，∠APB＝∠BPC＝∠CPA＝120° をみたす点であることの論証であるが，これは，中学３年生にはかなり難しい。このような判断から，他の点 P′ をとり，$f(\mathrm{P})$ と $f(\mathrm{P}')$ を比較させるとしても，P′ の位置について２段階に分けて考える方が流れをスムーズにすると考えた。

当然のことながら，点 P′ が３辺 AB，BC，CA を直径とする３つの円の周上にある場合と，そうでない場合に分けるとしても，補題２の中身はかなり重いため，１時間の中ですべてを扱うのは困難である。

しかし，幸いに，生徒たちの傍用問題集に補題２，１）が載っていたので，彼らの中にその問題を解いている者がいるものと予想して，点 P′ が上記の３つの円周上にある場合を中心にして，公開授業の指導案を作成することにした。

実際の授業では，まず課題の意味をていねいに説明し，授業の目標について述べた上で，点Ｐの位置について予想させた。

しかし，このような問いかけでは問題の考えようがなく，点Ｐの位置は，「三角形の重心だと思います。」「三角形の外心だと思います。」といった発言が，あまり根拠のないままに飛びだした。

そこで，「少し捉えにくい問題なので，私の作った教具を使って考えてみよう。」と投げかけ，（図４）に示した教具で，ひもを次第に強く引っ張りながら，点Ｐがある１点に定まってゆくことを提示してみせてみた。その上で，特定された点Ｐの位置を写真にとったものを印刷・配布して点Ｐの位置を予想させたが，少しの時間の後，一人の生徒が，やっとの思いで，「∠APB＝∠BPC＝∠CPA＝120° になっていると思います」と答えてくれた。こちらとしては，もう分度器で測らせようと思っていたときであったので，救われた思いがしたものであった。

さらに，多くの生徒がその発言を支持してくれたので，「点Ｐのみたす条件がそれで正しいとすれば，点Ｐの位置を作図するにはどうすればいいですか。」

と投げかけると，一人の女子生徒が，「三角形ABCの各辺の上にそれを1辺とする正三角形をかき，それらの正三角形の外接円の交点を求めればいいと思います。」と発言してくれた。生徒に，それらが1点で交わる理由を尋ねても，「2円の交点をPとすれば，円に内接する四角形の性質から，$\angle APB = \angle APC = 120°$ が成り立ち，したがって，$\angle BPC = 120°$ だから，点Pは辺BCを直径とする円の上にものっています。」と明解な答えが帰ってきた。

これで，点Pの位置の作図による求め方は一応片付いた分けだが，問題は点Pの位置の正当化である。

しばらくの間，ヒントなしで考えさせてみたが，やはり難しいのであろう，幾人かに指名しても「分かりません。」。そこで，点P′が弧AB上にある場合について考えさせたところ，「$AP' + BP' = DP'$ が使えるんじゃないですか。」との一女子生徒による発言があり，一男子生徒にたずねたら，「DPCが直線だから，最小です。」とのことであった。そこで，DPCが一直線になること，それから，$f(P') > f(P)$ が成り立つ理由を説明させたところで，授業は終わりとなった。

もちろん，多くの生徒がその展開を理解しているとは言えない状況（翌々日聞いたところでは，約40％の生徒がよく分かっていなかった）であったため，次時において復習し，その上で，点P′が円周上にない場合の考察を行った。幾分教師主導型の展開にはなったが，大半の生徒が理解をしてくれたと思われる。

中学校　数学科学習指導案

指導者　河野　芳文

日　　時　1998（平成10）年11月21日（土）1限（9：00～9：50）
場　　所　数学教室
学年・組　中学校3年B組（男子20名　女子20名　計40名）
題　　目　円
目　　標
1．円の対称性に着目して，円の弦の性質および円の接線の性質を調べ，三角形・四角形の内接円，三角形の外接円についての性質を理解させるとともに，二つの円の位置関係について理解を深めさせる。
2．円周角の定理を中心角との関係で理解させ，これを用いて円に関する簡単な性質を導くことができるようにする。また，円周角の定理の逆定理とともに，間接証明法について理解させる。
3．円に内接する四角形の性質を理解させ，4点が同一円周上にあるための条件を理解させる。
4．円の接線と弦のつくる角およびその角内にある弧に対する円周角の関係を理解させ，既習の定理とともに統一的に理解させる。

時間配当
1．円の性質……………………………………………2時間
2．円周角………………………………………………4時間
3．円と四角形…………………………………………4時間
4．発展学習……………………………………………4時間（本時はその第3時）
5．問題演習……………………………………………2時間

指導の経過と今後の計画

中学校における図形学習では，第1学年で実験や操作活動を通して，図形についての直感的理解を促し，2学年以降の図形学習での論理的考察の基礎を培うことになっている。第2学年では，三角形や四角形の性質を論理的に推理・論証する力を養成することが目標となる。

こうした流れを受けて，第3学年では，円の性質や三平方の定理および相似な図形の面積比・体積比について学習する。ここで図形の性質についての理解をより深めるとともに，論証能力や推論能力を一応完成させるねらいがある。

本時においては，中学校における図形学習を深め，図形的考察のよさ，論理的考察のよさなどを知らせるねらいで，3点までの距離の和が最小となる点を求め，作図させる課題学習を扱う。これは円周角の性質の応用であり，問題解決のために定理を一般化することの意義や必要性をも実感させたい。なお，この内容は，教科の主題「自ら学び考える力を育てる授業の創造」を考慮した展開となっている。

このあとは，図形分野の最後である図形と計量へ進む予定である。

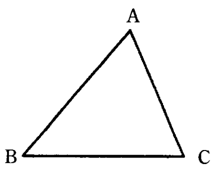
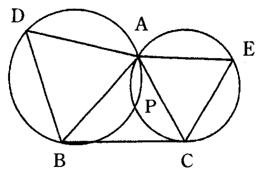
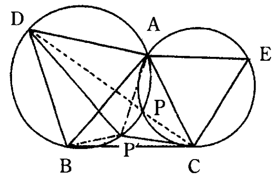
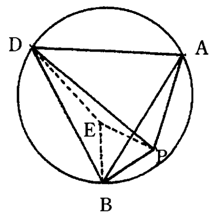
本時の題目

課題学習――三角形の内部の点から各頂点までの距離の和が最小となる点とその作図――

本時の目標

1．教具を用いて生徒の興味を引き出し，線分の長さの和が最小になる点の持つ特徴を発見させる。また，円周角の性質を利用して，その点を作図させる。
2．そのように作図して求めた点が，和を最小にする点であることを論証させる。

本時の指導過程

学 習 内 容	指 導 過 程・学 習 活 動	指導上の留意点
（導　入） 課題の提示	課題．右の図のように △ABC がある。 この三角形の内部に 1 点Pをとり，P から 3 つの頂点までの距離の 和 PA + PB + PC が最小 になるようにしたい。 点 P をどこにとればよいか。  ・生徒に予想させた上で，いろいろ発言させる。	題意をよく理解させる。
（展　開）	教具を使って点 P の位置を特定し，その作図法と正当性について考える。 ・点 P がどのような点であるか調べさせ，点 P が∠APB = ∠BPC = ∠CPA をみたす点であることを発見させる。	教具を利用して点 P の位置を特定した後，必要なら分度器を与えて測らせる。
作 図 法	・点 P の作図法について考えさせる。 ・∠APB = 120°，∠APC = 120° であるから，△ABC の辺 AB, AC 上にこれらを一辺とする正三角形をかき，その外接円に気付かせる。  ・作図法を確認する。	
最小性の論証	PA + PB + PC の最小性について論証する。 ・D, P, C が一直線上に並ぶことを確認させる。 ・点 P が外接円の周上にある場合について考えさせる。 P′A + P′B + P′C = DP′ + P′C > DC = PA + PB + PC 	必要なら，証明のヒントを与える。
	・つぎに，点 P が外接円の周上にない場合について考えさせる。 EB = BP = PE が成り立つように 点 E を取ればよいことに気付かせる。 AP + BP = BE + ED = PE + ED > PD  ・最小性の確認をする。	時間があれば，証明させる。 △EDB ≡ △PAB に気付かせる。
（ま と め）		
備　　考	使用教科書　中学数学 3 （大阪書籍） 使用教具　コンパス　分度器 滑車付きのボード	

4. 反省と課題

本時の扱いでは，教具を用いて結果を予想し，それから作図法を考えさせたり，予想が正しいことを論証させるという方法を念頭においたが，問題の難しさに加えて，この比較的身近かな問題が円周角の性質とどう結びつくのかを見とおさせることが困難であったため，かなりぎくしゃくした流れになったように思われる。

しかし，問題が身近かであること，問題解決のために既知の定理を一般化する必要を知らせうること，結果が美しいことなどから意欲的に取り組む生徒も半数近くいたと記憶している。

参加された先生方の意見の中には，教具もよいが，パソコンの画面上に3点A，B，Cをとり，いくつかの点Pについて，$f(P)$ の値を調べさせてもよかったのではとか，導入部における力の合成の扱いの是非についていくつかの意見を頂戴した。

助言者の先生からは，素材の良さ，生徒の理解度，実用性，指導者の指導力がかみあって，ぎくしゃくしながらも一応の目的は達成していたが，内容の深さ等を考えて，2～3時間をかけて，グループで話し合わせたり，課題学習として扱った方が良かったのではとの助言をいただいた。確かにそうであり，有難く思うとともに，今後，検討してより良いものに改善していきたいと思う。

〈参考文献〉

1. 岩田至康「幾何学大辞典1～6」1978
2. 杉浦光夫「解析入門Ⅰ，Ⅱ」東大出版会，1990，1985
3. 那須俊夫「変換幾何学入門」共立出版，1990
4. 里須康之介「平面立体幾何学」培風館，1989
5. 小平邦彦「幾何のおもしろさ」岩波書店，1985
6. 寺阪英孝「初等幾何学」共立出版，1957